論　文

Kalai-Smorodinsky 解の公理化；選択肢集合が有限集合をとりうる場合に関して*

長　久　領　壱
田　中　　　誠

要　約

選択肢の数が有限であるような交渉問題を含んだ定義域上へ Kalai-Smorodinsky 解（Kalai and Smorodinsky（1975））を拡張した対応（多価関数）の解を定義し、その公理化をおこなう。つまりその解が上記の定義域上において連続性、独立性、対称性、不変性、単調性を満たす唯一の解である事を証明する。独立性は、効用空間での Hausdorff の距離ではかつてのものである。独立性は、解が対応である事にあわせて拡張したことを除くと、Nash の定義より弱く、Roth（1977）のそれ同じである。対称性、不変性は Kalai and Smorodinsky のそれと本質的に変わらない。単調性は、解が対応であるために Kalai and Smorodinsky のそれとは大きく異なった定義となっている。しかしこの定義を一価関数の解に適用した場合、この公理はオリジナルの単調性に近い性質を持ったものになる。

キーワード：交渉ゲーム；公理分析；Kalai-Smorodinsky 解；単調性
経済学文献季報分類番号：02-21

1　序論

Nash（1950）の先駆的業績以来、ゲーム理論家達は伝統的に交渉問題の理論に対して、実現可能な効用の組の集合は凸である[1]と仮定したうえで取り組んできた。しかし80年代以降、非凸な実現可能集合上での交渉問題の研究が進み（Kaneko（1980））、とくに Marrioti（1998）は選択肢の数が有限であるような実現可能集合を含む定義域においての Nash 交渉解の公理

* 本稿は Nagahisa and Tanaka（2000）を和訳し、補筆したものである。Social Chice and Welfare のレフェリーと篠塚友一教授のコメントに感謝する。また神戸大学の研究会での発表においての、中西訓嗣助教授、関口格氏、宮原泰之氏、その他の出席者の方々のコメントに感謝する。最後に長久は関西大学からの海外研究助成に対して感謝する。

1）交渉問題のサーベイとしては Thomson（1994）がある。

化をおこなった。長久・田中（2000）（および Nagahisa and Tanaka（2001））はさらにその定義域上でプレイヤーの人数を可変として、公理化を Imai (1983) の解についておこなった。Imai の解は Kalai and Smorodinsky（1975）の交渉解、以後 KS 解と略す、の拡張とみなせる解である。この KS 解は Nash 解と並んで交渉問題の理論における代表的な解であり、この論文の目的は上と同じ定義域上への KS 解の新たな拡張解を定義しかつその公理化を行うことである。

モデルは以下の通りである。プレイヤー達が集まって何らかの交渉がおこなわれるとする。交渉は上手くまとまって何らかの妥結に至るかもしれないが、決裂するかもしれない。可能な妥結はモデルの中では、各プレイヤーが得る効用を要素とするベクトルによって表される。これを選択肢とよぶ。交渉が決裂した場合、プレイヤー達は何も得ない。この時の効用の組を非協力点と呼ぶ。可能な妥結を表す選択肢の集合、実現可能集合と呼ぶ、については選択肢の数がすくなくとも二つ以上であることを仮定する（一方、伝統的な交渉問題の理論は実現可能集合が凸、または comprehensive[2)]であることを仮定していた)。交渉解とは任意の実現可能集合が与えられた時に、その非空部分集合を選び出す写像である。これは交渉結果の予測、もしくは第三者から推奨された交渉結果とみなせる。我々はこの交渉解を多価写像として定義する。それに対して、伝統的な交渉問題の理論では解は一価写像として定義されてきた。この違いは、可能な交渉結果の数が有限な場合、Nash 解や KS 解のような解は一価写像として定義できないためである。この点については Mariotti（1998）を参照されたい。

上記の状況に合わせて、次のような KS 解の拡張を考える。まず原点とイデアルポイント（次節において説明する）を結ぶ線分上で屈折している Leontief 型の無差別曲線を考える。KS 解は任意の実現可能集合 X について、その選択肢 $x \in X$ で原点にもっとも近い無差別曲線に含まれるものすべてを選ぶ。この定義ならば、Kalai and Smorodinsky（1975）が取り扱った二人凸交渉問題においては、オリジナルの KS 解と同じ選択肢を選ぶことになる。我々はこの KS 解が有限な数の選択肢からなる交渉問題を含む定義域上において連続性、独立性、対称性、不変性、そして単調性のすべてを満たす唯一の解であることを証明する（定理1)。対称性と不変性は Kalai and Smorodinsky（1975）におけるそれらと本質的に同じものである。連続性は実現可能集合のわずかな変化は解の選ぶ選択肢を大きく変化させない事を求める公理である。

独立性は、イデアルポイントが同じである二つの実現可能集合について、解が整合的に選

2）集合 X が comprehensive であるとは次のことを意味する。$x \in X$ ならば、$y \leq x$ となる任意の y について $y \in X$ である。

択肢を選ぶことを求める公理である。この論文での独立性は Nash (1950) のオリジナルの定義よりも弱いものであり、Roth (1977) のそれと同じものである（多価写像の解に対応して公理を拡張した上で)。

この論文における最も重要な公理は単調性である。Kalai and Smorodinsky (1975) が示しているように、KS 解の一番の魅力はその単調性にある。我々の単調性は、解が選んだ選択肢の集合において各プレイヤー達が受け取る最低効用の水準により定義される。任意の実現可能集合 Y とその部分集合となっている実現可能集合 X について、解が X から選び出す選択肢の集合の各プレイヤーに関する最低効用の水準は、解が X から選び出す選択肢の集合の各プレイヤーについてのそれを下回る事がない、これが我々の定義する単調性の簡単な説明である。より詳しく述べると次のようになる。イデアルポイントが変わらないまま交渉問題の選択肢が増えたとする。解が選び出す選択肢の集合を各プレイヤーにとっての最低の効用水準で評価して、その最低効用の水準を全プレイヤーについて上回るような選択肢が変化後の実現可能集合に含まれているという意味で改善があったならば、変化後の最低効用水準は全プレイヤーについて改善している、という事を求めているのが単調性である。この単調性は選択肢集合が凸ならば、Kalai-Smorodinsky (1975) の単調性の弱いバリエーションのひとつとなる。定理1の定義域よりも広い、選択肢の数が無限のものまで含めた定義域上においても、KS 解を上記の公理を用いて公理化することができる（定理2)。

非凸な交渉問題を含めた定義域上でのオリジナルの KS 解の公理化をおこなっている文献として Anant, Mukherji, and Basu (1990) と Conley and Wilkie (1991) などがある。それらは Kalai and Smorodinsky (1975) の公理に近いものによってなされている。前者は実現可能集合の上側の境界が連結している事、後者は実現可能集合が comprehensive であることを仮定しており、我々が取り扱う選択肢の数が有限のケースはそれらの仮定を満たさないものである。

Mariotti (1998, 2000) は我々と同様な定義域上で Nash 解の公理化を行っている。前者は Nash (1950) により定義されたものに近い四つの公理を使っている。後者は独立性の代わりに *Maximal Symmetry* と呼ぶ新しい公理を使って公理化を行っている。

この論文の構成は以下の通りである。第2節においてこの論文で使用するさまざまな概念や公理の定義を行う。第3節において定理の証明を行う。第4節は結論である。

数学記号：$\mathbf{R}^n$を n 次元のユークリッド空間、$\mathbf{R}^n_+$、$\mathbf{R}^n_{++}$をそれぞれ $\mathbf{R}^n$の非負象限、正象限とする。任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$について、$x \geq y$ はすべての $i=1,2,\ldots,n$ について $x_i \geq y_i$を、$x \gg y$ はすべての $i=1,2,\ldots,n$ について $x_i > y_i$を、そして $x > y$ は $x \geq y$ かつ $x \neq y$ をそれぞれ

意味しているものとする。

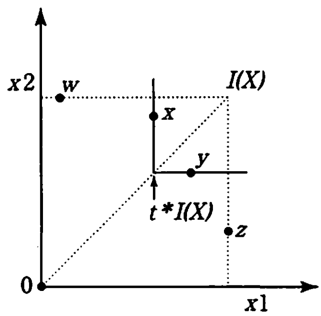
2 記号と定義

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とする。交渉問題とは、$X \subseteq \mathrm{R}^n_+$ で表される実現可能集合と、$d \in \mathrm{R}^n_+$ で表される非協力点の対 (X,d) のことである。話を簡単にするために $d=0 \in \mathrm{R}^n_+$ と仮定して、以下では交渉問題を X だけで表記する。Ξ をつぎのような交渉問題の族とする；$X \in \Xi$ となるのは次の二つの条件が満たされる時、かつその時のみである。(1) $0 \in X$ かつ $X \cap \mathrm{R}^n_{++} \neq \emptyset$。(2) X は少なくとも二つ以上の有限の数の選択肢からなる集合である。X の解釈は、その元（選択肢）一つ一つはプレイヤー達が合意に達した時に彼らが受け取る効用の水準を表しており、合意に達する事がなかった場合、プレイヤー達は非協力点の効用水準、0、を受け取る、というものである。

解 σ はすべての $X \in \Xi$ に対してその非空部分集合 $\sigma(X) \subseteq X$ 指定する多価写像である。この $\sigma(X)$ は交渉の最終結果の候補を集めたものとみなせる。交渉問題 $X \in \Xi$ が与えられた時、任意の $i \in N$ について $I_i(X) \equiv \max\ \{x_i : (x_i, x_{-i}) \in X\}$、そして $I(X) \equiv (I_1(X),\ldots,I_n(X))$ と定義する。この $I(X)$ を X のイデアルポイントと呼ぶ。任意の $X \in \Xi$ と $t \in [0,1]$ について、$X_t \equiv \{x \in X : x \geq tI(X)\}$、そして $t^* \equiv max\ \{t : X_t \neq \emptyset\}$ と定義する。KS 解は σ^{KS} 表す。すると KS 解は次のように定義される。

KS 解：任意の $X \in \Xi$ について、$\sigma^{KS}(X)=X_{t^*}$

これは $[0,I(X)]$ 上で屈折している Leontief 型の無差別曲線を考えて、その最大化を行っているとみなせる。



$X=\{x,y,z,w,0\}$. $\sigma^{KS}(X)=\{x,y\}$

この定義はオリジナルの KS 解の自然な拡張となっている（オリジナルの KS 解は X に対して一点 $t^*I(X)$ を与える一価写像である）。それは、この定義の KS 解が、二人凸交渉問題（Kalai and Smorodinsky（1975）はこのタイプの交渉問題を取り扱った）ではオリジナル

のKS解と同じ選択肢を選び出し、二人以上の交渉問題においても、もし交渉問題がcomprehensiveならばオリジナルのKS解の選ぶ選択肢を含む集合を選び出すからである(Roth(1979)参照)。

以下で我々のKS解を公理化する五つの公理を紹介していく。

連続性:任意の$X \in \Xi$と点列x^nについて、$I(X)=I(X \cup \{x^n\})$であり、さらに$X^n \to x$かつすべてのnについて$x^n \in \sigma(X \cup \{x^n\})$ならば、$x \in \sigma(X \cup \{X\})$である。

連続性は交渉問題の小さな変化によって解の選ぶ選択肢が大きく変化しないことを求めている。より強いバージョンとして次のようなものが考えられる。任意の$X \in \Xi$と、Ξの中に含まれる交渉問題の列X^nで$I(X)=I(X^n)$となるものについて、もしハウスドルフの距離で測って$X^n \to X$となるならば、$\sigma(X^n) \to \sigma(X)$である。この強い連続性はThomson(1994)が紹介している。連続性の他の定義についてはJansen and Tijs(1983)を参照されたい。

独立性:任意の$X, Y \in \Xi$について、$X \subseteq Y \& I(X)=I(Y)$、そして$\sigma(Y) \cap X \neq \emptyset$ならば、$\sigma(X)$この$(Y) \cap$ Xである。

独立性はNash(1950)のもとの定義より弱く、Roth(1977)のそれと同じものである。ただし解が多価写像にあわせて拡張されていることを除く。独立性は交渉問題(Y)がイデアルポイントは変わらないままXへと縮小した時、もし$\sigma(Y)$のうちXに含まれている部分があるのならば、解がその部分をXに関して選び出す事を求めている。

この独立性について次の命題がいえる。

命題　条件(I)は解σが独立性を満たすための必要十分条件である。

(I)任意の$X \in \Xi$と$x \in \mathbf{R}^n_+$について、$x \notin X \& I(X)=I(X \cup \{x\})$となっているとする。

もし$x \notin \sigma(X \cup \{x\})$ならば、$\sigma(X)=\sigma(X \cup \{x\})$であり、

もし$x \in \sigma(X \cup \{x\})$かつ$\{x\} \neq \sigma(X \cup \{x\})$ならば、$\sigma(X) \cup \{x\}=\sigma(X \cup \{x\})$である。

証明　解が独立性を満たすならば条件(I)を満たすことは容易にわかる。解が条件(I)を満たすならば独立性を満たすことを証明する。

$X, Y \in \Xi$ は $X \subseteq Y$ かつ $I(X)=I(Y)$ であるとする。$\sigma(Y) \cap X \neq \emptyset$ と仮定して、$Y_1 \equiv (Y-X)-\sigma(Y)$、$Y_2 \equiv (Y-X) \cap \sigma(Y)$ とする。

$Y_1=\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$、$Y_2=\{y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_s\}$ であったとしよう。

$y_1 \notin \sigma(Y)$ であることと条件(I)から(1)を得る。

(1) $\sigma(Y-\{y_1\})=\sigma(Y)$.

$y_2 \notin \sigma(Y)$ であることと(1)から、$y_2 \notin \sigma(Y-\{y_1\})$ を得る。これと条件(I)より(2)がいえる。

(2) $\sigma(Y-\{y_1, y_2\})=\sigma(Y)$.

このプロセスを r 回繰り返して、(r)を得る。

(r) $\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r\})=\sigma(Y)$.

さて、$y_{r+1} \in \sigma(Y)$ と $\sigma(Y) \cap X \neq < \emptyset$ から、$\{y_{r+1}\} \neq \sigma(Y)$ がいえる。これと(r)は、$y_{r+1} \in \sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r\})$ と $\{y_{r+1}\} \neq \sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r\})$ を意味する。条件(I)により、$\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}\}) \cup \{y_{r+1}\}=\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r\})$ である。よって、$\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}\})=\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r\})-\{y_{r+1}\}$ となる。(r)からこれは次を意味する。

(r+1) $\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}\})=\sigma(Y)-\{y_{r+1}\}$.

このプロセスを $(s-r)$ 回繰り返すと (s) を得る。

(s) $\sigma(Y-\{y_1, \ldots, y_s\})=\sigma(Y)-\{y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_s\}$.

これで証明が完了した。■

この命題は選択肢の数の有限性に依存していることに留意されたい。

独立性は次の公理を含意する。この公理は証明において利用される。

弱独立性：任意の $X \in \Xi$ と $x \in R^n_+$ について、$x \notin X \& I(X)=I(X \cup \{x\})$ ならば $\sigma(X \cup \{x\})-\{x\} \subseteq \sigma(X)$ である。

X と σ が与えられた時、任意の $i \in N$ について

$Min\sigma_i(X) \equiv \min\{x_i : (x_i, x_{-i}) \in \sigma(X)\}$ として、$Min\sigma(X) \equiv (Min\sigma_1(X), \ldots, Min\sigma_n(X))$ を定義する。

単調性：任意の $X, Y \in \Xi$ について、$X \subseteq Y \& I(X)=I(Y)$ であり、さらにある $y \in Y$ があって $Min\sigma(X) < y$ となるならば、$Min\sigma(X) < Min\sigma(Y)$ である。

単調性は任意の交渉問題 X と、イデアルポイントが X と同じであるその拡張 Y について、もし解が X に対して選んだ選択肢の集合における各プレイヤーの最低効用水準を全プレイヤーについて上回ることのできる選択肢が Y の中にあれば、解が Y について選ぶ選択肢の集合の最低効用水準が全プレイヤーについて X のそれをうわまわっていることを求めている。

Kalai and Smorodinsky (1975) が定義した単調性（以下 KS の単調性）は任意の $X, Y \in \Xi$ で $X \subseteq Y \& I_j(X)=I_j(Y)\,(j \neq i)$ となっているものについて、$\sigma_i(X) \leq \sigma_i(X)$ である事を求めている（交渉問題は二人凸、解 σ は一価写像、$\sigma_i(X) := \{x_i : (x_i, x_{-i}) = \sigma(X)\}$）。容易にわかるように、解 σ が多価写像ならば $\sigma_i(X)$ は定義できない。さらに次の例から、選択肢の数が有限の場合、σ^{KS} は KS の単調性を満たさないことがいえる。

例1　$N = \{1,2\}$、$X = \{(0,0),(3,0),(0,3),(1,2)\}$、そして $Y = X \cup \{(1.5, 1.5)\}$ とする。この時、$\sigma^{KS}(X) = \{(1,2)\}$ であるが、$\sigma^{KS}(Y) = \{(1.5, 1.5)\}$ となる。これは KS の単調性に反している。

交渉問題が凸で解が一価写像の場合、単調性は KS の単調性を少し弱めたものを意味する。またその一方、解が一価写像でかつパレートの公理（任意の $x, y \in X$ について $x > y \rightarrow y \notin \sigma(X)$）を満たすなら、KS の単調性は単調性を意味する。このことから我々はこの論文の単調性を KS の単調性のひとつの自然な拡張とみなすものである。

Π を N 上の置換の集合とする。$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ と $\pi \in \Pi$ が与えられた時、$x \circ \pi \equiv (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ と定義する。任意の $X \in \Xi$ が与えられた時、X が対称であるとは、すべての $x \in X$ と $\pi \in \Pi$ について $x \circ \pi \in X$ となっているということである。もし X が対称ならば、当然 $I_1(X) = \ldots = I_n(X)$ となっている。

対称性：任意の $X \in \Xi$ について、もし X が対称ならば、
$x \in \sigma(X) \rightarrow x \circ \pi \in \sigma(X)$ ある。

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{R}^n_{++}$ と $X \in \Xi$、そして $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ が与えられた時、$\alpha x \equiv (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n)$、$\alpha X := \{\alpha_x : x \in X\}$ と定義する。

不変性：任意の $X \in \Xi$ と $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{R}^n_{++}$ について、$x \in \sigma(X) \rightarrow \alpha_x \in \sigma(\alpha X)$ である。

3　定理と証明

まず証明上必要な概念の定義をおこなう。X は対称、Q は X の非空な対称部分集合とする。Θ を X の対称な部分集合の族とする。任意の Q と $i \in N$ について、
$MinQ_i \equiv \min\{x_i : (x_i, x_{-1}) \in Q\}$、そして $MinQ \equiv (MinQ_1, \ldots, MinQ_n)$ と定義する。$Min\Theta \equiv \{MinQ : Q \in \Theta\}$ としよう。Q は対称なのだから、$Min\Theta$ についての順序≤が存在する。よって、以下の条件を満たす有限個の $Q_1, \ldots, Q_k \in \Theta$ を選ぶ事ができる。

(1) $MinQ_1 < MinQ_2 <, \ldots, < MinQ_k$

(2)任意の $Q \in \Theta$ について、$MinQ$ が $MinQ_1$、$MinQ_2$、...、$MinQ_k$のどれかと同じ。

上の条件を満たす $MinQ, MinQ_2, \ldots, MinQ_k$を任意に選んで固定する。この $\{MinQ_1, MinQ_2, \ldots, MinQ_k\}$ を X の階層、$MinQ_i (1 \leq i \leq k)$ を X の i 番目の階層と呼ぶ。

補題1. σ は連続性、弱独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の対称な $X \in \Xi$ について次が成り立つ。

(1) $\{t^* I(X)\} \in \sigma\ (X \cup \{t^* I(X)\})$.

証明　最初に $t^* = 1$のケースを考える。任意の自然数 n について、
$x^n \equiv (1 - \frac{1}{n}) I(X)$ と $X^n \equiv X \cup \{t^* I(X)\} \cup \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ を定義する。X が対称であることと、σ が対称性と単調性を満たすことから、次の二つのうちのどちらかは成立している。

(2)ある数 n^*があって、任意の $n \geq n^*$について $I(X) \in \sigma(X^n)$ となっている。

(3)ある数 n^*があって、任意の $n \geq n^*$について $\sigma(X^n) \subseteq \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ となっている。

もし(2)が成立しているなら、弱独立性から $I(X) \in \sigma(X \cup \{t^* I(X)\})$ がいえる。$t^* = 1$だから補題が成立している。(3)が成立しているとしよう。この時、単調性と弱独立性があるので、任意の $n \geq n^*$について
$x^n \in \sigma(X \cup \{t^* I(X)\} \cup \{x^n\})$ となっている事がわかる。すると連続性から $I(X) \in \sigma(X \cup \{t^* I(X)\})$ となっている事がいえる。よって補題が成立している。

次に $t^* < 1$ であると仮定する。この時、次を証明することができる。

(4)ある点列 $\{x^n\}$ があって、$x^n \to t^* I(X)$ かつ任意の n について $X^n \in \sigma(X) \cup \{x^n\}$ となっている。

証明：$t^* < 1$ であるから、次の条件を満たす十分に小さな $\varepsilon > 0$ をとる事ができる。

(5) $I(X \cup \{(t^* + \varepsilon) I(X)\}) = I(X)$.

まず $x^m \equiv (t^* + (1 - \frac{1}{m})\varepsilon) I(X)$、そして $X^m \equiv X \cup \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$

$(m=1,2,\ldots,)$と定義する。X^{m-1}とX^m $(m=2,\ldots,)$に単調性を適用していくと、十分におおきなmについて、$\sigma(X^m)\subseteq\{x^1,x^2,\ldots,x^m\}$となることがいえる。$x^m$のとり方は任意だから、単調性により$x^m\in\sigma(X^m)$となるように$x^m$をとる事ができる。すると弱独立性により、$x^m\in\sigma(X\cup\{x^m\})$となっていることがいえる。この議論は(5)をみたす十分に小さな任意の$\varepsilon>0$について適用できるから、(4)が証明された。

(4)と連続性から(1)の成立がいえる。■

補題2． σは連続性、弱独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の対称な$X\in\Xi$について次が成立する。

(1) $\sigma(X\cup\{t^*I(X)\})\supseteq\sigma^{KS}(X\cup\{t^*I(X)\})$

証明　$x\in\sigma^{KS}(X\cup\{t^*I(X)\})$を任意に取る。(1)の証明のためには次を証明すればよい。

(2) $x\in\sigma(X\cup\{t^*I(X)\})$.

もし$x=t^*I(X)$ならば、(2)は補題1から直接証明される。よって$x\neq t^*I(X)$であると仮定する。この時もし$t^*=1$ならば、
$\sigma^{KS}(X\cup\{t^*I(X)\})=\{t^*I(X)\}$である。すると(2)は補題1から成立する。次に、$t^*<1$であるとする。$\varepsilon>0$をとって、$B_\varepsilon(X)\equiv\{z\in R^n_+:\|z-x\|\leq\varepsilon\&z>t^*I(X)\}$と定義する。$z$を$B_\varepsilon(X)$の内点で$z\neq x$な点とする。さらに$z^n\equiv(1-\frac{1}{n})z+\frac{1}{n}t^*I(X)$ $(n=1,2,\ldots,)$を定義する。するとある数n^*があって、任意の$n\geq n^*$について$z^n\in B_\varepsilon(x)$となっている。
$X^n\equiv X\cup\{t^*I(X)\}\cup\{x^{n^*},x^{n^*+1},\ldots,x^n\}$と定義しよう。$t^*<1$だから、
$I(X\cup\{t^*I(X)\})=I(X^n)$がいえる。よって任意の$n\geq n^*+1$について単調性を適用することができる。$x\in\sigma^{KS}(X\cup\{t^*I(X)\})$だから、$B_\varepsilon(x)\cap(X\cup\{t^*I(X)\})=\emptyset$となるような$\varepsilon>0$が存在する。だから十分におおきな$n$について、$\sigma(X^n)\subseteq\{x^{n^*},x^{n^*+1},\ldots,x^n\}$であることがいえる。ゆえに$x^\varepsilon\in\sigma(X^n)$となっている$x^\varepsilon\in\{x^{n^*},x^{n^*+1},\ldots,x^n\}$が存在している事がいえる。弱独立性から$x^\varepsilon\in\sigma(X\cup\{t^*I(X)\}\cup\{x^\varepsilon\})$である。$\varepsilon\to0$とすれば、連続性から(1)がいえる。■

補題3． σは連続性、弱独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の対称な$X\in\Xi$について次が成立する。

(1) $\sigma(X)\supseteq\sigma^{KS}(X)$.

証明　補題2より(2)がいえる。

(2) $\sigma(X\cup\{t^*I(X)\})\supseteq\sigma^{KS}(X\cup\{t^*I(X)\})$.

KS解の定義から(3)が成立する。

(3) $\sigma^{KS}(X \cup \{t^*I(X)\}) \supseteq \sigma^{KS}(X)$.

(2)と(3)から(4)を得る。

(4) $\sigma(X \cup \{t^*I(X)\} \supseteq \sigma^{KS}(X)$.

もし $t^*I(X) \in X$ ならば、(1)は(4)からいえる。よって $t^*I(X) \notin X$ だと仮定しよう。弱独立性を(4)に適用すれば、(1)を得る。■

補題4． σ は連続性、弱独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の $X \in \Xi$ について、もし $I_1(X) = \ldots = I_n(X)$ ならば次がいえる。

(1) $\sigma(X) \supseteq \sigma^{KS}(X)$.

証明　$Y \equiv \{x \circ \pi : x \in X, \pi \in \Pi\}$ と定義する。補題3により $\sigma(Y) \supseteq \sigma^{KS}(Y)$ となっている。Y の定義から $\sigma^{KS}(Y) \notin \sigma^{KS}(X)$ がいえる。よって $\sigma(Y) \supseteq \sigma^{KS}(X)$ となる。これに弱独立性を $\#(Y-X)$ 回適用すれば(1)を得る。■

補題5． 連続性、弱独立性、単調性、対称性、そして不変性を満たす解であるとする。この時、任意の $X \in \Xi$ について次が成立する。

(1) $\sigma(X) \supseteq \sigma^{KS}(X)$

証明　$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{R}^n_{++}$ で、$I_1(\alpha X) = \ldots = I_n(\alpha X)$ となるようなものをとる。補題4により $\sigma(\alpha X) \supseteq \sigma^{KS}(\alpha X)$ となっている。$\alpha^{-1} \equiv (\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n})$ と定義すると、σ と σ^{KS} はどちらも不変性を満たすから(1)が成立する。■

系1． σ が連続性、弱独立性、単調性、対称性、そして不変性を満たす解ならば、$\sigma \supseteq \sigma^{KS}$ ある。

補題6． σ は連続性、独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の対称な $X \in \Xi$ について次が成立する。

(1) $\sigma(X) \subseteq \sigma^{KS}(X)$.

証明　最初に $t^* < 1$ のケースを考える。(2)が成立する事を証明していく。

(2)点列 $\{y^1, y^2, \ldots, y^r\} \subseteq (0, t^*I(X))$ があって、
$\sigma(X \cup \{y^1, y^2, \ldots, y^r\}) \subseteq \sigma^{KS}(X) \cup \{y^1, y^2, \ldots, y^{m-1}\}$ かつ $y^1, y^2, \ldots, y^r \notin X$ となっている。

(2)が証明できれば、(2)に独立性を適用することにより、$t^* < 1$ のケースについて(1)を証明する事ができる。

証明:$\sigma(X)$は対称である。よって$\sigma(X)$は次のような階層をなす選択肢からできている。

$MinQ_{k(1)} < MinQ_{k(2)} <, \ldots, < MinQ_{k(m-1)} < MinQ_{k(m)}$、ここで

$1 \leq k(1) < k(2) <, \ldots, < k(m) = k$。補題3から$k(m)=k$となっている。

$y^1, y^2, \ldots, y^{m-1} \in (0, t^* I(X))$で、

$MinQ_{k(m-1)} < y^1 < y^2 < \ldots < y^{m-1} < MinQ_{k(m)}$となっているものをとる。単調性を$m-1$回適用しすれば、補題3と$X$が対称である事から、

$\sigma(X \cup \{y^1, y^2, \ldots y^{m-1}\}) \subseteq \sigma^{KS}(X) \cup \{y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}\}$がいえる。

次に$t^* = 1$のケースを考える。ある$x \in X$があって、

$X \in \sigma(X) \& x \notin \sigma^{KS}(X)$となっているとしよう。

$e^1 = (I_1(X), 0, \ldots, 0), e^2 = (0, I_2(X), 0, \ldots, 0), \ldots, e^n = (0, 0, \ldots, 0, I_n(X))$と定義し、$qI(X)$を$0 < q < 1$かつ$X \cap \{z : z \geq qI(X)\} = \{I(X)\}$であるようにとる。$Y \equiv (X \cup \{e^1, \ldots, e^n\}) - \{I(X)\}$とする。すると

$\sigma(Y) = \sigma^{KS}(Y) = \{qI(X)\} < I(X)$となる。単調性から

$\sigma(Y \cup \{I(X)\}) = \{I(X)\} = \sigma^{KS}(X)$がいえて、独立性から$\sigma(X) \subseteq \sigma^{KS}(X)$を得る。■

補題7. σは連続性、独立性、単調性、そして対称性を満たす解であるとする。この時、任意の$X \in \Xi$について、もし$I_1(X) = \ldots = I_n(X)$ならば次がいえる。

(1) $\sigma(X) \subseteq \sigma^{KS}(X)$.

証明 $Y \equiv \{X \circ \pi : x \in X, \pi \in \Pi\}$と定義する。補題4および6から(2)がいえる。

(2) $\sigma(Y) = \sigma^{KS}(Y)$.

Yの定義から、(3)を得る。

(3) $\emptyset \neq \sigma^{KS}(X) \subseteq \sigma^{KS}(Y)$.

この時、(2)と(3)から$\sigma(Y) \cap X \neq \emptyset$である。よって独立性により(4)を得る。

(4) $\sigma(X) = \sigma(Y) \cap X$.

さらに(2)と(4)から(5)がわかる。

(5) $\sigma(X) = \sigma^{KS}(Y) \cap X$.

Yの定義により(6)がいえる。

(6) $\sigma^{KS}(X) = \sigma^{KS}(Y) \cap X$.

最後に(5)と(6)から、(1)を得る。■

補題8. σは連続性、独立性、単調性、対称性、そして不変性を満たす解であるとする。こ

の時、任意の $X \in \Xi$ について次がいえる。

(1) $\sigma(X) \supseteq \sigma^{KS}(X)$.

証明　$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathrm{R}^n_{++}$ を、$I_1(\alpha X)=\ldots=I_n(\alpha X)$ となるようにとる。補題7から $\sigma(\alpha X) \supseteq \sigma^{KS}(\alpha X)$ である。$\alpha^{-1}=(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n})$ とすると、σ と σ^{KS} が共に不変性を満たすのだから、(1)がいえる。■

定理1． KS 解 σ^{KS} は Ξ 上で連続性、独立性、単調性、対称性、そして不変性を満たす唯一の解である。

証明　KS 解が上の五つの公理を満たすのは明らかである。唯一の解である事は補題5と8からいえる。■

Ξ^* を以下の条件を満たす $X \subseteq \mathrm{R}^n_+$ の族とする。

(1) $0 \in X$ かつ $X \cap \mathrm{R}^n_{++}=\emptyset$.

(2) X において KS 解の選ぶ選択肢が確定できる。

この Ξ^* の定義はこれまでの Ξ 定義よりも緩いものであり、Ξ^* は凸交渉問題をその中に含めることも可能である。よって両者は $\Xi \subseteq \Xi^*$ という関係にある。

定理2で、このより広い定義域 Ξ^* 上での KS 解の公理化をおこなう。

定理2． Ξ は上*の(1)と(2)の条件を満たす定義域であるとする。この時、KS 解 σ^{KS} は Ξ^* 上で連続性、独立性、単調性、対称性、不変性を満たす唯一の解である。

証明　KS 解が五つの公理を満たすことは明白なので、その唯一性を証明していく。

$\sigma \subseteq \sigma^{KS}$：$x \in \sigma(X)$ なのに $x \notin \sigma^{KS}(X)$ であったとしてみよう。σ^{KS} の定義から、この時、ある $z \in \sigma^{KS}$ があって $x \notin X_{r}$ となっているはずである。$Y \in \Xi$ を、$x,z \in Y \subseteq X$、$z \in \sigma^{KS}(Y)$、そして $I(Y)=I(X)$ となっている交渉問題としよう。独立性から、$x \in \sigma(X)$ は $x \in \sigma(Y)$ を意味する事が言える。定理1により $x \in \sigma^{KS}(Y)$ となるが、これは $z \in \sigma^{KS}(Y)$ に反する。

$\sigma^{KS} \subseteq \sigma$：$x \in \sigma^{KS}(X)$ をとる。$Y \in \Xi$ を、$x \in Y \subseteq X$、$I(Y)=I(X)$ なっている交渉問題とする。KS 解は独立性を満たすのだから、$x \in \sigma^{KS}(Y)$ となっている。定理1から $x \in \sigma(Y)$ となるが、これは独立性から $x \in \sigma(X)$ を意味する。よって $\sigma^{KS} \subseteq \sigma$ である。
■

ここで定理1（もしくは2）を Kalai and Smorodinsky（1975）の定理と比べてみたい。

両者はともに対称性と不変性を使っている。連続性と独立性は我々の定理には必要だが、Kala と Smorodinsky のそれには必要ない。その逆に、パレートの公理が Kalai と Smorodinsky の定理には必要だが、我々のものには必要ない。

定理1と2の連続性を次のような弱パレート公理に置き換えると、定理は成立しなくなる。

弱パレート:任意の $X \in \Xi$ と $x, y \in X$ について、$x > y$ ならば $y \notin \sigma(X)$ である。

つぎにのべる解は定理1と2の連続性以外の四つの公理と弱パレートの公理をみたしており、反例になっている。

例2.

$PO(X) \equiv \{x \in X : \sim[\exists\, y \in X : y > x]\}$ とする。任意の $X \in \Xi$ について、解 σ^2を次のように定義する。

$\sigma^2(X) \equiv \sigma^{KS}(X) \cap PO(X)$.

オリジナルの KS 解は Nash (1950) による Nash 解の公理化に使われた独立性への批判を受けて公理化された解である。しかし Roth (1977) は、KS 解もまた Nash の独立性に公理を満たすことを明らかにした。我々の KS 解もまた Roth の議論が、解を多価写像に拡張した点を除いて、そのまま適用できる。

以下の例はこの論文の五つの公理がそれぞれ論理的に独立の関係にあることを示すためのものである。

例3.(連続性) 任意の $X \in \Xi$ について、解 σ^3を次のように定義する。

$\sigma^3(X) \equiv \{t^* I(X)\}$ if $t^* I(X) \in X$

$\equiv \sigma^{KS}(X)$ otherwise.

この解は連続性以外の四つの公理をすべて満たしている。

例4.(独立性) 任意の $X \in \Xi$ について、解 σ^4を次のように定義する。

$\sigma^4(X) \equiv X$ もし X が2点からなるならば

$\equiv \sigma^{KS}(X)$ otherwise.

この解は独立性以外の四つの公理を満たしている。

例5.(単調性) 任意の $X \in \Xi$ について解 σ^5を、$\sigma^5(X) \equiv \{0\}$ と定義する。この解は単調性を除く四つの公理を満たしている。

例6．（対称性）任意の $X \in \Xi$ について解 σ^6を、$\sigma^6(X) \equiv \{x \in X : x_1 \geq y_1\ for\ every\ y \in X\}$ と定義する。この解は対称性をのぞく四つの公理を満たしている。

Example 7．（不変性）任意の $X \in \Xi$ について、解 σ^7を次のように定義する。

$\sigma^7(X) \equiv \sigma^{KS}(X)$ if $I_1(X) = ... = I_n(X)$,

$\equiv \sigma^6(X)$ otherwise.

この解は不変性をのぞく四つの公理を満たしている。

次は定理1から導き出される。

定理3． Ξ（もしくは Ξ^*）上で連続性、独立性、単調性、対称性、不変性、そしてパレートの公理を満たす解は存在しない。

証明　定理1（もしくは2）から明らか。■

4　結論

この論文において示したように、KSの単調性（Kalai and Smorodinsky（1975））は交渉問題が有限の選択肢からなる場合、うまく定義することができない。それゆえに我々はこの論文で新たな単調性を定義したのである。我々としては、この単調性の定義はKalaiとSmorodinskyによる定義とは一見、異なるように見えても、前者は後者の自然な拡張のひとつであると考える。この最低効用水準による単調性の定義によって、オリジナルのKS解の持つそのminimax的な性質に、公理の面からも何らかの光を当てる事ができたのではないかと思う。

序論で触れたImai(1983)の解とこの論文の解との違いについて述べておく。Imaiの解は、交渉における相対的な効用水準で比較して、もっとも恵まれていないプレイヤーから辞書的にその改善をはかるという、Rawls(1971)的な性格を持った解である。そのためにこの論文のKS解とは違いパレートの公理を満たす。しかし辞書的選択のために連続性の公理を満たすことはない。

交渉問題の選択肢の数が有限であるというのは非常に現実的な仮定である。凸性の仮定は期待効用とrandomization devicesの二つの仮定に依存したものであったので、有限性を認めるという事は二つのうちのどちらか（普遍性の公理の存在を考えればrandomaization devices）の不在を認めているとみなせる（Rubinstein et al（1992））。交渉問題の理論と近

接している社会的選択の理論の分野(Arrow (1951, 1963))においては、数多くの成果が定義域に強い構造(凸性、comprehensiveness, etc.)を仮定することなく得られてきた。対して交渉問題の理論においてはこれまで何度も述べてきたように、定義域には強い構造が仮定されてきた。Mariotti (1998,2000) や我々の論文が交渉問題の理論と社会的選択の理論の間の関係の理解の一助となる事を望むものである。

参考文献

長久領壱、田中誠 (2000):「ナッシュ交渉問題における Imai 解の公理化:選択肢集合がコンパクトであり、プレイヤーの数が可変である場合」、経済論集49:353-378、関西大学

Anant, T.C.A., B. Mukherji, and K. Basu(1990) :"Bargaining without convexity: Generalizing the Kalai-Smorodinsky solution", *Econ Letters* 33: 115-119

Arrow, J.K. (1951, 2nd., 1963): Social Choice and Individual Values, John Wiley, New York

Conley, J.P. and S. Wilkie (1991): "The bargaining problem without convexity: Extending the egalitarian and the Kalai-Smorodinsky solutions", *Econ Letters* 36: 365-69

Imai, H. (1983): "Individual monotonicity and lexicographic maxmin solution", *Ecomometrica*: 389-401

Kalai, E. and M.Smorodinsky(1975): "Other solution to Nash's bargaining problem", *Econometrica* 43: 513-518

Kaneko, M. (1980): "An extension of the Nash bargaining problem and the Nash social welfare function", *Theory and Decision* 12: 135-148

Jansen, M.J.M. and S.H.Tijs(1983) : "Continuity of bargaining solutions", *Int J Game Thery* 12: 91-105

Mariotti, M. (1998): "Nash bargaining theory when the number of alternatives can be finite", *Soc Choice Welfare* 15: 413-421

Mariotti, M. (2000): "Maximal symmetry and the Nash solution", *Soc Choice Welfare* 17: 45-53

Nagahisa, R. and M. Tanaka (2000): "An axiomatization of the Kalai-Smorodinsky solution when the feasible sets can be finite", forthcoming in *Soc Choice Welfare*

Nagahisa, R. and M. Tanaka(2001): "An axiomatization of the Imai solution defined on compact bargaining problems with a variable number of players", mimeo

Nash, J.F.(1950): "The bargaining problem", *Econometrica* 18:155-162

Rawls, J. (1971): *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Roth, A.E.(1977): "Independence of irrelevant alternatives, and solitions to Nash's bargaining problem", *J Econ Theory* 16: 247-251

Roth, A.E.(1979): "An impossibility result concerning n-person bargaining games", *Int J Game Theory* 8: 129-132

Rubinstein, A. Z. Safra, and W. Thomson (1992): "On the interpretation of the Nash bargaining solution and its extension to nonexpected utility preferences", *Econometrica* 60: 117-86

Thomson, W. (1994): "Cooperative models of bargaining", in Handbook of Game Theory with Economic Applications Vol.2 ed. by Aumann, R and S. Hart. (North-Holland) : 1238-77.