論　文

線形の最適労働所得税

村　田　安　雄
鎌　苅　宏　司

要　約

最適所得税の議論においては、一般的ではあるが数学的煩雑さと概念の恣意性を内包してしまう制約のない非線形の税率表を想定する場合と、あらかじめ税関数のパラメーター数を限定する線形の税率表を想定する場合とがある。本稿では、多くの先進国における所得税制度が累進度を連続的に考えた簡明な線形の税率表を採用している現状を踏まえて、生来的な労働稼得能力は異なるが、同じ効用関数を持つ労働者＝消費者である個人を想定する Mirrlees（1971）以来の伝統に従い、各個人の効用を社会全体で集計した社会的厚生関数を最大化するように政府が最適な税率表を決定する最適線形労働所得税の理論モデルを考察する。

本稿において得られた重要な結果は次の通りである。まず、「最適個人消費は税引き賃金率について非減少」と「余暇は非下級財である」という２つの想定を基礎として、「貨幣の限界効用は賃金率の減少関数」という重要なレンマを Hellwig（1986）に依拠して証明する。さらに、社会的厚生関数が直接効用の集計値である Sheshinski（1972）の最適線形労働所得税モデルでは「労働供給が限界可処分所得率（本稿では純所得率）について非減少関数」とする想定があることから、労働供給曲線の後方屈伸の存在可能性と相矛盾してしまうことになるため、本稿では、社会的厚生関数を間接効用の総和とすることで Sheshinski の想定を不要にし、労働供給曲線後方屈伸のケースを証明することに成功している。また、最適な線形労働所得税率を具体的に導出するために、CES 効用関数を用いたシミュレーション分析を加えている。

キーワード：所得税率表；社会的厚生；間接効用；貨幣の限界効用
経済学文献季報分類番号：02-26；02-33；13-11；13-15

（目　次）

1.　はじめに

所得税率表（income tax schedule）の選択は、所得の再分配を詮索する公平性（equity）と、税制によって引き起こされる歪みを最小にしたい効率性（efficiency）との間のトレード・オフに係わっていて、最適所得税の理論はこのトレード・オフを分析する。その分析において、予め何の制約も置かない非線形の税率表を考える議論と、最初から線形の税率表を想定する議論がある。前者は概念上と数学上のいまわしい程の困難さを伴うのに対して、後者は税関数のパラメーターを一意に決定するという通常の最大化問題に帰着する。

多くの先進国での所得税は、或る所得水準以上について累進的に課税する制度を採っており、その累進度を連続的に考えた形態は線形の税率表になる。現実の税制はこの様な簡明な形で政治的に制定されるであろう。

ところで Mirrlees（1971）以来の最適所得税に関する殆どの文献では、消費者が同時に労働者であって、各人の効用関数の変数は消費と労働供給であると想定されている。この消費者=労働者の効用の全体を社会的厚生と政府がみなして、これを最大化するような所得税率表を探究する。その際に労働者は生来的に異質な稼得能力を持つものと考えられるが、各消費者=労働者は同一の効用関数を持つものと想定される。我われのモデルもこの伝統に従い、上記の理由によって線形の労働所得税の最適なものを本稿で取扱う。この様な線形所得税の最適モデルを最初に論じたのは Sheshinski（1972）である。しかしそこでは労働供給は純所得率について非減少関数であるという想定が置かれていた。この想定は通説的に想定される労働供給曲線の後方屈伸性（backward bending）（村田=鎌苅（2000），§2.6 を参照）と矛盾し、前者は限定的で非現実的である（Hellwig（1986），p.164 参照）。彼の証明では社会的厚生は直接効用の集計とされたが、我われはこれを間接効用の集計と把えることにより、上記の彼の想定を不要にするであろう。

論述の順序として第2節は消費者=労働者の消費者均衡を論じる。ついで個人の消費と余暇に関して常識的な想定が第3節において設定され、それらに基づいて、重要なレンマ「貨幣の限界効用は賃金率の減少関数」が、Hellwig（1986）に依拠して第4節で証明される。そして政府の線形所得税最適化の問題を第5節に明示した後に、第6節において Sheshinski の証明が前述の方式で改修される。そして具体例として、CES 効用関数の場合の消費者均衡値について、想定1と想定2を満たす税率の範囲を第7節で示し、さらに第8節は、簡単な2人社会での最適税率決定の図解を、Ihori（1987）に従って示す。最後に第9節で CES 効用関数の現実的数値例によって、最適な線形所得税率の数値が求められる。

2. 消費者=労働者の消費者均衡

個人に固有な生来の稼得能力を指数 $n(0 \leqq n \leqq \infty)$ で示して、これをその人の賃金率と解釈しよう。その個人の消費を x、労働供給を y と表すことにすると、その人の所得（労働所得の簡略な表現としての）z は、

$$z = ny \tag{1}$$

である。ここに

$$x > 0, \quad 1 > y > 0 \tag{2}$$

として、$1-y$ は余暇（leisure）を表す。各人の効用 u は x と y で定義される関数 $u(x,\ y)$ であって、これらの変数について 2 回連続微分可能で、狭義凹関数であると想定される。（村田 = 鎌苅 (2000), §1.5 を参照。）当然のこととして、消費の限界効用は正値をとり、労働の限界効用は負値をとるものと考える。かくして

$$u_x > 0, \quad u_y < 0 \tag{3}$$

$$u_{xx} < 0, \quad u_{yy} < 0, \quad u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 > 0 \tag{4}$$

が想定されていることになる。ただし u_x や u_{xx} などは添字の変数に関しての u の偏微分係数を表示している。

いま所得税を $\tau(z)$ とすると、個人の予算制約式は、消費が可処分所得に等しいことを示す式である。すなわち

$$x = z - \tau(z) \tag{5}$$

各消費者=労働者はその効用 $u(x,\ y)$ を、(5) 式の制約の下で最大にするように x と y を決めるものと考えられる。この最大化問題を解くためにラグランジュ関数 L をつぎにように定義する。ただしラグランジュ乗数を λ とする。

$$L \equiv u(x,y) - \lambda(x - ny + \tau(ny)) \tag{6}$$

最大化の 1 階条件は下記の通りである。

$$\partial L/\partial x = u_x - \lambda = 0 \tag{7a}$$

$$\partial L/\partial y = u_y + \lambda n - \lambda n \tau' = 0 \tag{7b}$$

ここに τ' は $d\tau/dz$ を表す。(7a) より得られる $\lambda = u_x$ と (5) 式より得られる $(x' \equiv dx/dz)$

$$x' = 1 - \tau' \tag{8}$$

を (7b) 式へ代入すると、

$$u_y + nu_x x' = 0 \tag{9}$$

になる。いま

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial\left(\frac{z}{n}\right)} = \frac{\partial u}{\partial z} n = u_z n \tag{10}$$

を考慮して、

$$s \equiv \frac{-u_y}{n u_x} = \frac{-u_z}{u_x} \tag{11}$$

と置くと、(9) 式は

$$x' = s \qquad \text{または} \qquad dx/dz = -u_z/u_x \tag{12}$$

と書き換えられる。(12) 式では消費の所得に対する限界代替率が表されている（村田＝鎌苅 (2000)，p.8 を参照）。(8) 式を考慮すると、(12) 式から次式が導出される。

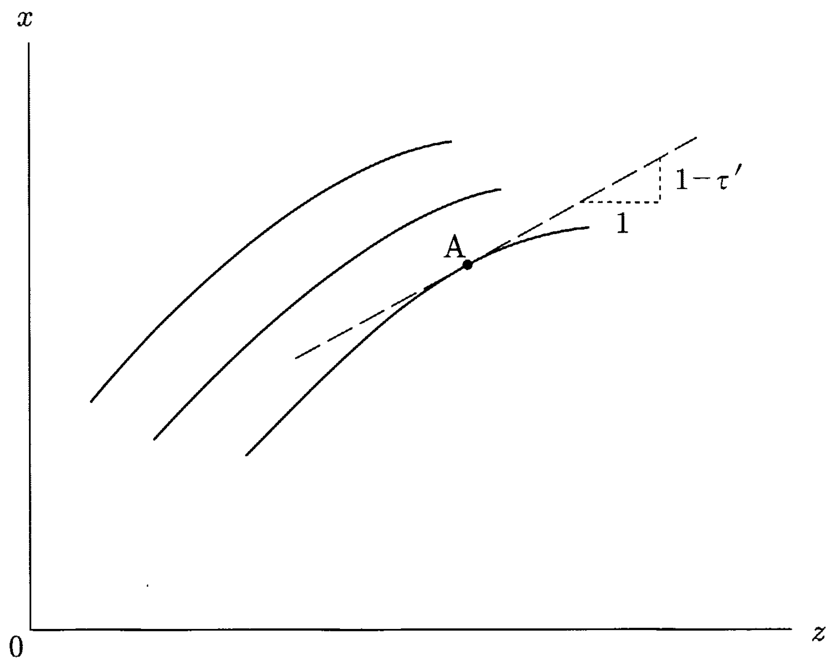
$$1 - \tau' = -u_z/u_x \tag{13}$$

これは上記の限界代替率が「1－限界税率」に等しい状態を示し、消費者＝労働者の消費者均衡の点（図1における A 点）の状態である。図1では消費と所得の無差別曲線群が描かれており、その一つの無差別曲線上の接線の傾きが「1－限界税率」に等しい点を A と記している。$1-\tau'$ は限界可処分所得率であって、これを簡単に純所得率と呼ぼう。

今後は純所得率を β で示す。そうすると限界所得税率 τ' は $1-\beta$ になり、線形の所得税関数はこの時、つぎのように表現される。

$$\tau(z) = -\alpha + (1-\beta)z \tag{14}$$

図1. $(x,\ z)$ **の無差別曲線群と消費者均衡点**



これに対応する個人の予算制約式 (5) は

$$x = \alpha + \beta n y \tag{15}$$

と表される。この式の右辺は基本収入 (α) と税引き所得 (βny) から成り、これがすべて消費されることを (15) 式は意味する。

3.　労働所得税の最適化問題

政府は個人の稼得能力 n や労働時間 y を観察することはできないけれども、n の社会的分布、個人の所得 $z(=ny)$ および効用関数を知っているものとする。一つの所得税率表を与えて、政府は能力 n の人の消費 $x(n)$ と所得 $z(n)$ とを観察することができ、予算制約式 (5) によって、その人の所得税を

$$\tau(z) = z(n) - x(n) \tag{16}$$

と算定できる。

いま n の分布の密度関数を $f(n)$ と記すと、

$$\int_0^\infty f(n)dn = 1 \tag{17}$$

の式が満たされる。

政府が線形の所得税関数 (14) を与えた場合に、能力 n の人に (15) 式の制約の下でその効用を最大化するように $x(n)$ と $y(n)$ を選ばせ、その選ばれたペアを $(\hat{x}(\alpha,\ \beta n),\ \hat{y}(\alpha,\ \beta n))$ と記し、その時の最大効用を $u(\hat{x},\ \hat{y})$ と簡略に書くと、社会的厚生 V はこれらの効用の合計として、つぎのように表現できる。

$$V(\alpha,\ \beta) = \int_0^\infty u(\hat{x}(\alpha,\ \beta n),\ \hat{y}(\alpha,\ \beta n))f(n)dn \tag{18}$$

ところで政府の税収必要額を定数 R とすると、(15) 式と (16) 式を考慮に入れて、政府の予算制約式は、

$$\int_0^\infty \tau(z)f(n)dn = \int_0^\infty (-\alpha + (1-\beta)z(n))\, f(n)dn = R \tag{19}$$

になる。(17) 式を考慮すれば、(19) 式は下記のように書き換えられる。

$$R + \alpha = (1-\beta)\int_0^\infty z(n)f(n)dn \tag{20}$$

ここで個人の最大効用 $u(\hat{x},\ \hat{y})$ を間接効用 v でつぎのように表す。

$$\begin{aligned} v(\beta n\,;\alpha) &\equiv u(\hat{x}(\alpha,\ \beta n),\ \hat{y}(\alpha,\ \beta n)) \\ &\equiv \max_{x,\ y}\{u(x,\ y) \mid x - \beta n y = \alpha\} \end{aligned} \tag{21}$$

したがって、(18) 式は下記のようになる。

$$V(\alpha,\ \beta)=\int_0^{\infty} v(\beta n\,;\,\alpha)f(n)dn \tag{22}$$

かくして政府の最適所得税問題は、(20) 式の制約の下で (22) の $V(\alpha,\ \beta)$ を最大にするような α と β を選定することである。

4. 消費および余暇についての想定

最適な線形所得税に関する命題を以下で確立するのに必要な想定を説明しよう。

〔想定 1〕 最適個人消費 $\hat{x}(\alpha,\ \beta n)$ は税引き賃金率 βn について非減少 $(\partial\hat{x}/\partial(\beta n)\geqq 0)$ であり、個人効用最大化問題が内点解 $(\hat{x}>0,\ \hat{y}>0)$ をもつ点では、$\hat{x}$ は βn について増加する。

予算制約式 (15) によって、この想定は

$$\frac{\partial\hat{x}}{\partial(\beta n)}=\hat{y}+\beta n\frac{\partial\hat{y}}{\partial(\beta n)}\geqq 0 \tag{23}$$

を意味するが、他方でこれは最適所得が賃金率について非減少であることと同等になるのが、次式によって分かる。

$$\frac{\partial(n\hat{y})}{\partial n}=\hat{y}+n\frac{\partial\hat{y}}{\partial(\beta n)}\frac{\partial(\beta n)}{\partial n}\geqq 0 \tag{24}$$

つまり (23) と (24) の両辺の右辺は相等しいのである。

ところで (23) 式において、$\hat{y}$ が正値の場合に $\partial\hat{y}/\partial(\beta n)\leqq 0$ の可能性は許容されそうであるが、その場合に $\partial\hat{x}/\partial(\beta n)>0$ が必ず起こるためには $\partial\hat{y}/\partial(\beta n)\geqq 0$ でなければならない。したがって

$$\frac{\partial(n\hat{y})}{\partial\beta}=n^2\frac{\partial\hat{y}}{\partial(\beta n)}\geqq 0 \tag{25}$$

が想定1の後段で含意されている。

〔想定 2〕 余暇の $1-y$ は非下級財である。言い換えると、労働供給は貨幣所得 α について非増加である。すなわち次式が想定される。

$$\frac{\partial\hat{y}}{\partial\alpha}\leqq 0 \tag{26}$$

以上2想定だけで次節のレンマ（補助定理）と次々節の定理は証明され得る。

5. Hellwig のレンマ

「貨幣の限界効用は賃金率について減少関数である」という命題を Hellwig（1986）が証明した。これは次節の主命題のためのレンマであり、その証明を詳しく解説しよう。

いま税引き賃金率を

$$\omega \equiv \beta n \tag{27}$$

と記すと、(21) の間接効用はつぎのように書き換えられる。

$$v(\omega\,;\alpha) \equiv v(1,\ \omega,\ \alpha) = \max_{x,\ y}\{u(x,\ y)\,|\,x - \omega y = \alpha\} \tag{28}$$

したがって下記のロワの恒等式が成立する（村田＝鎌苅（2000），p.40 を参照)。

$$-\hat{y}(\alpha,\ \omega) = \frac{-v_\omega}{v_\alpha} \tag{29}$$

ここに $v_\alpha(\equiv \partial v/\partial \alpha)$ は貨幣の限界効用を意味する。ゆえに税引き賃金率の限界効用 $v_\omega(\equiv \partial v/\partial \omega)$ は

$$v_\omega(\omega\,;\alpha) = \hat{y}(\alpha,\ \omega)v_\alpha(\omega\,;\alpha) \tag{29$'$}$$

となる。

(29′) 式を α で偏微分した後に、貨幣の限界効用の逓減 $(\partial v_\alpha/\partial \alpha < 0)$ と、想定 2 の (26) 式および $\hat{y} > 0$、$v_\alpha > 0$ を考慮に入れると、

$$\frac{\partial v_\omega}{\partial \alpha} = \hat{y}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}v_\alpha < 0 \tag{30}$$

は明らかである。(30) 式は下記の不等式を成立させる。$\alpha_2 > \alpha_1$ について

$$v_\omega(\omega\,;\alpha_2) < v_\omega(\omega\,;\alpha_1) \tag{31}$$

そして (31) 式は、$\omega_2 > \omega_1$ と $\alpha_2 > \alpha_1$ について

$$v(\omega_2\,;\alpha_2) - v(\omega_1\,;\alpha_2) < v(\omega_2\,;\alpha_1) - v(\omega_1\,;\alpha_1) \tag{31$'$}$$

を成立させる。(31′) 式の項の入れ替えによって、

$$v(\omega_2\,;\alpha_2) - v(\omega_2\,;\alpha_1) < v(\omega_1\,;\alpha_2) - v(\omega_1\,;\alpha_1) \tag{32}$$

が得られる。(32) 式は、$\omega_2 > \omega_1$ について

$$v_\alpha(\omega_2\,;\alpha) < v_\alpha(\omega_1\,;\alpha) \tag{32$'$}$$

の成立を意味する。すなわち

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega} < 0 \tag{33}$$

が成立する。(27) 式を考慮して、(33) 式より、

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial n} = \beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega} < 0 \tag{34}$$

が得られる。かくして当初のレンマは証明された。

6. Sheshinski 証明の改修

労働所得税を最適化する税パラメーターの α と β を探究するのに、Sheshinski（1972）は直接効用の集計としての社会的厚生 (18) 式の $V(\alpha,\ \beta)$ を用いたのに対し、我われは間接効用の集計としての (22) 式の $V(\alpha,\ \beta)$ を最大化する方式を採り、論証の筋道は Sheshinski に従う。

政府の予算制約式 (20) の制約の下に、(22) の社会的厚生 $V(\alpha,\ \beta)$ を最大化するような α と β をそれぞれ α^* と β^* と記そう。この最大化問題の解は、q を (20) の制約のシャドー・プライスとして、

$$\Lambda \equiv \int_0^\infty [v(\beta n\,;\,\alpha) - q(R + \alpha - (1-\beta)ny)]\,f(n)dn \tag{35}$$

の関数を定義して、1 階条件の $\partial\Lambda/\partial\alpha = 0$ と $\partial\Lambda/\partial\beta = 0$ を満たす α と β である。これらをつぎに計算しよう。

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha} = \int_0^\infty \left[v_\alpha - q\left(1 - (1-\beta)n\frac{\partial\hat{y}}{\partial\alpha}\right)\right] f(n)dn = 0$$

ゆえに

$$\int_0^\infty (v_\alpha - q)f(n)dn + q(1-\beta)\int_0^\infty n\frac{\partial\hat{y}}{\partial\alpha}f(n)dn = 0 \tag{36}$$

そして、(27) 式の記号を用いて、

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\beta} = \int_0^\infty \left[nv_\omega - q\left(n\hat{y} - (1-\beta)\frac{\partial(n\hat{y})}{\partial\beta}\right)\right] f(n)dn = 0$$

となる。ここへ (29′) 式を代入すると、

$$\int_0^\infty (v_\alpha - q)n\hat{y}f(n)dn + q(1-\beta)\int_0^\infty \frac{\partial(n\hat{y})}{\partial\beta}f(n)dn = 0 \tag{37}$$

を得る。

想定 1 と想定 2 の下で (36) 式と (37) 式を満たす α と β、つまり α^* と β^* は

$$R + \alpha^* > 0 \tag{38}$$

$$0 < \beta^* < 1 \tag{39}$$

となることを以下に証明する。

最初に、$q > 0$ を観察する。(36) 式と (37) 式から、$q = 0$ が不可能であることは直ちに分かる。つぎに $q < 0$ と仮定すると、(36) 式は第 1 項が正値となり、(26) 式を考慮に入れて、$\beta^* > 1$ とならなければならない。しかし $q < 0$ と $\beta^* > 1$ のときは、(25) 式によって、(37) 式が成立しない。したがって、$q > 0$ である。

また $\beta^* \leqq 0$ ならば誰も労働しない。ゆえに $\beta^* > 0$ は自明である。

いま仮に $\beta^* \geqq 1$ である場合には、(26) 式によって、(36) 式の第 2 項は非負となるので、その

第１項は非正となる。つまり次式である。

$$\int_0^\infty (v_\alpha - q) f(n) dn \leqq 0 \tag{40}$$

(40) 式が

$$\int_0^\infty (v_\alpha - q) n\hat{y} f(n) dn < 0 \tag{41}$$

を成立させることを証明しよう。

［(41) 式の証明］(34) 式を念頭におくと、つぎの２つの場合を考えればよい。

(a)．すべての n について、$v_\alpha - q \leqq 0$ の場合には、$\hat{y} > 0$ を考慮すると、想定１によって、内点解では $\partial(n\hat{y})/\partial n > 0$（一般には非負）であるので、(41) 式は成立する。

(b)．$n_0 > n \geqq 0$ の範囲内の n について $v_\alpha - q > 0$ となって、$n > n_0$ について $v_\alpha - q < 0$ となるような非負の n_0 が存在する場合には、$\hat{y}(n_0)$ を $\hat{y}_0$ と記すと、$\partial(n\hat{y})/\partial n > 0$ を考慮すれば、すべての n について、

$$(v_\alpha - q) n\hat{y} < (v_\alpha - q) n_0 \hat{y}_0 \tag{42}$$

が成り立つ。(42) 式の両辺に $f(n)$ を乗じて、積分すると、(40) 式によって、下式が成り立つ。

$$\int_0^\infty (v_\alpha - q) n\hat{y} f(n) dn < n_0 \hat{y}_0 \int_0^\infty (v_\alpha - q) f(n) dn \leqq 0$$

［証明了］

(37) 式へ (41) 式を代入すると、

$$q(1-\beta^*) \int_0^\infty \frac{\partial(n\hat{y})}{\partial\beta} f(n) dn > 0 \tag{43}$$

が得られる。$1-\beta^* \leqq 0$ を仮定した状態と (25) 式とは (43) 式の成立を不可能にする。かくして、$\beta^* < 1$ でなければならない。

そして政府予算制約式 (20) へ (39) 式を代入して (38) 式が導出される。

最後に、所得 $n\hat{y}$ の純所得率 β についての弾力性（(25) 式によって非負）の最小値を ρ^* と記して、すなわち

$$\rho(n) \equiv \frac{\beta}{n\hat{y}} \frac{\partial(n\hat{y})}{\partial\beta}, \quad \rho^* \equiv \min_n \rho(n) \tag{44}$$

と置いて、

$$\rho^*/(1+\rho^*) < \beta^* < 1 \tag{45}$$

となることを示そう。

(37) 式はつぎのように書き換えられる。

$$\int_0^\infty v_\alpha n\hat{y}f(n)dn + q\int_0^\infty \left[\left(\frac{1-\beta^*}{\beta^*}\right)\rho(n) - 1\right] n\hat{y}f(n)dn = 0 \tag{37'}$$

(37′) 式の第1項は正値をとるので、

$$\left[1-\left(\frac{1-\beta^*}{\beta^*}\right)\rho^*\right]\int_0^\infty n\hat{y}f(n) > \int_0^\infty \left[1-\left(\frac{1-\beta^*}{\beta^*}\right)\rho(n)\right] n\hat{y}f(n)dn > 0$$

を得る。かくして

$$\rho^*(1-\beta^*)/\beta^* < 1$$

となり、これより (45) 式の左辺の不等式が求まる。

7. CES 効用関数の場合の消費者均衡値

Stern（1976）に従って、消費者=労働者の効用関数が下記の CES 関数の場合に消費者均衡値を導出し、想定1と想定2を満たす税率値を求めよう。

$$u(x,\ y) = \left[(1-\gamma)x^{-\eta} + \gamma(1-y)^{-\eta}\right]^{-1/\eta} \qquad (1<\gamma<1,\ \eta>0) \tag{46}$$

この効用を、予算制約式

$$x = \alpha + \beta ny \tag{47}$$

の下に最大化するために、ラグランジュ関数

$$L \equiv u(x,\ y) - \lambda(x - \alpha - \beta ny) \tag{48}$$

の1階条件を求めよう。ただし λ はラグランジュ乗数である。1階条件は下記のようになる。

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = (1-\gamma)x^{-1-\eta}\left[(1-\gamma)x^{-\eta} + \gamma(1-y)^{-\eta}\right]^{-(1+\eta)/\eta} - \lambda \tag{49}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = -\gamma(1-y)^{-1-\eta}\left[(1-\gamma)x^{-\eta} + \gamma(1-y)^{-\eta}\right]^{-(1+\eta)/\eta} + \beta n\lambda \tag{50}$$

(49) 式と (50) 式より λ を消去して、

$$\frac{x}{1-y} = \frac{(\beta n)^\varepsilon}{k} \tag{51}$$

が得られる。ただし (51) 式においては、

$$\varepsilon \equiv 1/(1+\eta), \quad k \equiv [\gamma/(1-\gamma)]^\varepsilon > 0 \tag{52}$$

と置かれた。ε は消費 (x) と余暇 $(1-y)$ の間の代替弾力性を示す（村田＝鎌苅（2000），p.89 を参照。）(47) 式を (51) 式へ代入して整理すると、最適労働供給は

$$y = \frac{1-\alpha k(\beta n)^{-\varepsilon}}{1+k(\beta n)^{1-\varepsilon}} \equiv \hat{y} \tag{53}$$

と求まる。この $\hat{y}$ が想定2を満たすことは

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} = \frac{-k(\beta n)^{-\varepsilon}}{1+k(\beta n)^{1-\varepsilon}} \leqq 0 \tag{54}$$

より分かる。また

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial(\beta n)} = \frac{k(\beta n)^{-\varepsilon}\left[\varepsilon(\alpha(\beta n)^{-1}+1)-(1-\alpha k(\beta n)^{-\varepsilon})\right]}{[1+k(\beta n)^{1-\varepsilon}]^2} \tag{55}$$

となり、$\hat{y} \geqq 0$ のために、(53) 式より、

$$0 < 1 - \alpha k(\beta n)^{-\varepsilon} < 1 \tag{56}$$

が成立する。想定 1 より派生する (25) 式が成り立つには、

$$\varepsilon(\alpha(\beta n)^{-1}+1) \geqq 1 - \alpha k(\beta n)^{-\varepsilon} \tag{57}$$

でなければならない。(56) 式と (57) 式が共に成立する α の値は下記の範囲内に入る。

$$\frac{(\beta n)^{\varepsilon}}{k} > \alpha \geqq \frac{(1-\varepsilon)\beta n}{\varepsilon + k(\beta n)^{1-\varepsilon}} \tag{58}$$

他方、最適消費は (47) 式の y へ (53) 式の $\hat{y}$ を代入して、つぎのように求まる。

$$\hat{x} = \frac{\alpha + \beta n}{1 + k(\beta n)^{1-\varepsilon}} \tag{59}$$

したがって、

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial(\beta n)} = \frac{1 + \varepsilon k(\beta n)^{1-\varepsilon} - (1-\varepsilon)\alpha k(\beta n)^{-\varepsilon}}{[1+k(\beta n)^{1-\varepsilon}]^2} \tag{60}$$

となり、想定 1 によって、これが非負であるためには、α は下記の範囲に在ることになる。

$$\alpha \leqq \frac{\varepsilon k \beta n + (\beta n)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)k} \tag{61}$$

政府は (58) 式と (61) 式を満たす α と β の中で、社会的厚生を最大にするものを選出する。次節では、2 人社会において、この最適な α と β の決定を図解しよう。

8.　2 人社会での最適所得税率決定の図解

Ihori（1987）は図解にて最適所得税率を決定するために、高稼得能力（賃金率 n_1）の人と低稼得能力（賃金率 n_2）の人から成る 2 人社会で、線形の労働所得税率の最適値を決定した。その概要を以下に解説しよう。

$n_1 > n_2$ を想定し、n_i の人の労働供給を y_i を記し、線形所得税関数 (14) によって、この人に課せられる所得税を T_i とすると、それは

$$T_i = -\alpha + (1-\beta)n_i y_i \qquad (i = 1,\ 2) \tag{62}$$

である。政府の所得税収必要額を一人当たりで表したものを R とすると。

$$\begin{aligned} R &= (T_1 + T_2)/2 \\ &= -\alpha + (1-\beta)(n_1 y_1 + n_2 y_2)/2 \end{aligned} \tag{63}$$

が政府の予算制約式である。各人の労働供給は、(62) の税関数に対応する予算制約の下で、共通の効用関数に従って効用最大となるように決められるので、

$$y_i = y(\alpha,\ \beta n_i) \qquad (i=1,\ 2) \tag{64}$$

と表される（(53) の $\hat{y}$ のように）。(64) 式を (63) 式へ代入して、政府予算制約式はつぎのように書き換えられる。

$$\alpha = -R + \frac{1-\beta}{2}[n_1 y(\alpha,\ \beta n_1) + n_2 y(\alpha,\ \beta n_2) \tag{65}$$

この式は β と α の対応関係を表す。$\beta=0$ ならば、$n_1 y_1 = n_2 y_2 = \alpha$ となって、(65) 式での R はゼロになる。ゆえに $R>0$ と想定し、非常に小さな正値の β から出発して、それが次第に大きくなる状態を考える。その時は、限界税率 $(1-\beta)$ は逓減するが、それに伴って所得 $(n_i y_i)$ はしばらく増大して、(65) 式の右辺は漸増するであろう。(65) 式の α を β で微分すると、つぎのようになる。(64) の表記を念頭に置いて、

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{-1}{2}(n_1 y_1 + n_2 y_2) + \frac{1-\beta}{2}(n_1 y_{1\beta} + n_2 y_{2\beta}) + \frac{1-\beta}{2}(n_1 y_{1\alpha} + n_2 y_{2\alpha})\frac{d\alpha}{d\beta} \tag{66}$$

ただし、$y_{i\alpha}$ と $y_{i\beta}$ は下記の偏微分を示す。

$$y_{i\alpha} \equiv \partial y_i/\partial\alpha, \quad y_{i\beta} \equiv \partial y_i/\partial\beta \qquad (i=1,\ 2)$$

(66) 式を $d\alpha/d\beta$ について解いたものは、

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{(1-\beta)(n_1 y_{1\beta} + n_2 y_{2\beta}) - (n_1 y_1 + n_2 y_2)}{2-(1-\beta)(n_1 y_{1\alpha} + n_2 y_{2\alpha})} \tag{67}$$

となる。想定2によって $y_{i\alpha}$ は非正であるので、(67) 式右辺の分母は正値をとり、(25) 式によって、その分子の第1項は非負になるが、その第2項は負値で、β の増大と共に減少する。0と1の間の或る β 値（$\bar{\beta}$ と記す）において、(67) 式右辺の分子はゼロになり、$\bar{\beta}$ より大きな β については、その分子は負値をとり続ける。最後には $\beta=1$ において、(65) 式によって、$\alpha=-R$ となる。かくして (65) 式で表される β と α の関係は、図2での TPF 曲線を描くと考えられる。この曲線は税可能フロンティア（tax possibility frontier、TPF と略記）と名付けられる。

政府は (65) 式の予算制約の下で、つぎの社会的厚生 $V(\alpha,\ \beta)$ を最大化するものとしよう。

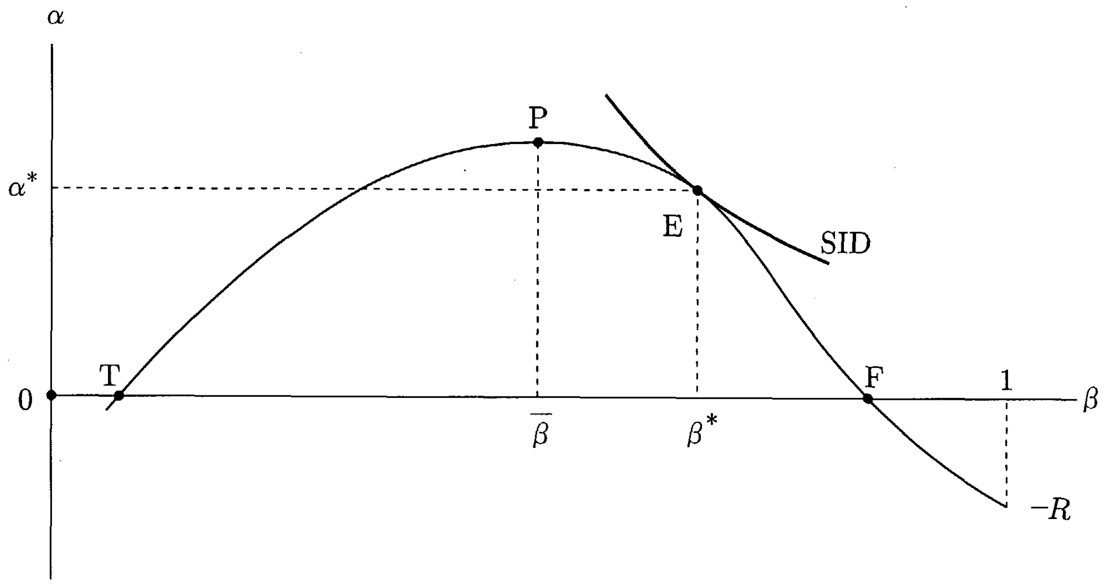
$$V(\alpha,\ \beta) = \frac{v(\beta n_1\,;\,\alpha)^{1-\nu}-1}{1-\nu} + \frac{v(\beta n_2\,;\,\alpha)^{1-\nu}-1}{1-\nu} \qquad (\nu \neq 1,\ \nu \geqq 0) \tag{68}$$

(68) 式の右辺の各項は凹関数であり（村田＝鎌苅（2000），p.4 を参照）、ν が1に近づく極限で、それは自然対数の $\log v$ となる。ここに

$$v_i \equiv v(\beta n_i\,;\,\alpha) \qquad (i=1,\ 2) \tag{69}$$

は n_i の人の間接効用を表す。

図２　税可能フロンティアと社会的無差別曲線の接点



一定値の $V(\alpha,\ \beta)$ を示す曲線を社会的無差別（social indifference, SID と略記）曲線と呼ぼう。その曲線上では、次式が成り立つ。

$$dV = V_\alpha d\alpha + V_\beta d\beta = 0 \tag{70}$$

ここに

$$V_\alpha \equiv \partial V/\partial\alpha = v_{1\alpha}v_1^{-\nu} + v_{2\alpha}v_2^{-\nu} \tag{71}$$

$$V_\beta \equiv \partial V/\partial\beta = v_{1\beta}v_1^{-\nu} + v_{2\beta}v_2^{-\nu} \tag{72}$$

である。ただし

$$v_{i\alpha} \equiv \partial v_i/\partial\alpha, \quad v_{i\beta} \equiv \partial v_i/\partial\beta \quad (i = 1,\ 2) \tag{73}$$

と置く。$v_{i\alpha}$ は貨幣の限界効用で、正値をとる。また (29′) 式を考慮して、$v_{i\beta}$ も正値をとることが分かる。ゆえに V_α と V_β は共に正値をとる。ゆえに (70) 式と (71)・(72) の両式により、次式が得られる。

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{v_{1\beta}v_1^{-\nu} + v_{2\beta}v_2^{-\nu}}{v_{1\alpha}v_1^{-\nu} + v_{2\alpha}v_2^{-\nu}} < 0 \tag{74}$$

(74) 式は SID 曲線が右下がりであることを意味する。また (70) 式から、α または β の上昇は V を増大させることが分かる。かくして、SID 曲線群のうちで、右上方に位置する曲線ほど、より大きな社会的厚生を体現する。

(65) 式の予算制約を満たす TPF 曲線に、出来るだけ大きな社会的厚生を体現する SID 曲線が、図２において右上方から接する点を E 点とすると、この点での α と β が求める最適なものになることは明らかである。

続いて、Ihori（1987）は (74) 式の $d\alpha/d\beta$ の傾きが ν について増大することを証明し、したがって、前記の接点は左上方へ移るので、β^* が減少することを明らかにした。このことは次節での数値例による β^* 値の算出によっても明示されるであろう。

9. 最適所得税率の数値例

線形の労働所得税の最適税率値を、(46) 式の CES 効用関数の場合に、具体的な数値例を用いて、Stern（1976）が算定したものから、現実性の高い例を以下に示そう。

彼の用いた社会的厚生の基準形は

$$V(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{1-\nu}\int_0^\infty u(\hat{x},\ \hat{y})^{1-\nu}f(n)dn \qquad (\nu\neq 1,\ \nu\geqq 0) \tag{75}$$

である。ここに u は (46) 式を表し、$\hat{x}$, $\hat{y}$ は消費者均衡値で、α と βn の関数である。賃金率 n が正値をとるので、$f(n)$ は下記の対数正規密度関数とされる。

$$f(n)=\frac{1}{\sigma n\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\log n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{76}$$

ただし μ と σ は、それぞれ自然対数 $\log n$ の平均値と標準偏差を示す。なお (75) 式は、直接形の効用関数で表されているが、2人社会での厚生基準形の (68) 式を多人数社会へ拡大したものである。

政府の予算制約は、(20) 式において、上記の (76) 式の $f(n)$ を採用したものである。すなわち

$$(1-\beta)\int_0^\infty nyf(n)dn=\alpha+R \tag{77}$$

Stern（1976）は現実的な数値例として

$$\mu=-1.0,\quad \sigma=0.39,\quad \gamma=0.3864,\quad \varepsilon=0.4 \tag{78}$$

と置く。$\mu=-1$ は n が1以下の正値を平均的にとることを意味し、$\varepsilon=0.4$ は消費と余暇の間の代替弾力性を0.4と考えることである。この (78) の数値例を用いて、$\nu=0,\ 2,\ 3$ と $R=0,\ 0.05,\ 0.1$ の9つの組合せについて、最適な純所得率 β の値 (β^*) を求めた結果が表1に示されている。最適な限界税率値は $1-\beta^*$ である。

表1. (78) の数値例による β^* 値

	$\nu=0$	$\nu=2$	$\nu=3$
R=0	0.777	0.523	0.473
R=0.05	0.746	0.460	0.412
R=0.1	0.649	0.395	0.349

表1において明らかなことは、ν 値が上昇する程、また R 値が上昇する程、β^* 値が減少することである。

さらに ε との関連を見るために、それを 0.6 と置く場合、すなわち下記の数値例

$$\mu = -1.0, \quad \sigma = 0.39, \quad \gamma = 0.3864, \quad \varepsilon = 0.6 \tag{79}$$

の場合の β^* 値を表 2 に掲載する。表 1 よりも、1 箇所を除いて、全体として β^* 値は増大（すなわち、最適限界税率値は減少）することが分かる。

表 2. (79) の数値例による β^* 値

	$\nu = 0$	$\nu = 2$	$\nu = 3$
R=0	0.830	0.611	0.562
R=0.05	0.811	0.550	0.499
R=0.1	0.634	0.480	0.429

［謝辞］ 本稿の作成にあたり鎌苅宏司は、大阪学院大学より平成 15 年度研究助成を受けたので、ここに謝意を表します。

参考文献

[1] Hellwig, Martin F. (1986), "The optimal linear income tax revisited," *Journal of Public Economics*, 31, pp.163–179.

[2] Ihori, Toshihiro (1987), "The optimal linear income tax," *Journal of Public Economics*, 34, pp.379–390.

[3] Mirrlees, J.A. (1971), "An exploration in the theory of optimum income taxation," *Review of Economic Studies*, 38, pp.175–208.

[4] 村田安雄，鎌苅宏司 (2000)，『ミクロ経済学から公共経済学へ』八千代出版.

[5] Sheshinski, Eytan (1972), "The optimal linear income-tax," *Review of Economic Studies*, 39, pp.297–302.

[6] Stern, N.H. (1976), "On the specification of models of optimum income taxation," *Journal of Public Economics*, 6, pp.123–162.