生産可能集合が非凸の場合を含む経済の均衡解の存在について

神　保　一　郎

要　約

経済学ではすべての議論が凸集合の上で行われている。しかし独占を含めた不完全競争やイノーベーションの分析では生産可能集合は非凸となる。ここではユークリッド空間からManifold空間に写像し、そこで得られた結果に対してホモトピーを利用して、またユークリッド空間に写像し返す方法をとり、解存在を証明した。

キーワード：Increasing Returns to Scale；Homotopy；陰関数の定理；不動点；解存在

経済学文献季報分類番号：02-32

ここでは通常の一般均衡における解存在を証明した上で、通常のユークリッド空間に所属する凸集合の上では生産関数がincreasing returnsの場合では生産可能集が非凸となって解が得られないので、Manifold空間に写像して、そこで解を得る事とする。

先ずH個の消費主体とF個の生産主体からなる経済を考える。市場は完全競争下にあるが、生産主体の生産可能集合は必ずしも規模に関して収穫一定ではない。通常の場合に付いて解の存在を確かめた上で、Homotopy関数を利用してincreasing returnsの場合を含んでも解が存在するのを証明する。

1．消費者選択と需要対応

消費主体は家計であり、その数Hが経済に存在するものとする。財貨はℓ種類が分析の対象であり、h番目の家計の消費ベクトルを

$$x_h = [x_{h1}, x_{h2}, \cdots x_{hl}]' \in \mathbb{R}_+{}^{\ell}$$

で示す。ただし$\mathbb{R}_+{}^{\ell}$はℓ次元ユークリッド空間の非負象限である。家計は始め$\bar{x}_h > 0$の初期保有量を持って市場に現れる。これは全て現行価格で販売される。それによって所得をえて、その所得を自己の欲する財貨の購入に当てる。$\bar{x}_h$はsemi-positiveであり、財貨は少なくとも1種類ははじめから所有しているのを示している。労働等も初期保有量に含めて考え

る。X_h を家計 h の消費ベクトル x_h の集合である。この X_h に次の仮定を置く。

仮定1－1

消費主体 h の消費可能集合 X_h は閉であり、かつ凸である。$x_h \in X_h$ であれば $x_h > 0$ である。△

従って消費可能集合は ℓ 次元空間の非負象限そのものであり、下に有界である。

仮定1－2

次のような消費可能ベクトル $\bar{\bar{x}}_h \in X_h$ が存在する。

$\bar{\bar{x}}_{hi} \leq x_{hi},\qquad \forall_i \in L$　（ただし L は財貨の番号の集合である）

$\bar{\bar{x}}_{hi} < \bar{x}_{hi}$　（だだし $x_{hi} > 0$ である場合）

ただし、ここで $\bar{x}_h$ は家計 h の初期保有ベクトルである。△

家計は財貨を購入する為に所得を得なければならない。これは2つの源泉から得られる。1つは初期保有量の販売からであり、さらに1つは各消費主体が持っている株式により各企業から受け取る利潤の配分である。企業 f の株式のうち、消費主体 h が所有している割合を d_{hf} とする。したがって $d_{hf} \geq 0$ であって、企業が f が各家計に配分している割合を家計に関して合計すると当然のこと1となる。

$$\sum_f d_{hf} = 1$$

仮定1－3

消費主体 h の所得を M_h で表し、l 種類の財貨の価格ベクトルを p とする。企業 f が p のもとで利潤の最大化により生産ベクトルを y_f とすると次の関係が成立する。

$$M_h = px_h + \Sigma d_{hf}(py_f)$$

$$d_{hf} \geq 0,\ \Sigma d_{hf} = 1 \qquad \triangle$$

内積 py_f が利潤を表しているのは、y_f では投入物は常にマイナスの符号を持つ成分で示されており、一方産出量はプラスの数量で示されているからである。

仮定１－４

各消費主体hには、消費可能集合X_hに所属している対x_h^1, x_h^2とx^3に対して以下の選好関係$\succsim$が存在する。

(a) 推移性

$x_h^1 \succsim_h x_h^2$ であって$x_h^2 \succsim_h x_h^3$であれば$x_h^1 \succsim_h x_h^3$である。

(b) 完備性

すべてのx_h^1とx_h^2に対して、$x_h^1 \succsim_h x_h^2$か$x_h^2 \succsim x_h^2$が成立する。

(c) 連続性

任意に与えられたx_h^0に対して、集合 $\{x_h \mid x_h \mid \succsim_h x_h^0\}$ と $\{x_h \mid x_h^0 \succsim_h x_h\}$ は閉集合である。

(d) 準強凸性

$x_h^1 \succ_h x_h^2$であり、$0 \leq \alpha < 1$であれば、$(1-\alpha) x_h^1 + \alpha x_h^2 \succ x_h^2$となる。

(e) 非飽和性

全ての$x_h^0 \in X_h$に対して$x_h \succ_h x_h^0$となる$x_h \in X_h$が存在する。△

(a) は選考の合理性を示したものであり、(b) は消費主体が何らかの意味で2つの財貨ベクトルに対して選考を表明できることを示している。(c) は無差別曲線が描ける場合にはそれよりも高い選好を示す領域（better set）と、それよりも低い選考を示す領域（worse set）が閉集合であるのを示している。これは後で述べる効用関数の連続性と関係がある。(d) はbetter setが凸になるのを主張している。(e) は$\forall x_h^0 \in X_h$に対して$x_h \succ x_h^0$となるような$x_h \in X_h$が常に存在するのを主張するものである。豊かな経済の特色として、ボールディングのように全ての財貨の限界効用がゼロになるblissの存在を主張するものもあるが、どの点がblissであるのか、blissを超えて財貨を消費した場合には、どのような現象が起こるのか明らかでない。経済学はblissへ到る効率的な道を探るのが、その一番重要な役目であり、一度blissに到達すれば、全ての病気が消滅したときの医学のように、その役割を終えたのであり、経済学は安楽死するべきであると見るべきであろう。その点を考えれば「大きいことは、良いことだ」というコマーシャルがあったが、経済学では「多いことは、良いことだ」といっても、豊かになった今日でも十分に通用しうるものと考えられるであろう。

命題１－１

(a) 局所的非飽和

いかなる$x_h^1 \in X_h$に対しても$x_h^2 \in X_h$であって、どんなにx_h^1に近くても$x_h^2 \succ x_h^1$と

なるものが存在する。

(b) 凸性

どんな x_h^0に対しても、集合$\{x_h \mid x_h \succsim_h x_h^0\}$は凸となる。△

［証明］

(a)

仮定1－4 (e) から、どんな $x_h^1 \in X_h$ を取っても $x_h^3 >_h x_h^1$であって $x_h^3 \in X_h$ となる消費ベクトルが存在する。仮定 (d) から $0 \leq \alpha < 1$ に対して

$$x_h^2 = (1-\alpha)\,x_h^3 + \alpha x_h^1 > x_h^1$$

となる x_h^2が存在する。$\alpha \to 1$ とすれば左辺は $x_h^2 \to x_h^1$となるが$>_h$ が成立しているから $x_h^2 >_h x_h^1$のままである。

(b)

x_h^1 と$x_h^2 \in \{x_h \mid x_h \mid_h x_h^0\}$であるとしよう。$0 \leq \alpha \leq 1$ である場合

$$x_h \equiv (1-\alpha)\,x_h^1 + \alpha x_h^2$$

とおく。そうすると

$$x_h \succsim_h x_h^0 \tag{1－1}$$

となるのがどんなαについても成立するのが証明されれば良いのである。$\alpha = 0$ か $\alpha = 1$ かの場合は、x_h^1, x_h^2はともに x_h^0より選好水準の高い集合に所属していると仮定したから当然成立する。すなわち

$$x_h^1 \succsim_h x_h^0,\ x_h^2 \succsim_h x_h^0$$

したがって、証明を完結するには $0 < \alpha < 1$ の場合も（1－1）式が成立するのが言えればよい。仮定1－4の (b) から、$x_h^1 \succsim_h x_h^2$としても何ら一般性を失うことは無い。$x_h^* >_h x_h^1$となるような x_h^* を選んで、出来る限り x_h^1に近く取る事としよう。$x_h^1 \succsim_h x_h^2$であったから、仮定 (a) によって $x_h^* >_h x_h^2$となる。

$$x_h^{**} \equiv (1-\alpha)\,x_h^* + \alpha x_h^2\ (0 < \alpha < 1) \tag{1－2}$$

とおく。$x_h^* >_h x_h^2$であるから、(d) により $x_h^{**} >_h x_h^2$となる。$x_h^2 \succsim_h x_h^0$であったから

$$x_h^{**} >_h x_h^0 \tag{1－3}$$

となる。$x_h^{**} >_h x_h^0$であれば$x_h^{**} \in \{x_h \mid x_h \succsim_h x_h^0\}$となるのは言うまでも無い。$x_h^1$に出来るだけ近く x_h^* を選んだ。したがって x_h を x_h^{**} に出来るだけ近く選ぶことが出来るのである。$x_h^* \to x_h^1$とすれば $x_h^{**} \to x_h$ となる。したがって x_h は集合$\{x_h \mid x_h \succsim_h x_h^0\}$に所属している点の集積点である。仮定1－4の (c) の連続性によって、この集合は閉集合であるから、閉集合の定義から x_h は、この集合に所属する。従って、この集合に所属している2点 x_h^1と x_h^2の凸結合の点がすべて、この集合に所属するのが分かった。ゆえにこの集合は凸

であるのが証明された。　□

消費では選好が最大になるように主体が消費ベクトルを選ぶから、消費可能集合 X_h と仮定１－４とを考え合わせると、少しでも多く消費したほうが良いように思われる。何故ならば、X_h はプラスの方向に無限に広がっているからである。我々の経験から考えれば、これは少し妙である。無限の消費をした経験が無いからである。そうすると現実には X_h には何らかの制約があって、その真部分集合 $S \subsetneq X_h$ の中から消費ベクトル $x_h \in S^\ell$ を選び出す事になる。X_h を制限して S^ℓ の中に消費可能集合を閉じ込めるのは貨幣所得 M_h である。貯蓄の無い経済では所得以上に支出が出来ないから、我々の消費活動は

$$px_h \leq M_h \qquad (1-3)$$

の範囲に留まる。消費の場合では、２つのケースについて、困難が生じると思われる。価格は $p \gg 0$ ではなく $p > 0$ であるから $p_i = 0$ の財貨では $p_i x_i = 0$ となって、予算制約式とは関係なく、x_i の購入量を増大できる筈である。しかし初期保有量が一定であるのを考慮すれば、我々は有限の世界に閉じこまれざるを得ないのである。

さて、全ての企業について、その利潤 $py_f \geq 0$ が非負であるとしよう。もし損失が生じるような場合は、あとで述べるように生産を止めることが出来るからである。

$$M_h = p\,x_h + \Sigma\, d_{hf}\,(p\,y_f)$$

であるから、また $d_{hf}\,\bar{x}_h \geqq 0$ であるのを考慮すれば、少なくとも $\Sigma\, d_{hf}\,(p\,y_f) \geq 0$ であると言える。また

$\bar{\bar{x}}_{hi} \leq \bar{x}_{hi}$ （全ての i に対して）

$\bar{\bar{x}}_{hi} < \bar{x}_{hi}$ （$x_{hi} > 0$ の場合）

となっているので、$\bar{\bar{x}}_{hi}$ は初期保有量よりも必ず需要量が少ないか、ゼロである。少なくとも１財貨については正の初期保有量を持っているのを思い出せば

$$p\bar{\bar{x}}_h < p\bar{x}_h \leq M_h$$

我々は生存してゆくには最低限何らかの消費が必要である。したがって

$$p\bar{\bar{x}}_h < M_h$$

であるから、少なくとも $\bar{\bar{x}}_h$ が需要されると主張しうるであろう。

命題１－２

x_h^* が予算制約式 $p\,x_h \leq M_h$, $x_h \in X_h$ を満足するベクトルの中で一番選好水準が高い消費ベクトルとすれば、x_h^* は制約式 $x_h \gtrsim_h x_h^*$ の下で $p\,x_h$ を一番小さくするものである。　△

〔証明〕

背理法を使って証明する為に結論を否定して $x_h^1 \succsim_h x_h^*$ であって、且つ $p\,x_h^1 < p\,x_h^*$ となるような x_h^1 が存在すると仮定する。すなわち $p\,x_h^*$ は費用を最小にしないとするのである。命題1－1の (a) では局所的非飽和が成立するのを主張しているから x_h^2 の十分近くに $x_h^2 \succsim_h x_h^1$ となるような $x_h^2 \in X_h$ が存在する。$x_h^1 \succsim x_h^*$ で且つ $x_h^2 \succsim_h x_h^1$ であるから仮定1－1 (a) から $x_h^2 \succsim_h x_h^*$ が存在する。背理法の仮定から $p\,x_h^1 < M_h$ であり、x_h^2 を十分に $p\,x_h^2 \leq p\,x_h^* = M_h$ とすることが出来る。これは $p\,x_h^2$ が予算制約式を満足し、なお、かつ x_h^* よりも x_h^2 が選好されるのを示している。この事は x_h^* が予算制約式 $p\,x_h \leq M_h$ を満足する x_h のなかで一番選考される消費ベクトルであるとしたのと矛盾する。したがって $x_h \succsim_h x_h^*$ を満足する x_h のうちで x_h^* は一番費用の少ない消費ベクトルである。 □

命題1－3

x_h^* が $x_h \succsim_h x_h^0$ の制約の下で総支出 $p\,x_h$ を最小にするものであり、ある $x_h^1 \in X_h$ に対して $p\,x_h^* > p\,x_h^1$ であるならば、x_h^* は予算制約式 $p\,x_h \leq p\,x_h^* = M_h$ の下で一番選考される消費ベクトルである。 △

〔証明〕

$p\,x_h < p\,x_h^*$ を満たす任意の消費ベクトル $x_h^1 \in X_h$ とし、そして

$$x_h(\alpha) \equiv (1-\alpha)\,x_h + \alpha\,x_h^1\ (0 < \alpha \leq 1)$$

であるとしよう。そうすると命題の仮定から

$$p\,x_h^* > p\,x_h^1,$$

また一方

$$p\,x_h \leq p\,x_h^*$$

x_h と置いたのであるから

$$p\,x_h(\alpha) = p\,[(1-\alpha)\,x_h + \alpha\,x_h^1 < p\,x_h^*]$$

が成立する。$x_h(\alpha) \succsim_h x_h^0$ となっているとすれば、x_h^* は命題の仮定から $p\,x_h$ を最小にするベクトルであるから

$$p\,x_h^* \leq p\,x_h(\alpha) \qquad (1-4)$$

となる。ところが $p\,x_h \leq p\,x_h^*$ となっているから上に式は成立せず、従って $x_h(\alpha) \succsim_h x_h^0$ は成立しない。だから

$$x_h^0 \succsim_h x_h(\alpha)$$

でなければならない。すなわち

$$x_h(\alpha) \in \{x_h^0 \mid x_h^0 \succsim_h x_h\}$$

となる。これは仮定1－4の (c) により閉集合であるから、それに属する点列の集積点が

必ずその集合の中にとることが出来る。したがって

$$\lim_{\alpha \to 0} x_h(\alpha) = x_h \in \{x_h \mid x_h^0 \gtrsim_h x_h\}$$

となる。命題の仮定から $x_h \gtrsim_h x_h^0$ であり、したがって $x_h^* \gtrsim_h x_h^0$ である。また $x_h \gtrsim_h x_h^0$ ある。仮定１－４の (a) から $x_h^* \gtrsim_h x_h'$、また $p x_h^1 \leq p x_h^*$ を満たすから、このような x_h に対して $x_h^* \gtrsim_h x_h$ が成立する。　□

定義１－１

X_h の上で定義された連続実数値関数 u_h は $x_h^1 \gtrsim x_h^2$ である場合、$u_h(x_h^1) \geq u_h(x_h^2)$ となる時、その時に限って u_h は効用関数と言われる。また、u_h は家計 h の効用指標水準を示している。　△

さて M_h を家計 h の所得であるとしよう。所得は初期保有量の売却と株式保有で企業から配分される利潤によって決定される。p を価格ベクトルとすると

$$p x_h \leq M_h \qquad (1-5)$$

によって購入可能な財貨の量が決定する。（１－５）x_h の集合を X_h とすれば、X_h はコンパクトとなる。そうすると

$$x_h \in X_h \subset \mathbb{R}_+^{\ell}$$

の下で

$$max\ u_h(x_h)$$

の解として需要対応が得られる。p に対して必ずしも１つのベクトル x_h が決まるとは限らないから、需要関数ではなくて需要対応となる。

２．生産と供給対応

生産の主体は企業であり、利潤の最大化を目的として生産を行う。市場は完全競争下にあり、投入物と産出物の価格と初期保有量は与えられたものとして生産主体はその行動を決定すると仮定する。通常、企業は色々な種類の投入物を使用して、幾多の種類の産出物を生産する、所謂、結合生産が行われる。ここで全ての財貨の種類の数を ℓ とし、生産ベクトル y_f を次のように示す。

$$y_f = [\, y_{f1}, y_{f2}, \cdots, y_{f\ell}]' \quad (\text{' は縦ベクトルを示す})$$

ここで $y_{fi} < 0$ であれば投入量、$y_{fi} > 0$ であれば産出量を、また $y_{fi} = 0$ であればこの企業の生産に関係が無い財貨であるのを示している。従って、このベクトルは一種の生産関数となっており、ℓ 次元空間の１点と考えることが出来る。これを activity と呼ぶこととする。

企業 f にとって技術的に生産可能な全ての activity の集合を生産可能集合と名付け、Y_f で示す。

定義2－1

企業 f の生産可能集合は Y_f で示され、その企業にとって技術的に生産を実行しうる activity ベクトルの集合である。△

$y_f \in Y_f$

であれば、この activity の投入量・産出量の組み合わせが技術的に生産可能であるのを示している。

仮定2－1

$$0 \in Y_f$$

これは企業が何も生産しない自由をもっているのを示している。このことが可能である為、利潤がマイナスになるときは企業は生産を止めうるのである。

仮定2－2

Y_f は閉集合である。△

仮定2－3

Y_f は凸である。非凸の場合について述べる為、この仮定は後で外される。△

次に経済全体の生産可能集合について述べる。生産主体である企業の数は全体で有限個 F であるとする。経済全体の総供給量（生産量）は個々の企業の生産ベクトルを合計したものである。ある企業の産出物が他の企業の投入物になっている場合が多くあるが、これは産出物がプラス、投入物がマイナスの符号を持っているので、互いに相殺される。y で経済全体の総生産量を示せば

$$y = \sum_f y_f$$

であって経済全体が消費しうる産出量と、初期保有量として経済体系外から投入しなければならない量を示している。

定義２－２

経済全体の生産可能集合をYとし、次のものとする。

$$Y = \{y = \sum_f y_f \mid y_f \in Y_f, \forall f\}$$

次に、ここでの分析で大きな特徴をなしている可能生産配分集合について定義する。これは各企業の生産可能集合のカルテッシャン積である。

定義２－３

$$\mathscr{Y} = \times Y_f = \{y_1, y_2, \cdots, y_f \mid y_f \in Y_f, \forall f\}$$

Σy_fは$\ell \times F$次元空間の可能生産配分からℓ次元財空間の中への写像と考えることが出来る。

定理２－１

$0 \in Y$であって、閉で凸の集合である。

〔証明〕

全てのfに対して

$0 \in Y_f$（仮定２－１）

したがって

$\{0_1, 0_2, \cdots, 0_f\} \in \{\times Y_f\} = Y$

ゆえに

$0 \in Y$

次にYが閉集合であることを証明する。$y_f \in Y_f$とする（$f = 1, 2, \cdots, F$)。Y_fに所属する任意の activity をy_f^0とすれば、仮定２－２によりY_fは閉集合であるから、y_f^0に収束する点列$\{y_f^\nu\}$（$\nu = 1, 2, \cdots$)が必ず存在する。

$y^0 = \{y_1^0, y_2^0, \cdots, y_F^0 \mid y_f^0 \in Y_f, \forall f\}$

$y^\nu = \{y_1^\nu, y_2^\nu, \cdots, y_F^\nu \mid y_f^\nu \in Y_f, \forall f\}$

とすれば$\{y_f^\nu\}$がy_f^0に収束するから$\{y^\nu\}$は必ずy^0に収束する。$\mathscr{Y}$は集積点を集合内にもつから閉集合である。(Tychoroff の定理より)

yが凸集合であるのを証明する。仮定２－３によりY_fは凸である。$y^1, y^2 \in \mathscr{Y}$と置けば$0 \leq \alpha \leq 1$に対して

$\alpha y^1 + (1 - \alpha) y^2$

$=\{\alpha y_1^1 + (1-\alpha)y_1^2, \alpha y_2^1 + (1-\alpha)y_2^2, \cdots, \alpha y_f^1 + (1-\alpha)y_f^2 \mid y_f^1, y_f^2 \in Y_f, \forall f\}$

全ての f に対して $\alpha y_f^1 + (1-\alpha)y_f^2 = y_f \in Y_f$ であるから、

$\{y_1, y_2, \cdots, y_F \mid y_f \in Y_f, \forall f\} \in \mathcal{Y}$

したがって Y は凸である。　□

仮定２－４

$y \in \mathcal{Y}$ であって $\Sigma y_f \geq 0$ であれば、そのときは $y=0$ である。

$y=0$ は各企業の生産活動がすべて完全に停止しているのを示したものである。この仮定の意味するところは、経済全体の生産技術をどのように組み合わせても、個々の企業はさておくとして、社会全体としては投入なくしては、何の生産も出来ないことを示したものである。

仮定２－４

社会の生産可能ベクトル y は、それが技術的に生産可能であって、$\bar{x}$ が社会的初期保有量で、且つ

$y + \bar{x} \geq 0$

であれば実現可能である。実現可能集合は

$\hat{Y} = Y \cap \{y \mid y + \bar{x} \geq 0\}$

定義２－４

生産配分 y は、個々の企業 f にとって y_f が技術的に生産可能であり

$\Sigma y_f + \bar{x} \geq 0$

ならば、実現可能である。実現可能な生産配分集合は

$\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} \cap \{y \mid \Sigma y_f + x \geq 0\}$

で表す事とする。

命題２－１

$\hat{\mathcal{Y}}$ はコンパクトである。　△

〔証明〕

Y_f は定義２－４により有界であり、仮定２－２により閉である。そのカルテッシアン積

である Y は Tychoroff の定理によりコンパクトである。□

S_ℓ が ℓ 次元の基本単体とすると、ある与えられた $p \in S_\ell$ に対して y_f の連続写像 py_f は Y_f の上で最大値に到達しうる。なぜならば、Y_f は仮定２－４により、有界な集合である。また仮定２－２により閉集合である。したがって Y_f はコンパクトな集合であり、$p\,y_f$ は $Y_f \in \mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}$ への連続写像である。Weierstrass の定理により、この写像は値域内に最大値と最小値を持つ。

定義２－５

π_f が企業 f の利潤関数であれば

$$\pi_f(p) = max\ p\,y_f$$

である。　△

定義２－６

$Y_f(p)$ が企業 f の供給対応を示すものとすれば、$Y_f(p) = \{ y_f \mid p\,y_f = \pi_f(p),\ y_f \in Y_f \}$ となる。　△

定義２－７

規模に関して収穫非逓増

任意の $y_f \in Y_f$ が、スカラー $\alpha \in [0,1]$ に対して $\alpha y_f \in Y_f$ となる場合、規模に関して収穫非逓増という。

規模に関して収穫非逓減

任意の $y_f \in Y_f$ がスカラー $\alpha \geq 1$ に対して $\alpha y_f \in Y_f$ となるならば、規模に関して収穫非逓減と言う。

規模に関して収穫一定

任意の $y_f \in Y_f$ がスカラー $\alpha \geq 0$ に対して $\alpha y_f \in Y_f$ となるならば、規模に関して収穫一定と言う。　△

命題２－２

Y_f は凸で且つ無償処分の仮定を満たしているものとする。そうすると、供給対応 $y_f(p)$ は S_ℓ の上で連続である。　△

〔証明〕

$p^\nu \to p^0 \in S_\ell$ であるとしよう。S_ℓ は定義によりコンパクトであるから必ず集積点をその集合の中に持っている。また、この p^ν に対して $p^\nu y_f$ を最大にする activity を $y_f{}^\nu$ とすれば

$$y_f{}^\nu = y_f(p^\nu)$$

となる。Y_f は仮定1、2、3、によりコンパクトであるから、適当な部分点列 $y_f{}^\nu$ 取って $y_f{}^\nu \to y_f^0 \in Y_f$ となるようにする事が出来る。$p^\nu \to p^0$ と取るけれども、$y_f{}^\nu$ は一様に y_f^0 に近づくとは限らないから部分列を取ることになるのである。また Y_f はコンパクトであるから点列の集積点を必ず、その集合内に含んでいる。p^ν に対して $p\, y_f$ を最大にする activity は $y_f{}^\nu$ であるから

$$p^\nu\ y_f{}^\nu \geq p^\nu y_f(p^0)$$

したがって

$$p^\nu[\,y_f{}^\nu - y_f(p^0)] \geq 0$$

となる。p^ν の部分点列に沿って収束した集積点 p^0 で考えれば、上の式の符号の向きを変える事は無いであろうから

$$p^0\,[y_f^0 - y_f(p^0)] \geq 0$$

となる。命題2－2の（b）から p が決まると、それに対応する利潤を最大にする activity が決まる。この事はどのような集積点を取っても成立するから、命題が証明されたことになる。　□

3．均衡解の存在（生産可能集合が非凹の場合）

均衡解の存在を証明する主な用具は「角谷の不動点定理」である。これはフォン・ノイマンの「ゲーム理論」などで使用されたブラーワーの不動点定理を一般化し、いっそう広範囲の利用を可能としたものである。角谷の不動点定理が成立する条件は次のようなものである。凸のコンパクトな集合に所属している点を、その集合自身の凸部分集合に写像する対応があって、その対応は upper hemi-continuous でなければならないと言うものである。そうすると

$$p^0 \in \phi(p^0)$$

となるような不動点が存在する。ここで $p^0 \in S^\ell$ は価格ベクトルであり、S^ℓ は ℓ 次元の基本シンプレックスであるから、凸でコンパクトな集合である。この不動点の存在を主張する定理と均衡解の存在との関係は $z(p) = x(p) - y(p) - x$ とし

$$z(p) = p - f(p)$$

と置く。$z(p)$は超過需要関数である。$z(p)=0$となるのはpがfの不動点のときに限るからである。ここに競売人の存在を認め、その作用を関数$M_i(p)$を次のような性質を持つ写像とする。

(a) $z_i(p)>0$であれば$M_i(p)>0$

(b) $z(p)=0$であれば$M_i(p)=0$

(c) $z(p)<0$であれば$M_i(p)\leq 0$

とする。ここで$M_i(p)=max[0, k_i z_i(p)]$とすれば調整後の新しい$p_i$は$p_i+M_i(p)\geq 0$となる。その成分が全て1からなるベクトルを$e\in\mathbb{R}^\ell$とし、$p>0$であるのを考慮すれば$[p+M(p)]e>0$となる。ここで

$$T(p)=\frac{p+M(p)}{[p+M(p)]e}$$

とおく。

定義3－1

$x=\Pi x_h$を経済の消費配分と名付け、その集合を$\mathcal{X}$で示す。　△

定義3－2

次の条件が満足される場合、価格ベクトル$p^0\in S^\ell$と配分$[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$は均衡にあると言う。ただし$S^\ell$は$\ell$次元シンプレクスである。

(1) 各$h=1,2,\cdots,H$に対して、$p^0 x_h\leq M_h(p^0, y^0)$を満たす$X_h$に所属する点$x_h$の集合の上で、$x_h{}^0$が$u_h$を最大にする。ただし$M_h=p^0 x_h+\Sigma d_{hf}(p^0 y_f{}^0)$である。

(2) (p^0, Y^0)は利潤配分$\pi=\Pi\pi_f$を最大にする。

(3) $\Sigma x_h{}^0-\Sigma y_f{}^0\leq\bar{x}$

ただし$\bar{x}=\Sigma\bar{x}_h$

(4) $z_i(p)=x_i(p)-y_i(p)-\bar{x}_i$と置けば$z_i(p)\leq 0\ (i=1,2,\cdots,\ell)$となる。　△

定理3－1

仮定1－1～4，2－1～4が満たされていれば、競争経済には均衡が存在する。△

〔証明〕

$p^0=T(p^0)$となって、Tが不動点にある事と、p^0が均衡価格である事が同値であるのを示そう。均衡にあれば定義により$z_i=M_i(p^0)\geq 0$である。$z_i=0$であれば$M_i(p)=0$であって、$p^0=T(p^0)$となる。また$z_i(p^0)<0$の時にはワルラス法則によって$p_i{}^0=0$とな

る。

$$T_i(p^0) = \frac{p_i^0 + M_i(p^0)}{[p^0 + M(p^0)]e} = p_i^0 = 0$$

したがって均衡の場合は $p^0 = T(p^0)$ となって不動点が得られる。

次に不動点であれば均衡点であることを証明する。

写像 T は不動点にあるから $p^0 = T(p^0)$ となっている。すなわち

$$T(p^0) = \frac{p^0 + M(p^0)}{[p^0 + M(p^0)]e} = p^0$$

となっている。この式から

$$\{[p^0 + M(p^0)]e\}\, p^0 = p^0 + M(p^0)$$

$$\{[p^0 + M(p^0)]e\}\, p^0 - p^0 = M(p^0)$$

となる。ここで $\lambda \equiv [p^0 + M(p^0)]e - 1$ と置けば

$$M(p^0) = \lambda p^0$$

である。$M(p^0)$ と $z(p^0)$ の内積をつくり、ワルラス法則を考慮すれば

$$M(p^0)\, z(p^0) = \lambda\, p^0 z(p^0) = 0$$

したがって $M(p^0)\, z(p^0) = 0$ となる。$M(p^0) \geq 0$ であるから、如何なる場合にも上式が成立する為には $z(p^0) = 0$ でなければならない。$z(p^0) > 0$ の場合では $M(p^0) > 0$ となり、上の関係は成立しない。また $z(p^0) < 0$ であれば $M(p^0) = 0$ となるので上式は成立する。従って両方を合わせれば $z(p^0) \leq 0$ となり、これで均衡であることが証明された。□

4．均衡解の存在（生産可能集合が非凸の場合）

ここで生産可能集合を一般化し、企業のうちあるものは収穫逓増の技術を使って生産しているものとしよう。これらの企業は多く生産すればする程生産費が安くなるので、1つでも多く生産し販売しようとする。これらは自動車産業の創生期を始め多くの工業製品に見られる現象であり、自由に競争するのを許せば結局は独占になってしまう。従って多くは公企業であるか、たとえ私企業であっても価格がコントロールされている場合が多い。だから企業は産出量に応じて提案された価格を受け入れるか否かを決定しなければならない。これは1企業のみではなく、全価格体系の中で全ての企業で受け入れられるもので無ければならない。これを価格ベクトル ρ で示すと

$$\rho^f \in \phi_f(\hat{y}_f),\ \rho \in \cap \phi_f(\hat{y}_f) \tag{4-1}$$

を満足していなければならない。ρ^f は企業 f が主観的需要曲線に基づいて予想した価格である。或いは各企業は価格 ρ を知って、その産出量を決めるから $\hat{y}_f = \phi_f^{-1}(\rho_f)$ と表現さ

れるであろう。それが結局全企業について一致しなければならないのを説いたのが（4－1）式の右側のものである。

定義4－1

生産可能ベクトル$\hat{y}_f \in Y_f$は、$\hat{y}_f' > \hat{y}_f$となるような$\hat{y}_f' \in Y_f$が存在しないならば、有効である。また、$\hat{y}_f' \gg \hat{y}_f$となるような$\hat{y}_f$が存在しないならば弱有効である。 △

命題4－1

生産可能ベクトル$\hat{y}_f$は$\hat{y}_f \in \partial Y_f$である場合、その場合に限って弱有効である。ただし$\partial Y_f$は$Y_f$の境界である。 △

〔証明〕

$\hat{y}_f \notin \partial Y_f$であると仮定しよう。そうすると各成分に若干の数量を加えて$\hat{y}_f' \gg \hat{y}_f$, $\hat{y}_f' \in Y_f$とする事ができる。したがって$\hat{y}_f$は有効ではない。したがって$\hat{y}_f$が弱有効である為には$\hat{y}_f \in \partial Y_f$でなければならない。 □

仮定4－1

$\rho \in \cap \phi_f(\hat{y}_f) = \phi(\hat{y})$はupper hemi-continuousで非空、閉、凸の値域を持つ対応である。これを価格形成ルールと名付ける。△

定義4－2

達成可能配分とは次のように決められた配分$\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}}$の集合である。

$\hat{\mathscr{A}}(x) = \{(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{Y}}) \in \Pi X_h \times \Pi Y_f \mid \Sigma x_h - \Sigma y_f \leq \bar{x}\}$ ただしここで$\bar{x}$は経済全体の初期保有量を表している。 △

仮定4－2

初期保有量ϖに対して$\hat{\mathscr{A}}(\bar{x})$は有界である。 △

有限の初期保有量を投入物として使って、無限の産出量を生産するのは如何なる技術を使っても不可能である。仮定4－2はこの事を示している。

仮定4－3

生産可能集合はかならずしも凸ではなく、非凸の場合もありうる。Y_fが非凸の企業は価

格形成ルールを受け入れている。これを$\hat{y}_f \in \hat{Y}_f$で示そう。　△

定義4－3

一般均衡とは下の条件を満足する場合をいう。

（1）各家計に対してx_h^*は$x_h \in X_h$のうち効用関数u_hを最大にするものであって、$\rho^* x_h^* \leq M_h$を満たしている。

（2）ρ^*と$\hat{y}^*$は$\rho^* \in \phi$（$\hat{y}$）となっていて$\rho^* \hat{y}^*$が最大のものとなっている。

（3）$\Sigma x_h^* - \Sigma\ \hat{y}^* \leq \bar{x}$すなわち$z(\partial \hat{Y}_f^*) \leq 0$となっている。　△

定義4－4

写像$f: U \to V$が次の条件（1）、（2）を満たすとき、fは同相写像（homeomorphism）であると言う。

（1）$f: U \to V$は全単射である。

（2）$f: U \to V$も$f^{-1}: V \to U$も連続写像である。　△

命題4－1

$f: \partial \hat{Y}_f \to \rho$とすれば$\partial \hat{Y}_f$は価格ベクトル$\rho \in S^\ell$に対して$f$は同相写像である。したがって$\partial \hat{Y}_\mathrm{f}$に所属する各点は$S_\ell$の中への写像を持つ。△

〔証明〕

仮定4－2により$\partial \hat{Y}_f$はコンパクトである。従って適当なスカラーkを選んで$\partial \hat{Y}_f + \{ke\} \subset \mathbb{R}^{+\ell}$となるようにする事ができる。ここで

$$\psi_f(\rho^f) \equiv \{\lambda \rho^f, \lambda \leq 0\} \cap \{\partial \hat{Y}_f + \{ke\}\}$$

と置く。仮定2－1～4により、この写像は明確、連続であり、各$\rho^f \in S^\ell$に対して$\hat{y}^f + ke = \psi_f(\rho^f)$となるような一義的な点$\hat{y}_f \in \partial \hat{Y}_\mathrm{f}$が定まる。

次に写像$\Psi(\rho^f) = \psi_f(\rho^f) - ke$を考える。これは$S^\ell$から$\partial \hat{Y}_f$の中へのontoで連続な写像である。従って写像$f$は同相写像である。　□

ここで$\hat{Y}_f$が凸集合であるのを全く仮定していないことに注意しておこう。また第3節で均衡解を求めた経済をE-経済とし、次の連立方程式で示そう。ただしE_i（$i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, \ell$）は各財の超過需要関数である。

$$E_1(p_1, p_2, \cdots, p_\ell) = 0$$
$$E_2(p_1, p_2, \cdots, p_\ell) = 0$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$E_\ell\,(p_1, p_2, \cdots, p_\ell) = 0$$

あるいは簡単に

$$E\,(p) = 0$$

で示そう。これに対して、ここで示した凹の生産可能集合を持つ経済の超過需要関数を Z_i で示すことにしよう。

$$Z_1\,(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\ell) = 0$$
$$Z_2\,(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\ell) = 0$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$Z_\ell\,(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\ell) = 0$$

あるいは簡単に

$$Z\,(\rho) = 0$$

で示そう。

ここでホモトピー関数 $\mathscr{H}(\rho, t) : \mathbb{R}^\ell + 1 \to \mathbb{R}^\ell$ を考える。$t \in [0, 1]$はとなるスカラーである。だからホモトピー関数 $\mathscr{H}$は$(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\ell, t)$を$(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\ell)$へ映す写像である。

$$\mathscr{H}(\rho, 0) = T\,(p) \Rightarrow E\,(p) = 0$$
$$\mathscr{H}(\rho, 1) = \mathscr{J}\,(p) \Rightarrow Z\,(\rho) = 0$$

であるとする。ここで$\mathscr{J}$は$\hat{Y}$を生産可能集合として含む経済の価格調整方程式であるとしよう。tが0から1へ変化するに応じて経済は $E\,(p)$から定められた経路を通って $Z\,(\rho)$に到るのである。

ここで$\mathscr{H}$のヤコビアンを$\mathscr{H}'$で表し、ヤコビアンのうちρ_i（$i = 1, 2, \cdots, \ell$）で偏微分した列だけからなる行列を$\mathscr{H}\rho_i{}'$で示す。ここで$\mathscr{H} : \mathbb{R}^\ell + 1 \to \mathbb{R}^\ell$ が連続で微分可能とする。そうすると、ある値$(\rho, t) \in \mathscr{H}^{-1}(\rho, t)$で$\mathscr{H}_\rho{}'(\rho, t)$が可逆であれば、有名な陰関数の定理によれば、$t$の変化とともにできる一義的で連続・微分可能な$(\rho, t)$を通る経路があるのを保証している。命題４－１によって$\partial\hat{Y}_f$とρは同相写像で結ばれているからE経済からZ経済への経路が保証されたのである。第３節で採用した仲介人による価格調整を$\hat{Y}_f$を含む場合にも適用しよう。その場合の価格調整方程式を$\mathscr{J}$としよう。$\partial\hat{Y}_f$に対して価格ベ

クトルρが対応するのが命題4－1によって保証されているので、E経済の場合と全く同じ構造が考えられる。

$$\mathscr{J}(\rho)=\frac{\rho+M(\rho)}{[\rho+M(\rho)]e}$$

となる。$\mathscr{J}$に対する不動点を求めればよい。$\mathscr{J}$の不動点は次の条件を満足するときに得られる。

命題4－2

$\mathscr{J}\in C^2$であり$\mathscr{J}:S^\ell\to\mathbb{R}^\ell$が与えられたとし、$S^\ell$がコンパクトで、非空とする。いくつかの$\rho\in\mathbb{R}^\ell$に対して$\mathscr{H}:S^\ell\times t\to\mathbb{R}^\ell$が正則であり、$0\leq t\leq 1$に対して境界自由（boundary free）であると仮定する。ここで

$$\mathscr{H}(\rho,t)=(1-t)(\rho-p^0)+t(\rho-\mathscr{J}(p))$$

とする。そうすると$\mathscr{J}$に不動点が存在する。　△

〔証明〕

$\mathscr{J}(\rho)$はfが同相写像であるのでTの時と全く同じに扱うことができる。したがて$\mathscr{J}$に不動点があるのが証明された。　□

定理4－1

仮定2－1～4，3－1～4を満足する生産可能集合が凸で無いZ経済に均衡解が存在する。　△

〔証明〕

命題4－2のホモトピー関数の不動点定理により、E-経済の不動点をZ-経済の不動点に導く経路があるのが証明された。したがってZ-経済には均衡解が存在する。　□

5．一般均衡解の存在

以上で生産関数がincreasing returnsである経済にもnon-increasing returnsの経済にも均衡解が存在するのが明らかとなった。それでは両者を含んだ経済全体では果たして会が存在するであるか。ここで重要な役割を果たすのが角谷の第2不動点定理である。よく知られているように第1定理は次のようなものである。

角谷の第1不動点定理

$x\to\Phi(x)$がℓ次元の閉単体Sから$\Phi(S)$の中へのupper hemi-continuousの点対集合写

像であれば、$x_0 \in \Phi(x_0)$となるような$x_0 \in S^\ell$が存在する。　△

角谷の第2不動点定理

KとLがそれぞれユークリッド空間$\mathbb{R}^m$と$\mathbb{R}^n$に所属する有界・閉の凸集合であるとし、$\mathbb{R}^{m+n}$に所属するカルテッシアン積$K \times L$を考察することにする。$\mathbb{P}$と$\mathbb{Q}$は$K \times L$の2つの部分集合であり、任意の$x_0 \in K$に対して、$(x_0, y) \in \mathbb{P}$となるような全てのyに関して、x_0を含む集合$\mathbb{P}_{x0}$が非空・閉かつ凸であり、任意のy_0に対して、$(x, y_0) \in \mathbb{Q}$となるような全ての$x \in K$の集合Q_{y0}は非空・閉で凸であるとする。これらの仮定の下で、$\mathbb{P}$と$\mathbb{Q}$は共通点を持っている。　△

さて前節で論じたようにnon-increasing returnsの生産関数を持つ部門の解集合を$\mathbb{P}$としincreasing returnsの生産関数を持つ部門の解集合を$\mathbb{Q}$とする。そうすると角谷の第2定理によって

$$\mathbb{P} \cap \mathbb{Q} = \varepsilon$$

とすれば、εは両経済の均衡点である。

定理5－1

increasing returnsとnon-increasing returnsの2種類の異なる性質の生産関数を持つ経済には均衡解が存在する。　△

6．結び

大企業では生産関数がincreasing returnsになっている場合が多いと見られる。それ故に大量生産が実施される。国際貿易では国内需要だけでは生産過剰となり、海外の需要に当てるほど、多くの財貨が生産されているのである。これは多く生産すればするほど、平均生産費が安くなるからと考えられる。殆どの経済理論ではconstant returns to scaleの生産関数を使って分析が進められている。数学的に簡単であるメリットは大きいが、そのために現実の大きな部分の分析を放棄している。価格形成ルールとしては限界価格形成方式（marginal pricing)、平均価格形成方式（average pricing)、2部料金制（two-part pricing)、などがある。ここではincreasing returnsの生産関数を含む場合にも、一般均衡解が存在するのを証明して、いささかでも現実の経済現象への理論的接近を試みた積りである。

参考文献

Arrow, K. and F. H. Hahn (1971) *General Competitive Analysis*, San Francisco: Holden-Day.

Berge, C. (1966) *Espsaces Topologiques, Fonctions Mutivoques*, Paris: Dunod.

Brown, D. J. (1991) "Equilibrium Analysis with Non-Convex Technologies," *in Handbook in Mathematical Economics*, *Vol. IV*, W. Hildenbrand and H. Sonnenschein eds., Amsterdam: North Holland, 1963-1996.

Bonnisseau, J.-M., (1988) "On Two Existence Results of Equilibria in Economies with Increasing Returns," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 193-207.

Bonnisseau, J.-M., and B. Cornet (1988) "Existence of Equilibria when Firms follow bounded Losses Pricing Rules," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 119-147.

Bonnisseau, J.-M., and J.-P. Médecin (2001) "Existence of Marginal Pricing Equilibria in Economies with Externalities and Non-convexities," *Journal of Mathematical Economics*, 36, 271-194.

Cornet, B. (1988) "General Equilibrium Theory and Increasing Returns," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 103-118.

——— (1988) "Topological Properties of the Attainable Set in a Non-convex Production Economy," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 275-292.

——— (1989) "Existence of Equilibria in Economies with Increasing Returns," *Contributions to Operation Research of CORE*, Bernart Cornet and Henry Tulkenes, eds., Cambridge, Massachusetts : The MIT Press, 79-97.

Cronin, J. (1964) *Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis*, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.

Dehez, P., and J. Dréze (1988) "Competitive Equilibria with Quantity-Taking Producers and Increasing Returns to Scale," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 209-230.

——— (1988) "Distributive Production Sets and Equilibria with Increasing Returns," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 231-248.

Diefeind, E., and W. Neufeind (1988) "Quantity Guided Price Setting," *Journal of Mathematical Economics*, 17, 249-259.

Eatwell, J., M. Milate, and P. Newman (1989) *General Equilibrium*, New York: W. W. Norton.

Guillemin, V., and A. Pollack (1974) *Differential Topology*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Hart, O. (1985) "Imperfect Competition in General Equilibrium : an overview of recent," *Frontiers of Economics*, K. Arrow and S. Honkapohja eds.,100-169.

Kakutani, S. (1941) "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem," *Duke Mathematical Journal*, 8, 457-59.

Moore, J. C. (1999) *Mathematical Methods for Economic Theory*, vol. 1, Berlin: Springer.

——— (1999) Mathematical Methods for Economic Theory, vol. 2, Berlin: Springer.

Negishi, T. (1961) "Monopolistic Competition and General Equilibrium," *Review of Economic Studies*, 28, 196-201.

Vives, X. (1999) *Oligopoly Pricing - Old Ideas and New Tools*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.