

マッチング市場における多種類の技能の取得について*

野 坂 博 南

要 旨

本稿では、労働者などの経済主体が企業などに出会い経済活動を行う前に複数の種類の技能を取得するモデルを考察し、均衡で選択される技能水準の効率性について分析を行った。最初に、経済主体が複数種類の技能取得をする場合、技能の種類が一種類の場合とは異なり均衡解の条件は極めて複雑となることを指摘する。次に、効用関数が弱分離型である場合を考察した。このときは複数の種類の技能が一つの指標として集計可能であり、その指標に基づいて雇用の組み合わせが決まる場合は効率的な技能取得が達成されることを示す。

キーワード：マッチング；事前の投資；弱分離型効用関数

経済学文献季報分類番号：02-21；02-32

1. はじめに

二つの経済主体が出会うことから始まる経済活動や社会活動は数多く存在する。例えば、企業と労働者の関係を考えると、企業の生産活動にとっては労働サービスが必要であるが、そのためには企業にとって望ましい労働者を雇用する必要がある。また、結婚生活などの社会的活動でも、独身の男女は自分にとって理想的な結婚相手を探し結婚する。標準的な経済学では出会いの場として市場が考えられ、賃金などの価格が適切な資源配分や組み合わせを導くと考えられている。しかしながら、現実の経済では、労働者と企業は個別に出会って取引を行うため、市場全体で通用する賃金が存在しない場合が多い。その場合には、個々の労働者と企業は自分にとって最も望ましい雇用相手を探し、賃金は企業と労働者の交渉の結果決定される。

本稿では、こうした経済において、労働者や企業などの経済主体が雇用相手に出会う前に技能や技術を取得する問題を考察の対象とする。個人は企業と出会う前に教育や訓練を受け

るが、こうして技能を取得することで就職後の生産性上昇や所得向上が期待できる。このとき問題になるのは、技能取得に適切な動機づけが与えられず、技能取得が非効率な水準にとどまってしまう可能性である。というのは、労働者の技能取得の収益は自己の将来所得の上昇に結び付くが、同時に雇用した企業の利潤も高めるからである。この結果、技能を取得する段階では、将来の雇用相手である企業に対し利益に見合った費用負担をさせる契約を結ぶことができないため、投資利益のかなりの部分が労働者自身に還元されなくなり、労働者の技能取得の誘因が減少し投資が過少になることがある。

Peters and Siow (2002) は、この点に関して経済主体の出会いの場における競争効果がこうした非効率性を解消する可能性を示した¹⁾。数多くの経済主体が参加する経済の場合 (large economies)、技能取得は自分の所得を増加させる効果のほかに、自分が出会いの場により魅力的になるので、より望ましい相手と雇用関係を持てるという追加的な便益をもたらす。例えば、労働者は教育を受け自分の生産性を上げると、将来、高い技術や高性能設備を装備した企業に雇用されるため、労働者の生産性と所得はさらに高まる。この追加的な便益は技能取得を促進する役割を果たし、Peters and Siow (2002) はこの効果のために効率的な資源配分が達成されることを示した。本稿ではこうした効果を競争効果と呼ぶことにする。

また、Peters and Siow (2002) の分析では出会いの場における労働者と企業の組み合わせを対応関数 (return function) という関数 g で表現した (論文では結婚市場における男性と女性の例で分析が展開されている)。すなわち、技能水準 x をもった労働者は、均衡では $g(x)$ の技術水準をもった企業に雇用されることを関数で表現した。もちろん、こうした組み合わせは経済の均衡で決まるため対応関数自体は内生的に決定されるが、このような対応関係の存在により、多くの投資を行い技能 x を上げれば高い技術 ($g(x)$) を持つ企業と巡り合えることが期待でき、技能取得に対する追加的な動機づけとなっている。

こうした一連の研究は、確かに出会いの場における経済主体間の競争の重要性を示したが取得する技能の種類は一つである場合が多い。しかしながら、現実の労働者や未婚の男女などは様々なタイプの技能や技術を取得している。例えば、結婚前の男女を考えると、彼らは計算能力といった技能から料理の技能、教養知識まで、結婚前に様々な種類の技能を獲得している。

本稿で考察する主題はこうした多種類の技能を取得する際の均衡解の導出についてである。まず、Peters and Siow (2002) による対応関数をベクトルに拡張した均衡では技能取得の均衡条件が極めて複雑で均衡の性質を分析するのに不向きであることを指摘する。次に、効用関数が弱分離型の場合、均衡に関して追加的な制約を導入することで簡単に均衡解が導出可能であり、また、その経済均衡は効率的な資源配分を達成することを示す。

技能の種類が複数ある場合には Peters and Siow (2002) の議論の援用では均衡解の条件が非常に複雑になる。彼らの議論は、上記の対応関数に表われている通り、労働者の技能水準（上記の x ）と企業の技術水準（上記の $g(x)$ ）が一对一の対応関係にある。しかしながら、複数種類の技能がある場合、ある特定の複数の技能の束（ベクトル）を持った労働者が、どのような複数の技術の束（ベクトル）をもった企業と雇用関係を持つかを考える必要がある。つまり、対応関数はベクトルからベクトルへといった対応であり問題は複雑化する。

そこで、本稿では効用関数を弱分離型に限定し、労働者と企業は一つの指標（後述する魅力度）をもとに雇用相手を決定する経済を考えた。そして、そのような条件下では均衡が比較的容易に導出できることを示し、その均衡が効率的であることを示した。もし雇用相手の技能が効用関数の中で分離可能であるときは、雇用相手の複数の技能の束（ベクトル）が一つの集計された指標で表現することができる。この指標を本稿では魅力度と呼んでいる。さらに、労働者と企業が（個々の技能ではなく）魅力度をもとに雇用相手を決める状況を考察すると、均衡の導出には魅力度に関する対応関数を決定すれば十分であり問題は極めて単純化される。また、経済均衡は効率的になることも示すことができる。総合的な魅力度をもとに雇用相手を決定する方法は現実面でも自然であるため、現実経済の効率性分析に対しても示唆に富む結果であると言える。

こうした分析は、雇用相手を決定する前に行う技能取得を分析した既存の文献と大きく関連している。まず、結婚モデルなどをはじめ、事前の教育投資とその後のマッチングの効率性を扱った文献を多数挙げることができる (Cole et. al. 2001a, b ; Felli and Roberts 2000 ; Peters and Siow 2002 ; Chiappori et. al. 2006 ; Iyigun and Walsh 2007 ; Nosaka 2007)。これらの文献では、経済均衡の効率性を分析しており、効率的な均衡、非効率的な均衡が発生する可能性を指摘した。本稿で利用する競争効果はこれらの研究で利用されている効果と同一のものである。また、サーチ理論では、パートナーを探すのに時間がかかる場合を想定しているが、この分野での研究とも深く関連している (Acemoglu and Shimer 1999 ; Menzo and Shi 2009 ; Shi 2009)。特に Acemoglu and Shimer (1999) ではマッチングの前に技能取得が行われるモデルを考察しているが、モデルの均衡が効率的であることが示されている。また、Shi (2009) では雇用相手を探す場所が自分が受ける便益によって異なるモデルを分析しており、本稿における魅力度によって雇用相手を決定する分析と類似している。本稿と最も密接に関連しているのは Ishida and Nosaka (2007) であるが、そこでは結婚モデルで複数の技能（市場労働と家事の技能）を一つの魅力度としてまとめ、それに基づいて男女がパートナーを決めるモデルを構築している。本稿は彼らのモデルの一般化を試みたものであるということが出来る。最後に前述の魅力度という指標は技能の需要と供給を調整するという点で市場

価格の役割に類似しているが、その意味で Rosen (1974) のヘドニックアプローチにおける価格と同様な機能を有している。このアプローチでは、更に多様な種類の性質を持った財を扱った均衡解の効率性に関する分析も行われた (Ekeland et. al. 2004 ; Ekeland 2005, 2010, Chiappori et. al. 2010)。しかしながら、ヘドニックアプローチでは、価格を通じて効用のやりとりが可能な譲渡可能効用 (transferable utility) の場合を想定している。一方、本稿では、そのような取引が不可能 (non-transferable utility) でお互いの特徴をもとに金銭的なやり取りなしに直接相手とマッチするモデルを対象としており、そのため異なるアプローチが必要となる。

本稿の構成は以下のようになっている。まず次節ではモデルの仮定の概要を示し、第三節では効率的な技能取得の条件を示す。第四節では均衡の技能取得の条件を示し、その問題の複雑性を指摘する。第五節では、効用関数が弱分離型の場合を仮定し、魅力度という単一の指標による対応関係を考える。その結果、均衡条件が単純化され、こうした対応のもとでは効率的な技能取得が行われることを示す。第六節では簡単な例を示し、第七節で本稿を総括し考えられるモデルの拡張を検討する。

2. モデル

2-1. モデルの概要

モデルの仮定は Peters and Siow (2002) と同様のモデルを仮定するが複数の種類の技能が存在することが異なっている。また、本稿では企業と労働者という二つのグループが雇用相手を決定するという例でモデルを展開する (一つの企業は一人の労働者を雇用すると仮定)。二期間モデルを想定し、第一期目に労働者は技能を高める人的資本への投資を行い、企業は生産性を高める技術投資を行う。一方、第二期目には一人の労働者と一つの企業が雇用関係を持ち生産を行う。この場合の労働者と企業の組み合わせは、どのようなペアの労働者と企業も均衡のペアを解消して他のペアのパートナーと雇用関係を結びなおす誘因を持たない組み合わせを想定する。また、企業数と労働者数が異なるため雇用関係を持たない経済主体も存在する。雇用関係を持たなかった場合は単独で生産活動を行うことになる。

連続体 (continuum) の労働者と企業を仮定し、その人口規模 (measure) をそれぞれ m と M とし、それらは外生的に決まっている。以下では、小文字の変数が労働者、大文字の変数が企業を表す変数として表記する。本稿では労働者の数が企業数より大きい場合を考えるため、 $m > M$ と仮定する²⁾。

本稿では、異質な能力を持つ労働者や企業を仮定し、労働者の能力水準を x 、企業の能

力水準を X と呼ぶ。能力の分布を定義するため、能力の水準が x と X の水準以上の労働者規模、企業規模をそれぞれ $f(x)$ 、 $F(x)$ と呼ぶ（能力分布は外生変数）。 f と F の分布の定義域をそれぞれ $[\underline{x}, \bar{x}]$ 、 $[\underline{X}, \bar{X}]$ とする³⁾。記号表記を簡単にするため、一般性を失わずに $x \geq \underline{X}$ の範囲において $f(x) = F(x)$ となるように関数と変数を変換する。

労働者の効用や企業の利潤は譲渡可能でないと仮定する（non-transferable utility model）。効用が譲渡可能でない経済の場合、数多くの効率的な資源配分が存在することが知られているが、本稿では高い能力の労働者が高い能力の企業と雇用関係を結ぶ（低い能力の労働者が低い能力の企業と雇用関係を結ぶ）という組み合わせを考察する。また、こうした組み合わせは能力に関する Positive Assortative Mating（以下では PAM と略記することとする）と呼ばれる。本稿の基準化されたモデルでは、能力に関する PAM は雇用関係を結ぶ労働者と企業の能力が均衡では等しいことを意味し均衡のペアでは $x = X$ となる。

2-2. 投資と生産活動

労働者と企業は第一期に投資を行った後に、第二期に仕事のパートナーを決定し雇用関係を結び所得や利益などを得る。投資の結果、労働者は技能 h 、企業は技術 H を取得する。特に混乱する可能性がない限り、本稿では h と H の双方とも技能と呼ぶことにする。こうした技能は労働者、企業とも n 種類あるため、 h と H はそれぞれ $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)'$ 及び $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)'$ と n 種類の技能からなっているとする⁴⁾。

一期目に技能への投資を行うがその投資費用を労働者が $c(h, x)$ 、企業が $C(H, X)$ と仮定する。一方、二期目に生産活動を行うが、これらの便益を労働者は $q(h, H, x)$ 、企業は $Q(H, h, X)$ と表すことにする。また、投資費用も含めた経済主体の便益を労働者及び企業でそれぞれ v 及び V 表し、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} v(h, H, x) &= q(h, H, x) - c(h, x) \\ V(H, h, X) &= Q(H, h, X) - C(H, X). \end{aligned}$$

本稿ではこれらの v と V を特に混乱を生じない限りそれぞれ労働者と企業の効用関数と呼ぶことにする。

以下では、投資費用や便益ではなく効用関数の特徴についての仮定を設ける。一つ注意すべき点は、労働者と企業が雇用相手を見つける時点は投資費用を支払った後であり、雇用相手の選考基準は便益 $q(h, H, x)$ 及び $Q(H, h, X)$ に基づいて決定されることである。しかしながら、投資費用 $c(h, x)$ 及び $C(H, X)$ にパートナーの技能水準が入っていないことから、パートナーの選択に関する限り、便益（ q と Q ）を基準に雇用相手を選別することと効用

(v と V) を基準に雇用相手を選別することは同値であり、効用関数のみで以下の議論を進めても一般性を失わないことがわかる。また、均衡で Positive Assortative Mating となることを保証するため、効用関数は全ての要素に関して強い意味の増加関数とし、強い意味の凹関数を仮定する。加えて連続二次微分可能であることと全ての交差偏微係数が正であることも仮定する。

最後に企業や労働者はパートナーと雇用関係をもたずに単独で生産活動を行う場合の仮定を設ける。このときに達成できる効用水準を u とし、この水準は労働者と企業の能力とは関係なく一定であると仮定する⁵⁾。

3. 効率的な技能取得

上記の仮定により経済の均衡では能力に関して PAM となるが、まず、こうした組み合わせの下で効率的な投資水準を導出し次節の均衡分析の基準とする。前節での労働者と企業の分布に関する仮定から、能力に関する PAM の結果、同じ能力の労働者と企業が雇用関係を結ぶことになる。その結果、均衡では、

$$x = X \quad (1)$$

となる。よって、パレート効率的な資源配分は同じ能力のペアの便益の加重平均が最大になるような投資水準となる。具体的には、 α を任意の正の定数として以下の加重平均を最大化する投資量である。

$$v(h, H, x) + \alpha V(H, h, x), \quad (2)$$

内点解を仮定すると、一階の条件が最大化の必要条件となり、 $x \geq \underline{X}$ となるそれぞれの x について以下の条件が必要となる。

$$\frac{\partial v / \partial h_1}{\partial V / \partial h_1} = \dots = \frac{\partial v / \partial h_n}{\partial V / \partial h_n} = \frac{\partial v / \partial H_1}{\partial V / \partial H_1} = \dots = \frac{\partial v / \partial H_n}{\partial V / \partial H_n} \quad (3)$$

上記から二人のペアの限界代替率が全ての技能で等しくなることが最適化のために必要であることがわかる。次に経済の均衡条件を検討する。

4. 経済の均衡（分離均衡）

4-1. 労働者と企業の組み合わせ

本稿における多種類の技能取得モデルでは、第一節で説明した対応関数はベクトルの関数として定義される。具体的には、対応関数 $r: R^n \mapsto R^n$ 及び $R: R^n \mapsto R^n$ を導入し以下のような対応関係を想定する。

$$h = r(H), H = R(h). \quad (4)$$

ここでは、 $r(H)$ と $R(h)$ は双方ともベクトルであり、これらベクトルの第 i 要素はそれぞれ $r_i(H)$ 及び $R_i(h)$ と表すことにする⁶⁾。この対応関数の意味は、もし仮に労働者が h の技能を取得すれば、均衡では $H = R(h)$ という技能水準の企業と雇用関係を持つことが期待できるという意味である。また、本稿では異なる技能水準の労働者と企業は必ず異なる技能の相手と雇用関係をもつ均衡（分離均衡）に焦点を絞って分析を進める。そのため、 h と H の二つの関数とも一対一の対応関係をもった関数として表現できる。よって、対応関数を二回利用することによって次の関係式を得る。

$$h = r(R(h)), H = R(r(H)) \quad (5)$$

本稿では r と R の二つの対応関数とも上記の条件を満たす関数に限って分析を進める。さらに、対応関数は強い意味の増加関数であり、連続微分可能であると仮定する。

4-2. 均衡

対応関数を使うと経済主体の最適な技能水準は以下の最大化問題の解となる。

$$\text{労働者の問題： } \max_h v(h, R(h), x), \quad (6)$$

$$\text{企業の問題： } \max_H V(r(H), H, x). \quad (7)$$

能力の高い経済主体は投資からより多くの便益を得ることができること、及び他人の投資水準が便益を増加させることから、高い能力をもった経済主体はより多くの投資を行うことがわかる。また、仮定により、PAM の均衡では同じ能力の労働者と企業が雇用関係に入ることとなる。均衡における能力 (x 、 X) と技能 (h と H) の間の関係を、労働者は $h(x)$ 、企業は $H(X)$ と表すことにしよう。もちろん、こうした関係は経済の均衡で内生的に決定される。

最後に、雇用関係に入ることと単独で生産することが無差別である限界的な労働者の条件を導出する。労働者の人口規模が企業よりも多いという仮定により、一部の労働者は企業とは雇用関係に入れない。均衡では能力の高い労働者や企業ほど高い投資水準なので、ある一定水準以下の能力の労働者はマッチできないことになる。労働者は同じ能力の企業に雇用され、一番能力の低い企業の能力が \underline{X} であることから、企業に雇用される限界的な労働者の能力は \underline{X} となる。

能力水準が \underline{X} である労働者は雇用された場合と単独で生産した場合の便益が等しくなる。なぜなら、もし雇用された場合の便益が高くと、能力水準が \underline{X} に近い労働者は全員が雇用されるまでの投資（ここでは $h(\underline{X})$ ）を行い、その結果、労働者数が雇用する企業数よりも多くなるからである。一方、数が少ない企業は、労働者の場合とは異なり、労働者を雇用した場合の便益が単独で生産する場合よりも大きいだけで十分である。これらより以下の条件を得る。

$$\underline{u} = v(h(\underline{X}), H(\underline{X}), \underline{X}) \quad (8)$$

$$\underline{U} < V(H(\underline{X}), h(\underline{X}), \underline{X}) \quad (9)$$

こうした条件により経済の均衡を以下のようにまとめることができる。

定義 1 (均衡) 分離均衡は以下の条件を満たす能力別の投資水準 ($h(x), H(X)$) 及び対応関数 ($R(h), r(H)$) により表現される。

1. 能力別の投資水準 $h(x)$ と $H(X)$ は式 (6)、(7) の最大化条件の解であり、式 (8)、(9) の端点条件を満たす。
2. 対応関数 $R(h)$ と $r(H)$ は強い意味の増加関数であり式 (5) の定義式を満たす。
3. $x \geq \underline{X}$ の労働者は同じ能力水準の企業に雇用されるが、 $x < \underline{X}$ の労働者は単独で生産活動を行う。

4-3. 均衡条件

次に、均衡の特徴についてみてみよう。最大化問題 (式 6 と 7) の一階の条件を計算すると以下の条件を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial h_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial H_j} \frac{\partial R_j}{\partial h_i} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial H_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial h_j} \frac{\partial r_j}{\partial H_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (10)$$

更に、対応関数の性質 (式 5) を全ての技能水準で満たす必要があるから、これを各技能で偏微分すると以下のようにまとめられ、これが対応関数に対する制約条件になる。

$$I_n = \begin{pmatrix} \partial r_1 / \partial H_1 \cdots \partial r_1 / \partial H_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial r_n / \partial H_1 \cdots \partial r_n / \partial H_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial R_1 / \partial h_1 \cdots \partial R_1 / \partial h_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial R_n / \partial h_1 \cdots \partial R_n / \partial h_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、 I_n は n 次の単位行列である。

よって、対応関数は偏微分方程式（式10と11）と端点条件（式8と9）を同時に満たす必要がある。こうした偏微分方程式を一般に解くことは容易ではなく、そのため解の性質など経済分析に必要な要素の多くは得られない。

5. 弱分離型の効用関数と効率性

操作可能な経済均衡を考えるためにはより多くの制約が必要となる。そこで、本稿では弱分離型の効用関数を導入する。その結果、技能の束（ベクトル）が集計された一つの指標として表わされることを示し、もしその指標を下に労働者と企業が雇用相手を見つける場合、解は比較的簡単に特徴づけることが可能であることを示す。また、この均衡では効率的な技能取得が行われることがわかる。

まず、弱分離型の効用関数を導入するため以下の関数型を仮定する。

$$v = v(h, a(H), x) \quad (16)$$

$$V = V(H, A(h), X) \quad (17)$$

ここで a あるいは A は n 次元の技能のベクトルを単一の指標に変換する関数である（すなわち、 $a: R^n \mapsto R$ 、 $A: R^n \mapsto R$ ）。

上記の効用関数から分かるように、様々な技能を a あるいは A という単一の指標にまとめることができる。この指標は多様な種類の技能を集計したもの、あるいは様々な技能の合成財と考えることができる。ここで注意すべきは、経済主体の技能が雇用相手の効用関数の中で a あるいは A として集計されている点であり、労働者は a の高い企業を好む（企業は A の高い労働者を好む）ことである。そのような意味で a あるいは A という指標は、それぞれ企業あるいは労働者の「魅力度」を表しており、以下ではこうした指標を魅力度と表すことにする。

多様な技能が魅力度という一つの指標で表わされる場合、この魅力度という指標を下に雇用相手を探すという考え方は自然である。その場合には、均衡における安定的な組み合わせは、個々の経済主体の魅力度に応じて決まる。この点を具体的に労働者の場合で考えると、

企業にとって魅力度 $A(h)$ の高い技能 h をもつ労働者は、より魅力的な企業（すなわち高い水準の魅力度 a をもった企業）と雇用関係を結ぶと期待できる。したがって、技能 h と技術 H の組み合わせで考えるよりは、魅力度 a と A の対応関係で考えるのが自然である。

均衡の組み合わせが魅力度をもとに行われると可能な対応関数の範囲は制限されるが、その結果、対応関数は比較的簡単な関係に直すことができる。この点を明らかにするため、 h の技能を持つ労働者が雇用相手の企業 $R(h)$ から期待できる便益を魅力度を使って以下のように $\tilde{a}(h)$ として表記する（企業の $\tilde{A}(H)$ についても解釈は同様である）。

$$\tilde{a}(h) = a(R(h)) \quad (18)$$

$$\tilde{A}(H) = A(r(H)) \quad (19)$$

次に魅力度に応じた安定的な組み合わせを考える。具体的には対応関数に以下のような制約を課すこととする。

仮定1（魅力度に基づく組み合わせ）

- 1) $A(h') > A(h)$ のとき、またそのときにのみ $\tilde{a}(h') > \tilde{a}(h)$ 。
- 2) $A(h') = A(h)$ のとき、またそのときにのみ $\tilde{a}(h') = \tilde{a}(h)$ 。

仮定1は、単一の魅力度という指標に応じた安定的な組み合わせを表現したものである。この場合、もし h' の技能水準の労働者が h の労働者よりも企業にとって好ましい場合（すなわち $A(h') > A(h)$ の場合）、 h' の労働者は h の労働者よりもより望ましい企業と雇用関係を結ぶはずである。すなわち、技能と技術の対応関数を $H' = R(h')$ 、 $H = R(h)$ とすると、 $a(H') > a(H)$ となる。仮定1はそのような魅力度に基づいた安定的な組み合わせを表している。

仮定1のもとで次の補題が成り立つ。

補題1 分離均衡の下で仮定1が成立する場合、 $\tilde{a}(h) = z(A(h))$ を満たす強い意味の単調増加関数 z が存在する。

(証明) 可能な h の下でとりうる (A, \tilde{a}) の組み合わせの集合を Ω とすると、 Ω 上では任意の \tilde{a} に対して唯一の値の A のみが存在することは仮定1より明らかである。よって関数 $(z: R \mapsto R)$ が存在する。この関数が強い意味の増加関数であるという点を見るため、反対に強い意味の単調増加関数ではないと仮定してみる。そのとき、ある二つの技能 h と h' が存在し、 $A(h') > A(h)$ でかつ $\tilde{a}(h') \leq \tilde{a}(h)$ となる。しかしながら、これは仮定1に反す

るので矛盾する。（証明終）

補題は、魅力度 $A(h)$ の高い労働者ほど、魅力度 $a(H)$ の高い企業と雇用関係を結ぶことを意味する（雇用関係にあるから H と h は $H = R(h)$ を満たす）。したがって、均衡においては魅力度に関する PAM が成立することを意味する。以下では関数 z を魅力度に関する対応関数と呼び、この関数の連続微分可能性を仮定する。

魅力度に関する対応関数は労働者の技能 h が自身の効用にどのように影響を与えるかを測ったものである。よって、この関数のもとで労働者の効用関数は以下ようになる。

$$v = v(h, z(A(h)), x) \tag{20}$$

企業に関しても魅力度に関する対応関数は定義できる。関数 z の逆関数を利用すると、 $A(h) = z^{-1}(a(R(h)))$ となるが、これを企業の技術 H で表記し直すと以下ようになる。

$$\tilde{A}(H) = A(r(H)) = z^{-1}(a(H))$$

この関数を利用すれば、企業の効用関数も自身の技術水準の関数として表わすことができる。

$$V = V(H, z^{-1}(a(H)), X) \tag{21}$$

式 (20) と (21) よりわかる通り、魅力度に関する対応関数を利用すると、雇用相手の技能は魅力度を通して効用に影響を与えるため、最適化の条件は容易になる。内点解を仮定すると、最適化のための一階の条件より以下が導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial h_i} + \frac{\partial v}{\partial a} z'(A) \frac{\partial A}{\partial h_i} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial H_i} + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{1}{z'(A)} \frac{\partial a}{\partial H_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{22}$$

これらの一階の条件を整理すると、全ての i に対して以下の条件が成立する。

$$-z'(A) \frac{\partial v / \partial a}{\partial V / \partial A} = \frac{\partial v / \partial h_i}{(\partial V / \partial A) (\partial A / \partial h_i)} = \frac{(\partial v / \partial a) (\partial a / \partial H_i)}{\partial V / \partial H_i} \tag{23}$$

ここで一番左の項は技能の種類に依存しない数であるから、式 (23) の値は全ての技能の種類で同一であり、その結果、効率性の条件 (式 3) が成立し、均衡が効率的であることがわかる⁷⁾。命題1はこれらの結果をまとめたものである（証明は省略）。

命題 1 (効率性) 分離可能な効用関数と仮定 1 の下では分離均衡の技能水準は効率的となる。

最後に、この命題と先ほどの補題は、均衡の特徴を表しているだけでなく、効率的な均衡を導出する方法も示している。一般の均衡解は式(10)、(11)に表される連立偏微分方程式で表される。また、効率的な資源配分を求めるためにも式(3)の連立偏微分方程式を解く必要がある。一方、魅力度という指標を利用した均衡解の導出方法では、 $z(A)$ に関する単一の常微分方程式を解けばよいことがわかり Peters and Siow (2002)の手法が利用できる。この点を示すため次節では具体的な例を用いて均衡解を導出する。

6. 効率的な技能取得の具体例

以下では効用関数を特定して均衡を導く方法を考えてみる。技能の種類が二種類 ($n = 2$) である以下の効用関数を考えてみよう⁸⁾。

$$\begin{aligned} v(h, H, x) &= H_1 + H_2 - \frac{1}{2x} \left((h_1)^2 + (h_2)^2 \right), \\ V(H, h, X) &= h_1 + h_2 - \frac{1}{2X} \left((H_1)^2 + (H_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

また、労働者、企業が独自に生産活動を行う場合の効用は同一であると仮定しよう ($\underline{u} = \underline{U}$)。

上記の効用関数は弱分離型なので魅力度の指標に基づく労働者と企業の組み合わせを考えることができる。そのため、雇用相手の技能の項をまとめて指標化する必要があるが、もっとも簡単な指標として以下のような魅力度を考える。

$$a(H) = H_1 + H_2 \quad (25)$$

$$A(h) = h_1 + h_2 \quad (26)$$

この魅力度を前提にすると効用関数は次のように書きなおすことができる。

$$v(h, H, x) = a(H) - \frac{1}{2x} \left((h_1)^2 + (h_2)^2 \right), \quad (27)$$

$$V(H, h, X) = A(h) - \frac{1}{2X} \left((H_1)^2 + (H_2)^2 \right). \quad (28)$$

式(22)で表わされる最適化のための一階の条件は

$$z'(A) = \frac{h_1}{x} = \frac{h_2}{x} = \frac{x}{H_1} = \frac{x}{H_2}. \quad (29)$$

この条件と式(25)及び(26)より以下の関係が導かれる。

$$h_1 = h_2 = \frac{A}{2}, \quad H_1 = H_2 = \frac{a}{2}, \quad Aa = 4x^2 \quad (30)$$

式 (29)、(30) より、魅力度に関する対応関数は下記の微分方程式を満たすことがわかる。

$$z'(A) = \left(\frac{A}{z(A)} \right)^{1/2} \quad (31)$$

この微分方程式は α を任意の定数として以下の解を有する。

$$a^{\frac{3}{2}} = z(A)^{\frac{3}{2}} = A^{\frac{3}{2}} + \alpha \quad (32)$$

端点の条件として限界的な労働者を考えると、彼らは単独で活動するか企業と雇用関係を持つかに関して無差別である。そのため、 $\underline{A} = A(h(\underline{X}))$ と定義し、労働者の効用関数に限界的な労働者の最適条件 (29) を代入すると以下の解を得る。

$$\begin{aligned} \underline{u} &= v(h(\underline{X}), H(\underline{X}), \underline{X}), \\ &= \underline{a} - \frac{\underline{A}^2}{4\underline{X}} = \frac{4\underline{X}^2}{\underline{A}} - \frac{\underline{A}^2}{4\underline{X}}, \end{aligned} \quad (33)$$

これにより限界的な労働者の魅力度 \underline{A} が一意に求められる。式 (30) の関係より $\underline{a} = 4\underline{X}^2 / \underline{A}$ となり、これを式 (32) に代入すると定数 α が求められる。また、最大化条件のための十分条件も満たされることがわかる⁹⁾。

最後に、企業が雇用関係を持つ方が単独での生産より望ましいことが必要であるが、このための条件を導出する。この条件は以下の不等式で表される。

$$\underline{u} = \underline{U} < V(H(\underline{X}), h(\underline{X}), \underline{X}) \quad (34)$$

企業と労働者の効用関数の対称性を利用すると、式 (33) より以下の表現を得る。

$$V(H(\underline{X}), h(\underline{X}), \underline{X}) = A - \frac{a^2}{4X} = \frac{4X^2}{a} - \frac{a^2}{4X} \quad (35)$$

式 (33) と (35) を比較すると、雇用関係が望ましいという不等式 (34) は $\underline{a} < \underline{A}$ と同値であり、したがって $4\underline{X}^2 = \underline{a}\underline{A} < \underline{A}^2$ と同じである。この条件を端点の条件に代入すると、式 (34) のための条件は以下ようになる。

$$\underline{u} = \frac{4\underline{X}^2}{\underline{A}} - \frac{\underline{A}^2}{4\underline{X}} < \frac{4\underline{X}^2}{2\underline{X}} - \frac{4\underline{X}^2}{4\underline{X}} = \underline{X} \quad (36)$$

よって、企業は雇用関係を望ましく思うためには、単独生産の場合の効用 \underline{u} が十分低く、

X を下回ることが必要であることがわかる。

7. 結語

本稿では、労働者などの経済主体が企業などに出会って経済活動を行う前に技能取得をする問題を考察した。特に本稿では経済主体が複数種類の技能を取得する場合を分析し、対応関数を利用した均衡では解の導出が複雑化し一般的な特性を分析しにくい点を指摘した。そして、こうした複雑化を回避するため、弱分離型の効用関数という制約と魅力度に基づく雇用関係の決定という条件を示したが、この効用関数の導入により複数種類の技能は魅力度という単一の指標で表現可能となった。また、この魅力度に基づく対応関数の下でのマッチングを考えた場合、効率的な技能取得が達成されることを示した。

最後に、本稿で考察したモデルの拡張を考えてみる。本稿では、弱分離型の効用関数という特殊な条件のもとでは、魅力度という単一の指標に雇用相手の技能に対する選好が集約されることを示した。一般的な効用関数の場合にはこうした指標化はできないものの、望ましさをより一般的に表す指標、例えば効用水準、をもとに対応関数を構築することが考えられる。サーチモデルの分析ではあるが、Shi (2009) は労働者が仕事を探す場合に企業の提示する契約によって労働市場が分割されるモデルを考察した。そこでは、企業が提示する契約内容そのものでサーチの場所が分割されるのではなく、契約から得られる便益(の現在価値)の水準によって分けられると仮定している。この仮定は本稿の魅力度によって労働者と企業が相手を決定するという仮定と関連しており、こうした方向でモデルを拡張していくことも考えられる。

* 本研究は日本学術振興会の科研費(19530224)の助成を受けたものである。

注

- 1) なお、Peters (2007a, b, c, 2009) ではこうしたアプローチから導出される均衡解の問題点を分析し異なる形の均衡を提示している。
- 2) しかしながら、この仮定は何ら制約的ではない。なぜならば、不等号が逆の場合には労働と企業という名前を入れ替えることで全く同じ分析が当てはまるからである。
- 3) これらの仮定により $f(x) = m$ 、 $F(X) = M$ であることが分かる。
- 4) 労働者と企業の技能の種類数が異なっても本稿の結論は変わらない。
- 5) 論文の結論は単独で生産する際の効用水準が一定でなくとも成立するが、結論の導出を容易にするためにこの仮定を設けている。

- 6) 具体的には $r(H) = (r_1(H), r_2(H), \dots, r_n(H))$ 及び $R(h) = (R_1(h), R_2(h), \dots, R_n(h))$ となる。
- 7) 式 (23) 中の $\partial V / \partial A \cdot \partial A / \partial h_i$ 及び $\partial v / \partial a \cdot \partial a / \partial H_i$ は、それぞれ、式 (3) 中の $\partial V / \partial h_i$ 及び $\partial v / \partial H_i$ を指している。
- 8) この効用関数は Tinbergen (1956), Ekeland et. al. (2004), Ekeland (2010) などのように技能に関する 2 次形式の形をとっているが、上記論文とは異なり財の価格を通じて効用の譲渡ができないため本稿のように異なるアプローチが必要となる。
- 9) 労働者は以下の効用を最大化することになる。

$$v(h, z(A(h)), x) = z(h_1 + h_2) - \frac{1}{2x} \left((h_1)^2 + (h_2)^2 \right),$$

ここで、 $A = h_1 + h_2$ を利用すると問題は二段階の最大化問題として考えることができる。まず第一段階では、 A を一定として v を最大化する h_i を求め、続いて第二段階では v を最大化する A を求める。最初の第一段階の問題では明らかに $h_1 = h_2 = A/2$ が最適であることがわかる。そのとき、目的関数は以下のように単純化される。

$$v = z(A) - \frac{A^2}{4x},$$

次に、第二段階での最適性の十分条件を見てみよう。そのために、まず v を A で偏微分して以下の式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial A} = z'(A) - \frac{A}{2x} = \left(\frac{A}{z(A)} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{2x} = \left(\frac{A}{z(A)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2x} \left(A z(A) \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

もちろん上記の偏微係数は最適な点でゼロであり、最適な点を超えると負になり、下回ると正になることがわかり、最大化のための十分条件を満たしていることがわかる。同様な議論が企業の最適化条件に対しても成立し、最適化の一階の条件が十分条件であることが確認できる。

参考文献

- Acemoglu, D., and R. Shimer (1999): "Holdups and Efficiency with Search Frictions," *International Economic Review*, 40, pp. 827-849.
- Chiappori, P. A., M. Irigun, and Y. Weiss (2006): "Investment in Schooling and the Marriage Market," *IZA Discussion Paper Series*, 2454.
- Chiappori, P. A., R. J. McCann, and L. P. Nesheim (2010): "Hedonic Price Equilibria, Stable Matching, and Optimal Transport: Equivalence, Topology, and Uniqueness," *Economic Theory*, 42, pp. 317-354.
- Cole, H., G. J. Mailath, and A. Postlewaite (2001a): "Efficient Non-contractible Investments in Finite Economies," *Advances in Theoretical Economics*, 1 (Article 2).
- Cole, H., G. J. Mailath, and A. Postlewaite (2001b): "Efficient Non-contractible Investments in Large Economies," *Journal of Economic Theory*, 101, pp. 333-373.
- Ekeland, I. (2005): "An Optimal Matching Problem," *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 11, pp. 57-71.
- Ekeland, I. (2010): "Existence, Uniqueness and Efficiency of Equilibrium in Hedonic Markets with Multidimensional Types," *Economic Theory*, 42, pp. 275-315.
- Ekeland, I., J. J. Heckman, and L. Nesheim (2004): "Identification and Estimation of Hedonic Models," *Journal of Political Economy*, 112, pp. S60-S109.
- Felli, L., and K. Roberts (2000): "Does Competition Solve the Hold-up Problem?" *University of Pennsylvania CARESS Working Paper*, 00/04.

- Ishida, J., and H. Nosaka (2007) : "Gender Specialization of Skill Acquisition," *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy*, 7 (Advances) , Article 61, pp. 1-32.
- Iyigun, M., and R. P. Walsh (2007) : "Building the Family Nest: Pre-marital Investments, Marriage Markets and Spousal Allocations," *Review of Economic Studies*, 74, pp. 507-535.
- Menzio, G., and S. Shi (2009) : "Block Recursive Equilibria for Stochastic Models of Search on the Job," *PIER Working Paper*, 09-005, University of Pennsylvania.
- Nosaka, H. (2007) : "Specialization and Competition in Marriage Models," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 63, pp. 104-119.
- Peters, M. (2007a) : "The Pre-Marital Investment Game," *Journal of Economic Theory*, 137, pp. 186-213.
- Peters, M. (2007b) : "Innis Lecture: Hedonic Equilibrium," *Canadian Journal of Economics*, 40, pp. 1060-1077.
- Peters, M. (2007c) : "A Non-Cooperative Approach to Hedonic Equilibrium," *Micro Theory Working Papers*.
- Peters, M. (2009) : "Truncated Hedonic Equilibrium," *Micro Theory Working Papers*.
- Peters, M., and A. Siow (2002) : "Competing Premarital Investments," *Journal of Political Economy*, 110, pp. 592-608.
- Rosen, S. (1974) : "Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition," *Journal of Political Economy*, pp. 34-55.
- Shi, S. (2009) : "Directed Search for Equilibrium Wage-Tenure Contracts." *Econometrica*, 77, pp. 561-584.
- Tinbergen J. (1956) : "On the Theory of Income Distribution," *Weltwirtschaftliches Archiv*, 77, pp. 155-175.