

弱結託構造をともなう社会における均衡の存在定理

坂 根 宏 一

概 要

本論文では、多数の主体達が n 個のグループに属して行動をとるような社会状況が研究される。主体達は各グループ内部では協力行動をとり、他のグループに対しては非協力行動をとることが仮定される。各結託では結託の利得を最大にするような戦略が、主体達の合意の下で選ばれる。それぞれの結託の内部で、そのメンバーと戦略とのペアを変更しようとするインセンティブが存在せず、さらにそれら n 個の結託がある弱い意味での結託構造をなしているとき、その状態は均衡と呼ばれる。本論文ではその存在が証明される。

キーワード：結託，弱結託構造，社会均衡
 経済学文献季報分類番号：02-21, 02-23

1. 序文

本論文では、多数の主体達が n 個のグループに属して行動をとるような社会状況が研究される。主体達は各グループ内部では協力行動をとり、他のグループに対しては非協力行動をとることが仮定される。我々の目的は、主体達のこのような行動仮説の下で、グループの形成を Nash 均衡概念によって記述することである。

本論文で研究されるモデルでは、それぞれの主体は「戦略集合」(strategy set for an agent) の上で定義される二項関係のグラフによって表される「特性」(characteristic) と同一視される。また、それら主体によって n 個のグループが形成されるものとし、それを「結託」(coalition) と呼ぶことにする。結託の数は、本論文全体を通して任意に n 個に固定される。もし任意の λ 番目の結託に属するメンバーが決定されると、「結託の戦略集合」(alternative set for a coalition) と「利得関数」(payoff function) がそれぞれ特定化される。前者はその結託に属する主体達の戦略集合の集計概念として、後者は結託の戦略集合の要素を評価する実数値関数として定義される。結託 C_λ が与えられたとき、そのメンバーの協調行動として選択される戦略 a_{C_λ} に対して、もし結託 C_λ の一部の主体達によって形成される部分結託 C'_λ によって選択される戦略 $a_{C'_\lambda}$ が、 $(a_{C_\lambda}, C_\lambda)$ の下での利得を改善するものなら、 C'_λ のメンバーは C_λ から離脱して $a_{C'_\lambda}$ を選択する

であろう。このような行動仮説の下、最大利得を保証する結託とその戦略の組合わせ $(a_{c_i}^*, C_i^*)$ が決定される。我々は、それぞれの結託に関するこの最適条件に加えて、以下で述べる n 個の結託間のある整合条件を必要とする。もし n 個の結託が以下の2つの条件 (i) および (ii) を満たすとき、それを弱結託構造 (weak coalition structure) と呼ぶ、

(i) すべての主体がある結託に必ず属する、

(ii) ほとんどすべての主体がただ1つの結託にのみ属することが許される。

この概念は、通常の「結託構造」(coalition structure) もしくは「主体の集合の分割」(partition of the set of agents) よりも一般性を有する概念である。すべての $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について、戦略と結託の組 $(a_{c_i}^*, C_i^*)$ が、最大利得を保証するものであり、さらに C_1^*, \dots, C_n^* が弱結託構造をなすのであれば、状態 $((a_{c_1}^*, C_1^*), \dots, (a_{c_n}^*, C_n^*))$ は「弱結託構造を伴う社会の均衡」(equilibria for the society with a weak coalition structure) と呼ばれる。本論文では、この均衡概念の存在が証明される。

2. モデルの記述

2-1. 結託の空間

K を R^l の非空コンパクト凸部分集合とする。 K の非空閉部分集合のすべての集合を $comp(K)$ と表すことにする。同様に $K \times K$ の非空閉部分集合のすべての集合を $comp(K \times K)$ と表す。 d を $(R^l \times R^l)$ の距離 $d: (R^l \times R^l) \times (R^l \times R^l) \rightarrow R$ として、 $comp(K \times K) \times comp(K \times K)$ 上に以下の2つの関数を定義する、

$$(1) \quad \rho(W, Z) := \sup_{w \in W} \inf_{z \in Z} d(w, z),$$

$$(2) \quad h(W, Z) := \max\{\rho(W, Z), \rho(Z, W)\}.$$

ハウスドルフ距離 h によって定義される $comp(K \times K)$ の位相を $\mathcal{O}^{comp(K \times K)}$ と表すことにすると、 $(comp(K \times K), \mathcal{O}^{comp(K \times K)})$ はコンパクト距離空間になる。(e.g., Theorem 3.71 in Aliprantis and Border (1994, p.111)). $comp(K)$ の要素 X を選択肢集合と呼ぶことにする。選択肢集合 X 上の二項関係 \succsim が以下の条件 (i) および (ii) を満たすとき、それを選好関係と呼ぶ、(i) X 上の \succsim は反射性、完備性および推移性を満たす、(ii) $graph(\succsim) := \{(x, y) \in X \times X | x \succsim y\}$ は閉である。条件 (i) および (ii) を満たすような \succsim について、その $graph(\succsim)$ のすべての集合を I と表す。

$$(3) \quad I := \left\{ graph(\succsim) \in comp(K \times K) \left| \begin{array}{l} X \text{ 上の } \succsim \text{ は反射性、完備性および推移性を満たす,} \\ graph(\succsim) \text{ は } K \times K \text{ の閉集合である} \end{array} \right. \right\}.$$

I の一般要素 $graph(\succsim)$ を i と書いて、それを主体 i と呼ぶことにする。主体の空間 (I, \mathcal{O}^I) は、Hildenbrand (1974, p.96) の Theorem 1 および Aliprantis and Border (1994, p.116) の Theorem 3.79 からコンパクトである。ここで \mathcal{O}^I は $\mathcal{O}^{comp(K \times K)}$ の I への相対化である。 \mathcal{O}^I によって生成

される σ -algebra を \mathcal{C} によって表す. 可測空間 (I, \mathcal{C}) 上の測度を μ とし, 主体に関する測度空間を (I, \mathcal{C}, μ) によって表すことにする. I の非空閉部分集合のすべての集合を $comp(I)$ と書き, その要素を結託 (coalition) と呼ぶことにする.

$$(4) \quad comp(I) := \{C \in \mathcal{C}(I) | C \text{ は } I \text{ の非空閉部分集合}\}.$$

$comp(I)$ 上に $K \times K$ の場合と同様に, 以下の 2 つの関数を定義する.

$$(5) \quad \rho^{comp(I)}(C_\lambda, D_\lambda) := \sup_{i \in C_\lambda} \inf_{j \in D_\lambda} h(i, j),$$

$$(6) \quad h^{comp(I)}(C_\lambda, D_\lambda) := \max\{\rho^{comp(I)}(C_\lambda, D_\lambda), \rho^{comp(I)}(D_\lambda, C_\lambda)\}$$

ハウスドルフ距離 $h^{comp(I)}$ によって定義される $coco(I)$ の位相を $\mathcal{O}^{comp(I)}$ と表すことにする. 空間 $(comp(I), \mathcal{O}^{comp(I)})$ がコンパクトになることは, Aliprantis and Border (1994, p.111) の Theorem 3.71 によって証明される. さらに $comp(I)$ が凸集合であることは明らかである. 我々は n 個の結託が形成されることを仮定しているので, 空間 $comp(I)^n$ を考える必要がある. $comp(I)^n$ の直積位相を $\mathcal{O}^{comp(I)^n}$ で表せば, $(comp(I)^n, \mathcal{O}^{comp(I)^n})$ は明らかにコンパクト凸集合である. 我々は $(comp(I)^n, \mathcal{O}^{comp(I)^n})$ を結託の空間と呼ぶことにする.

$$(D.1) \quad (\text{結託の空間}); (comp(I)^n, \mathcal{O}^{comp(I)^n}).$$

2-2. 弱結託構造と結託構造関数

n 個の結託が以下の条件 (i) および (ii) を満たすとき, 本論文ではそれを弱結託構造 (weak coalition structure) と呼ぶ.

- (i) すべての主体が必ずある結託に属している,
- (ii) ほとんどすべての主体はただ 1 つの結託にのみ属している.

この条件を正確に記述するために, 以下の写像を定義する.

$$(7) \quad \forall \lambda \in \{1, \dots, n\}, \Gamma_\lambda : comp(I) \rightarrow I, \Gamma_\lambda(C_\lambda) = C_\lambda$$

仮に $(C_1, \dots, C_n) \in comp(I)^n$ が条件 $\bigcup_{\lambda=1}^n \Gamma_\lambda(C_\lambda) \supset I$ および $\sum_{\lambda=1}^n \nu(C_\lambda) = \nu(I)$ を満たすならば, $(C_1, \dots, C_n) \in comp(I)^n$ は先に述べた条件 (i) および (ii) を満たす. 弱結託構造の集合を正式に以下の (10) によって定義される \mathfrak{C} で表す.

$$(8) \quad \mathfrak{C} := \left\{ (C_1, \dots, C_n) \in comp(I)^n \mid \bigcup_{\lambda=1}^n \Gamma_\lambda(C_\lambda) \supset I \right\}$$

$$(9) \quad \mathfrak{C} := \left\{ (C_1, \dots, C_n) \in comp(I)^n \mid \begin{array}{l} \forall \lambda \in \{1, \dots, n\}, \\ \mu\left(\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda)\right) = 0 \end{array} \right\}$$

$$(10) \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}$$

(補題 1): \mathfrak{C} は $comp(I)^n$ の非空閉部分集合である.

(証明): (非空性) 自明. (閉性) Γ_λ の上半連続性から明らか. □

この集合 $\dot{\Theta}$ によって, さらに集合 $\{C_\lambda \in \text{comp}(I) | (C_1, \dots, C_n) \in \Theta\}$ を定義できる. これは $C_{-\lambda} := (C_1, \dots, C_{\lambda-1}, C_{\lambda+1}, \dots, C_n)$ によって決定される $\dot{\Theta}$ の切り口 (section determined by $C_{-\lambda}$) である. この集合はすべての $C_{-\lambda} \in \text{comp}(I)^{n-1}$ について定義され得る.

$$(11) \quad E_\lambda : \text{comp}(I)^{n-1} \rightarrow \text{comp}(I), C_{-\lambda} \mapsto \{C_\lambda \in \text{comp}(I) | (C_1, \dots, C_n) \in \dot{\Theta}\}$$

(補題 2): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $E_\lambda : \text{comp}(I)^{n-1} \rightarrow \text{comp}(I)$ は非空コンパクト凸値の連続対応である.

(証明) (非空値性) 任意の $C_{-\lambda} \in \text{comp}(I)^{n-1}$ について, $I \in E_\lambda(C_{-\lambda})$ である. (コンパクト値性) (補題 1) から, $\text{graph}(E_\lambda) = \dot{\Theta}$ はコンパクト集合 $\text{comp}(I)$ の閉部分集合なので明らかである. (凸値性) 任意に $C_{-\lambda} \in \text{comp}(I)^{n-1}$ を固定する. E_λ の定義から, $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cup \Gamma_\lambda(C_\lambda) \supset I$ を満たす任意の $C_\lambda \in \text{comp}(I)$, $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cup \Gamma_\lambda(C'_\lambda) \supset I$ を満たす任意の $C'_\lambda \in \text{comp}(I)$ および任意の $\forall t \in [0, 1]$ について, $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cup \Gamma_\lambda(tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda) \supset I$ が示されればよい. Γ_λ の定義から $\Gamma_\lambda(tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda) = t\Gamma_\lambda(C_\lambda) + (1-t)\Gamma_\lambda(C'_\lambda)$ である. また $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cup (\Gamma_\lambda(C_\lambda) \cap \Gamma_\lambda(C'_\lambda)) \supset I$ が成り立つ. 任意の $t \in [0, 1]$ について, $t\Gamma_\lambda(C_\lambda) \supset t(\Gamma_\lambda(C_\lambda) \cap \Gamma_\lambda(C'_\lambda))$ および $(1-t)\Gamma_\lambda(C'_\lambda) \supset (1-t)(\Gamma_\lambda(C_\lambda) \cap \Gamma_\lambda(C'_\lambda))$ なので, $t\Gamma_\lambda(C_\lambda) + (1-t)\Gamma_\lambda(C'_\lambda) \supset (\Gamma_\lambda(C_\lambda) \cap \Gamma_\lambda(C'_\lambda))$ である. したがって所望の結論を得ることができる. (上半連続性) (補題 1) から $\text{graph}(E_\lambda) = \dot{\Theta}$ はコンパクトであるから明らかである. (下半連続性) 仮に帰結を否定すると, $C_{-\lambda}^k \rightarrow C_{-\lambda}$ としたとき, $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda) \supset I$ を満たすある $C_\lambda \in E_\lambda(C_{-\lambda})$ について, また $C_\lambda^k \rightarrow C_\lambda$ となる任意の $\{C_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ について, $[\forall \bar{k} \in N, \exists k \geq \bar{k}, \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^k) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda^k) \not\supset I]$ である. これは $[\forall \bar{k} \in N, \exists k \geq \bar{k}, \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^k) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda^k) \subset I]$ を意味しているから, 以下の条件 $[\forall \bar{k} \in N, \exists k \geq \bar{k}, \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^k) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda^k) \subset \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda)]$ が成り立つ. これはまた $h^{\text{comp}(I)}(\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^k) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda^k), \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \cap \Gamma_\lambda(C_\lambda)) > 0$ を意味する. $C_{-\lambda}^k \rightarrow C_{-\lambda} \Rightarrow \{h^{\text{comp}(I)}(\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^k), \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta))\} \rightarrow 0$ なので, 実際 $\forall \bar{k} \in N, \exists k \geq \bar{k}, h^{\text{comp}(I)}(\Gamma_\lambda(C_\lambda^k), \Gamma_\lambda(C_\lambda)) > 0$ である. これは Γ_λ の連続性に矛盾する. □

\mathbb{S} を以下のように定義する.

$$(12) \quad \mathbb{S} := \left\{ C_{-\lambda} \in \text{comp}(I)^{n-1} \mid \bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta) \not\supset I \right\}$$

$\nu : \text{comp}(I) \rightarrow R$; $\mu|_{\text{comp}(I)}(C_\lambda) = \nu(C_\lambda)$ と定義し, さらに以下の \bar{e}_λ を定義する.

$$(13) \quad \bar{e}_\lambda : \text{comp}(I)^{n-1} \rightarrow \text{comp}(I), C_{-\lambda} \mapsto \left\{ C_\lambda^* \in E_\lambda(C_{-\lambda}) \mid \nu(C_\lambda^*) = \min_{C_\lambda \in E_\lambda(C_{-\lambda})} \nu(C_\lambda) \right\}.$$

(補題 3): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $\tilde{e}_\lambda : \text{comp}(I)^{n-1} \rightarrow \text{comp}(I)$ には連続選択子 e_λ が存在する.

(証明) $\tilde{e}_\lambda|_S$ は明らかに一価関数であり, Berge の最大値定理より連続性が保証される. $\tilde{e}_\lambda|_S$ は $C_{-\lambda} \mapsto \{C_\lambda \in E_\lambda(C_{-\lambda}) | \nu(C_\lambda) = 0\}$ と同義である. これは E_λ と V の連続性より連続対応である. したがって $[C_{-\lambda}^k \rightarrow C_{-\lambda}] \Rightarrow [f_\lambda(C_{-\lambda}^k) \in \tilde{e}_\lambda|_S(C_{-\lambda}^k) (\forall C_{-\lambda}^k \in \text{comp}(I)^{n-1}), f_\lambda(C_{-\lambda}^k) \rightarrow f_\lambda(C_{-\lambda}) = e_\lambda|_S(C_{-\lambda})]$ を満たす $f_\lambda : S^c \rightarrow \text{comp}(I)$ が存在する. $e_\lambda := \tilde{e}_\lambda|_S \cup f_\lambda$ と定義すれば所望の結論を得ることができる.

以下の議論のために, 関数 $e_\lambda : \text{comp}(I)^{n-1} \rightarrow \text{comp}(I)$ の定義域を $\prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} \text{graph}(\mathcal{X}_\lambda)$ にとることにするが, それは $C_{-\lambda}$ 以外の要素には依存しない. この関数を e_λ^* と書くことにする. e_λ^* は, λ 番目以外のすべての結託メンバーとその戦略とが与えられたときに, その結託メンバーのほとんどすべてが他の結託のいずれかに重複して参加することはない, という性質を持つように λ 番目の結託を与える仕組みである.

(D.2) (λ 番目の結託の結託構造関数); $e_\lambda^* : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} \text{graph}(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow \text{comp}(I)$.

2-3. 結託の戦略集合

はじめに, 各主体に戦略集合を与える対応 $X : I \rightarrow K$ について述べる. それは i にその台集合 (underlying set) を与える対応として定義される. つまり $i := \{(x, y) \in X \times X | x \succ y\}$ と表されているとすれば, $X(i) := X$ として定義されるのである. d' を R^ℓ の距離 $d' : R^\ell \times R^\ell \rightarrow R$ として, $\text{comp}(K)$ 上に関数 $\rho^{\text{comp}(K)}(X, Z) := \sup_{x \in X} \inf_{z \in Z} d(x, z)$ を定義する. さらにハウスドルフ距離 $h^{\text{comp}(K)}(X, Z) := \max\{\rho^{\text{comp}(K)}(X, Z), \rho^{\text{comp}(K)}(Z, X)\}$ を定義すると, $X : I \rightarrow \text{comp}(K)$ は, Debreu (1969) における Theorem (2) によって連続である. それを対応として考えると $X : I \rightarrow K$ は, Aliprantis and Border (1994, p.531) の Theorem 16.16 によって連続である. したがってそれはまた可測対応でもある. $L(I, R^\ell)$ を I から R^ℓ への可測関数のすべての集合とする. $L(I, R^\ell)$ の部分集合 $\{x \in L(I, R^\ell) | x(i) \in X(i)\}$ を \mathcal{L} によって表せば, $\mathcal{X}_\lambda(C_\lambda) := \int_{C_\lambda} X(i) d\mu = \{\int_{C_\lambda} x(i) d\mu \in R^\ell | x \in \mathcal{L}\}$ が定義され得る. 我々は $\mathcal{X}_\lambda : \text{comp}(I) \rightarrow R^\ell, C_\lambda \mapsto \int_{C_\lambda} X(i) d\mu$ を λ 番目の結託についての戦略集合対応と呼ぶことにする.

(D.3) (λ 番目の結託の戦略集合対応); $\mathcal{X}_\lambda : \text{comp}(I) \rightarrow R^\ell, C_\lambda \mapsto \int_{C_\lambda} X(i) d\mu$.

(補題 4): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $\mathcal{X}_\lambda : \text{comp}(I) \rightarrow R^\ell, C_\lambda \mapsto \int_{C_\lambda} X(i) d\mu$ は, 非空コンパクト凸値の連続対応である.

(証明). 坂根 (2000) における (補題 1) によって証明されている. □

2-4. 結託の利得関数

結託に属する主体達の行動仮説についての議論に移ることにしよう。各結託ではそのメンバーに応じて、戦略集合が前節で定義したように $\mathcal{X}_\lambda(C_\lambda) = \int_{C_\lambda} X(i)d\mu$ と定まる。結託とその結託の選択肢集合のペアのすべての集合は、対応 \mathcal{X}_λ のグラフとして以下のように定義される。

$$(14) \quad graph(\mathcal{X}_\lambda) := \{(a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in R^l \times comp(I) | a_{C_\lambda} \in \mathcal{X}_\lambda(C_\lambda)\},$$

すべての $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について、 λ 番目の結託のメンバーが C_λ に固定されたとすると、他の結託の戦略を所与として、そのメンバーの合意の下で戦略集合 $\mathcal{X}_\lambda(C_\lambda)$ からある要素が選択される。 $(a, C) := ((a_{C_1}, C_1), \dots, (a_{C_n}, C_n))$ とすると、結託のメンバーの協調行動によって選ばれる選択肢は、結託の利得関数 $V_\lambda((\cdot, \cdot), (a, C)) : graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R$ によって評価される。

$$(D.4) \text{ (結託の利得関数); } V_\lambda : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R.$$

任意に (a, C) に対して、(λ 番目の要素 (a_λ, C_λ) には依存していない) $V_\lambda((a_{C_1}, C_1'), (a, C)) \geq V_\lambda((a_{C_1}, C_1), (a, C))$ となし得るのならば、 C_λ に属する主体達は C'_λ を形成し、 $a_{C'_\lambda}$ を選択するように行動する、このような行動仮説の下で、利得を最大にするような戦略とそれを選び得るメンバーの組 $(a_{C'_\lambda}, C'_\lambda)$ が決定される。

(補題 5): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について、 $graph(\mathcal{X}_\lambda)$ は $R^l \times coco(I)$ の非空コンパクト凸部分集合である。

(証明): (非空性) (補題 4) による \mathcal{X}_λ の非空値性から明らかである。(コンパクト性) (補題 4) より \mathcal{X}_λ は上半連続コンパクト値対応である。したがって $graph(\mathcal{X}_\lambda)$ は $R^l \times coco(I)$ の閉集合である。さらに \mathcal{X}_λ の像集合 $\mathcal{X}_\lambda(coco(I)) = \bigcup_{C_\lambda \in coco(I)} \mathcal{X}_\lambda(C_\lambda)$ は R^l はコンパクト集合 (e.g., Aliprantis and Border (1994, p.528) Lemma 16.8) であり、 $coco(I)$ のコンパクト性から $\mathcal{X}_\lambda(coco(I)) \times coco(I)$ もまたコンパクトである。 $graph(\mathcal{X}_\lambda) \subset \mathcal{X}_\lambda(coco(I)) \times coco(I)$ から所望の結論を得る。(凸性) はじめに $graph(X) := \{(x(i), i) \in K \times I | x(i) \in X(i)\}$ の凸性を示す。 $i := \{(x, y) \in X \times X | x \succeq y\}$ および $i' := \{(x', y') \in X' \times X' | x' \succeq' y'\}$ とする。さらに任意の $t \in [0, 1]$ について $ti + (1-t)i' := \{(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in (tX + (1-t)X') \times (tX + (1-t)X') | tx + (1-t)x' \succeq_{ti+(1-t)i'} ty + (1-t)y'\}$ とする。 $\succeq_{ti+(1-t)i'}$ は集合 $tX + (1-t)X'$ 上の選好関係である。定義により $X : I \rightarrow K$ は i, i' および $ti + (1-t)i'$ をそれぞれの台集合に送る写像であるから、 $X(i) = X, X(i') = X'$ および $X(ti + (1-t)i') = tX + (1-t)X'$ である。したがって条件 $[\forall i \in I, \forall x(i) \in X(i), \forall i' \in I, \forall y(i') \in X(i'), \forall t \in [0, 1], X(ti + (1-t)i') = tX(i) + (1-t)X(i')]$ が成立する。これは $graph(X)$ の凸性を意味している。さて $graph(\mathcal{X}_\lambda)$ の証明に移る。条件 $[\forall C_\lambda \in coco(I), \forall a_{C_\lambda} \in \int_{C_\lambda} X(i)d\mu, \forall C'_\lambda \in coco(I), \forall a_{C'_\lambda} \in \int_{C'_\lambda} X(i)d\mu, \forall t \in [0, 1], ta_{C_\lambda} + (1-t)a_{C'_\lambda} \in \int_{tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda} X(i)d\mu]$ が示されればよ

い. I の集合 C_λ の特性関数を $\chi_{C_\lambda} : I \rightarrow \{0, 1\}$ とする. 先に示しておいた $graph(X)$ の凸性から任意の $C_\lambda \in coco(I)$, $C'_\lambda \in coco(I)$ および $t \in [0, 1]$ について, $i_t := ti + (1-t)i'$ とすれば, $\chi_{tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda}(i_t)X(i_t) = \chi_{C_\lambda}(i)tX(i) + \chi_{C'_\lambda}(i')(1-t)X(i')$ が成立するから,

$$\begin{aligned} & t \int_{C_\lambda} X(i)d\mu + (1-t) \int_{C'_\lambda} X(i')d\mu \\ &= \int_{C_\lambda} tX(i)d\mu + \int_{C'_\lambda} (1-t)X(i')d\mu \\ &= \int_I \chi_{C_\lambda}(i)tX(i)d\mu + \int_I \chi_{C'_\lambda}(i')(1-t)X(i')d\mu \\ &= \int_I [\chi_{C_\lambda}(i)tX(i) + \chi_{C'_\lambda}(i')(1-t)X(i')]d\mu \\ &= \int_I \chi_{tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda}(i_t)X(i_t)d\mu \\ &= \int_{tC_\lambda + (1-t)C'_\lambda} X(i_t)d\mu. \end{aligned}$$

が導かれ, 所望の結論を得る. □

我々は結託の利得関数について, 以下の仮定を設定する.

(A.1) すべての $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について,

- (i) $\forall (a, C) \in \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda), V_\lambda((\cdot, \cdot), (a, C)) : graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R$ は連続である,
- (ii) $\forall (a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in graph(\mathcal{X}_\lambda), V_\lambda((\cdot, \cdot), (a, C)) : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R$ は連続である,
- (iii) $\forall (a, C) \in \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda), V_\lambda((\cdot, \cdot), (a, C)) : graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R$ は準凹である,
- (iii)' $\forall (a, C) \in \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda), V_\lambda((\cdot, \cdot), (a, C)) : graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow R$ は狭義準凹である.

先にも述べたように, (a, C) を与件として, もし $(a_{C'_\lambda}, C'_\lambda)$ が以下の条件 $V_\lambda((a_{C'_\lambda}, C'_\lambda), (a, C)) \geq V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C))$ を満たすのならば, C_λ に属している主体達は, 結託 C_λ から離脱して新しい結託 C'_λ を形成し $a_{C'_\lambda}$ を選択する. これが結託に属する主体達の行動仮説であった. さらに我々は, 主体達が C_λ から離脱して新しい結託を形成する際には, ある制約が存在するものと仮定する. この制約対応を \mathcal{F}_λ と表し, 以下の仮定を設定する.

(A.2) すべての $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $\mathcal{F}_\lambda : comp(I) \rightarrow comp(I)$ は非空コンパクト凸値の連続対応である.

任意の C_λ に対して, 結託 C_λ から離脱する主体達が形成する結託とその戦略とのペアのすべてを与える対応 \mathcal{G}_λ を \mathcal{F}_λ を用いて, 以下のように定義する,

$$(15) \quad \mathcal{G}_\lambda : comp(I) \rightarrow graph(\mathcal{X}_\lambda), C_\lambda \mapsto \{(a_{D_\lambda}, D_\lambda) \in graph(\mathcal{X}_\lambda) | D_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(C_\lambda)\}$$

(D.5) (達成可能な「結託-選択肢」対応); $\mathcal{G}_\lambda : comp(I) \rightarrow graph(\mathcal{X}_\lambda)$.

(補題 6): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $\mathcal{G}_\lambda : comp(I) \rightarrow graph(\mathcal{X}_\lambda)$ は, 非空コンパクト凸値の連続対応である.

(証明): すべての性質が (補題 4) および仮定 (A.2) から示され得る. □

我々が仮定している主体達の行動仮説によれば, 任意の $(a, C) \in \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda)$ に対して, C_λ の部分結託 C_λ^* によって最大利得

$$(16) \quad V_\lambda^*((a, C)) := \max_{(a_{D_\lambda}, D_\lambda) \in \mathcal{G}_\lambda(a, C)} V_\lambda((a_{D_\lambda}, D_\lambda), (a, C))$$

を保証する選択肢 $a_{C_\lambda}^*$ が選ばれる. 各結託に属する主体達のこの行動は, 以下の対応 α_λ によって記述される.

$$(17) \quad \alpha_\lambda : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow graph(\mathcal{X}_\lambda), \\ (a_{C_\lambda}, C_\lambda) \mapsto \{(a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*) \in graph(\mathcal{X}_\lambda) | V_\lambda^*(a, C) = V_\lambda((a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*), (a, C))\}.$$

(補題 7): 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $\alpha_\lambda : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow graph(\mathcal{X}_\lambda)$ は, 非空コンパクト凸値の上半連続対応である.

(証明): 所望の結論は理論経済学における標準的手法によって得られる. □

3. 弱結託構造をともなう社会

3-1. 弱結託構造をともなう社会における均衡の存在定理

弱結託構造をともなう社会は, 正式に (D.1)~(D.5) のリストによって定義される.

(D.6) (弱結託構造をともなう社会): $(comp(I)^n, \{e_\lambda^*\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{V_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}})$

弱結託構造をともなう社会の均衡とは, n 個の結託が弱結託構造をなしており, それぞれの結託の内部には選択肢を変更しようとするインセンティブが, 存在しないような状態のことをいう.

(D.7) (弱結託構造をともなう社会の均衡); 弱結託構造をともなう社会 $(coco(I)^n, \{e_\lambda^*\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{V_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}})$ の均衡とは, 以下の条件 (i) および (ii) を満たす $((a_{C_1}^*, C_1^*), \dots, (a_{C_n}^*, C_n^*)) \in \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda)$ のことである,

$$(i) \quad \forall \lambda \in \{1, \dots, n\}, V_\lambda(a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*) = \max_{(a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in \mathcal{G}_\lambda(a^*, C^*)} V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a^*, C^*)),$$

$$(ii) \quad (C_1^*, \dots, C_n^*) \in \mathcal{S}.$$

(定理): 仮定 (A.1)(i),(ii),(iii) および (A.2) の下, 社会 $(coco(I)^n, \{e_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{V_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}}, \{\mathcal{G}_\lambda\}_{\lambda \in \{1, \dots, n\}})$ には均衡が存在する.

(証明): 対応 α および β を以下のように定義する.

$$(18) \quad \alpha : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda), (a, C) \mapsto \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} \alpha_\lambda(a, C)$$

$\beta : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda), (a, C) \mapsto \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} (\mathcal{X}_\lambda(e_\lambda^*(C_{-\lambda})) \times \{C_\lambda\})$
 $\prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda)$ は, (補題 5) より非空コンパクト凸集合である. α および β は非空コンパクト凸値の上半連続対応である. したがって角谷の不動点定理により $((a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*), \dots, (a_{C_n}^*, C_n^*)) \in \alpha(\beta((a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*), \dots, (a_{C_n}^*, C_n^*)))$ となるような点が存在する. $((a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*), \dots, (a_{C_n}^*, C_n^*))$ は対応 α の定義によって (D.7) における条件 (i) を満たす. またすべての $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $e_\lambda^*(C_{-\lambda}^*)$ は $\bigcup_{\eta \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\lambda\}} \Gamma_\eta(C_\eta^*) \cup_\lambda \Gamma_\lambda(C_\lambda^*) \cap I$ を満たす最小の結託 $\Gamma_\lambda(C_\lambda^*)$ を与えるものである. したがって

$$(19) \quad \pi : \prod_{\lambda \in \{1, \dots, n\}} graph(\mathcal{X}_\lambda) \rightarrow comp(I)^n, (a, C) \mapsto (C_1, \dots, C_n).$$

と定義したとき, $\pi(a^*, C^*) = (C_1^*, \dots, C_n^*) \in \mathring{C}$ である. さらに $\pi(a^*, C^*) = (C_1^*, \dots, C_n^*) \in \mathring{C}$ も成立する. したがって $(C_1^*, \dots, C_n^*) \in \mathring{C} \cap \mathring{C}$ であり, (D.7) における条件 (ii) を満たす. \square

3-2. 弱結託構造をともなう社会における均衡の個人合理性

前節において, 弱結託構造をともなう社会における均衡の存在が証明された. この説では, その均衡の性質について議論する. 我々のモデルでは, 結託の利得を最大化する選択肢とその結託のメンバーとが決定されるが, そうした集団的行動が個人的にも合理的な行動となり得るための整合性を求めたいのである. この問題に対しては, 以下の追加的な仮定が必要となる.

(A.3) 任意の $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ について, $a_{C_\lambda} = \int_{C_\lambda} x(i) d\mu$ を満たすようなすべての $(a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in graph(\mathcal{X}_\lambda)$ および $x \in \mathcal{L}$ について, $V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C)) \geq \int_{C_\lambda} u(i, x(i), (a, C)) d\mu$ である.

ここで $u(\cdot, x(\cdot), (a, C)) : I \rightarrow R$ は u を表現する可測利得関数である. $V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C))$ は, 当然 C_λ に属する主体達に譲渡される. C_λ の各主体に譲渡される利得は $V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C)) = \int_{C_\lambda} v_{C_\lambda}(i, a_{C_\lambda}) d\mu$ を満たすような可測関数 $v_{C_\lambda}(\cdot, a_{C_\lambda}, (a, C)) : I \rightarrow R$ であり, 譲渡可能利得関数 (transferable payoff function) と呼ぶことにする. $((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C))$ に対して, 譲渡可能利得関数のすべての集合を以下のように定義する.

$$(20) \quad \mathcal{F}_\lambda(a, C) := \left\{ v_{C_\lambda}(\cdot, a, C) \in L(I, R) \mid V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a, C)) = \int_{C_\lambda} v_{C_\lambda}(i, a_{C_\lambda}, (a, C)) d\mu \right\}.$$

さらに a_{C_λ} は, C_λ のメンバーに割り当てられるものと仮定する. それは任意の $(a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in graph(\mathcal{X}_\lambda)$ に対して, 条件 $a_{C_\lambda} = \int_{C_\lambda} x_{C_\lambda}(i) d\mu$ を満たす可測関数として定義される.

$$(21) \quad \mathcal{X}_\lambda(a, C) := \left\{ x_{C_\lambda} \in \mathcal{L} \mid a_{C_\lambda} = \int_{C_\lambda} x_{C_\lambda}(i) d\mu \right\}.$$

均衡の定義と仮定(A.2)により, 任意の $(a_{C_\lambda}, C_\lambda) \in \mathcal{G}_\lambda(e_\lambda^*(a^*, C^*))$ に対して, 以下が成り立つ.

$$(22) \quad V_\lambda((a_{C_\lambda}^*, C_\lambda^*), (a^*, C^*)) \geq V_\lambda((a_{C_\lambda}, C_\lambda), (a^*, C^*)) \geq \int_{C_\lambda} u(i, x_{C_\lambda}(i), (a^*, C^*)) d\mu$$

したがって次の条件を満たす $v_{C_\lambda}(\cdot, a_{C_\lambda}^*, (a^*, C^*)) \in \mathcal{F}_\lambda(a^*, C^*)$ と $x^* \in \mathcal{X}_\lambda(a^*, C^*)$ が存在する,

$$(23) \quad v_{C_\lambda}(i, a_{C_\lambda}^*, (a^*, C^*)) \geq u(i, x^*(i), (a^*, C^*)) \text{ a.e. in } C_\lambda^*.$$

これらのことから均衡において $v_{C_\lambda}(\cdot, a_{C_\lambda}^*, (a^*, C^*))$ および x^* が選ばれるとすれば, C_λ^* の主体達が協調して $a_{C_\lambda}^*$ を選択するという集団の行動は, 個人的にも合理的であるといえる. ただし我々は (a^*, C^*) に対して条件(23)を満たすような $\mathcal{F}_\lambda(a^*, C^*)$ と $\mathcal{X}_\lambda(a^*, C^*)$ の要素は, $v_{C_\lambda}(\cdot, a_{C_\lambda}^*, (a^*, C^*))$ と x^* 以外にも存在することに注意すべきである

参考文献

- Aliprantis, C. and Border, K. (1994): *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide 2nd Edition*, Springer-Verlag.
- Debreu, G. (1969): "Neighboring Economic Agents," *La Décision*, C.N.R.S. 85-90. Reprinted as Chapter 13 in G. Debreu, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- 坂根 宏一 (2000): 『連続濃度の主体をともなう結託形成ゲームにおける Nash 均衡の存在証明について (The Existence Proof of an Equilibrium for a Coalition Formation Game)』 関西大学経済論集 50(2), 91-99.