論　文

ロジスティック回帰モデルでの条件付き参照集合の要素数の近似計算法

松　尾　精　彦

Abstract

ロジスティック回帰モデルについての統計的推測を行う場合，得られた十分統計量の値で条件付けることにより未知パラメータの値に依存しない正確なアプローチが可能になる。しかしながら，同じ十分統計量の値を共有する観測の組み合わせ数が大きすぎると取り扱いが困難になる。この論文では，得られた観測と同じ十分統計量を持つ観測の集合（条件付き参照集合）の要素数を正確に数えるための効率的なフォートランプログラムを紹介する。またこの要素数の近似計算を行うための方法を提案する。近似法が良好であることを，河合（1997）に集められているデータを使って，実証する。

1　紹　介

この論文では，二つのパラメータ（一つは定数項に対応し，もう一つは唯一の説明変数に対応する）を持つロジスティック回帰モデルの妥当性（適合度）を，十分統計量の値で条件付けて検討（検定）する場面を考える。この時，私たちは条件付き参照集合上の確率分布を考えることになる。ただしその分布について調べることは，対数線形モデルの場合に比べ，はるかに難しい。私はこの論文で，集合の要素数を正確に数え上げるためのフォートランプログラムを紹介すると共に，近似計算を有効に行うための方法を提案する。要素数がどれくらいあるかを手早く計算できれば，どういう解析手法（近似理論あるいは正確法）を用いることができるかを素早く決定できるのである。この章の残りの部分でモデルやデータセットについての基礎的な説明を行い，２章では正確に数え上げるためのアルゴリズムの説明，３章では近似計算の方法を提案する。

1.1　離散指数型分布族

二値反応データに対するロジスティック回帰モデルや分割表データに対する対数線形モデルでは，未知パラメータに対する十分統計量が存在する。それゆえその十分統計量の値で条件付けることにより，対応するパラメータの値に依存しない推測を，条件付き参照集合の数え上げにより行うことができる。

＊ Keywords : exact enumeration ; normal approximation

この事実は，両モデルが指数型分布族であること，そして離散データのモデルであることに起因している。全体の見通しをよくするために，まず指数型分布族についての説明から始めよう。なお，測度空間の枠組みでより一般的に，より厳密に述べている教科書に Lehmann (1959) があるが，ここではアウトラインのみを説明することにし厳密な扱いはしない。さて，確率変数 Y_1，Y_2，…，Y_n の同時密度関数が，

$$f_\mu(y) = \exp[\sum_{i=1}^{p} \mu_i T_i(y) \ + \ D(\mu) \ + \ S(y) \ ] \tag{1}$$

の形に表わされるとき，$\{f_u,\ \mu \in \Omega\}$ は指数型分布族であるという。なお，$D(\mu)$，$S(y)$ と $T_i(y)$ は既知関数であり，$D(\mu)$ は y に依存せず，$S(y)$ と $T_i(y)$ は μ に依存しないものとする。また，特に断らない限り添え字を伴わない y，μ は $y=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$，$\mu=\{\mu_1,\ \cdots,\ \mu_p\}$ を意味するものとする。いま μ_1，…，μ_p を２つのグループ $\{\mu_1,\ \cdots,\ \mu_q\}$，$\{\mu_{q+1},\ \cdots,\ \mu_p\}$ に分けよう。そして，後者のパラメータについての推測を行うことにする。このとき，μ_1，…，μ_q に対応する十分統計量 $T_1(y)$，…，$T_q(y)$ の値で条件付けることにより，μ_1，…，μ_q の値（未知）に依存しない分布が得られる。Y_1，Y_2，…，Y_n が離散確率変数であるとして説明をするが，連続の場合でも同様である（総和の記号を積分記号で置き換ればよい）。y_{obs} を観測ベクトルとし，$t_{i,obs} = T_i(y_{obs})$；$i=1$，…，p と書き，条件付き参照集合を

$$\mathcal{T}_{obs} \ = \ \{ \ y \ : \ T_1(y) = t_{1,obs} \ , \cdots , T_q(y) = t_{q,obs} \ \} \tag{2}$$

で定義すると，$T_1(Y) = t_{1,obs}$，…，$T_q(Y) = t_{q,obs}$ で条件付けた Y の確率分布関数は，任意の $y \in T_{obs}$ に対し，

$$\begin{aligned} \Pr{}_\mu\{ \ Y = y \mid \mathcal{T}_{obs}\} \ &= \frac{\exp[\sum_{i=1}^{p} \mu_i T_i(y) + D(\mu) + S(y) \ ]}{\sum_{y \in \mathcal{T}_{obs}} \exp[\sum_{i=1}^{p} \mu_i T_i(y) + D(\mu) + S(y) \ ]} \\ &= \frac{\exp[\sum_{i=q+1}^{p} \mu_i T_i(y) \ + \ S(y) \ ]}{\sum_{y \in \mathcal{T}_{obs}} \exp[\sum_{i=q+1}^{p} \mu_i T_i(y) \ + \ S(y) \ ]} \end{aligned} \tag{3}$$

となり，μ_1，…，μ_q の値に全く依存しない。

この理論は，その華麗さから，少なくとも大学院レベルの教科書では必ず取り上げられている。しかし，実用に移すとなると厄介な問題がありその利用は限定的であった。離散モデルに限って言うと，２つの理由が考えられる。一つは条件付き検定の際に検出力が下がるのではないかという疑念であり，もう一つは実際の計算量の問題である。検出力については，様々な論争があったが，これについては Mehta and Hilton (1993) 等の研究成果から誤解であることが示されつつある。このことについては，Agresti (1992) にかなりの文献録がある。つぎに計算量についてだが，これは完全に解決されたわけではない。なぜなら条件付き参照集合の要素数は組み合わせにより決定される

が，データ数が少しでも多くなると組み合わせ数が爆発的に大きくなり，とても扱いきれない場面が多くなるからである。しかし昨今のコンピュータ環境の飛躍的な進展により，また Mehta and Patel (1983) で紹介されたネットワークアルゴリズムを始めとするプログラム開発により，条件付き推測の適用範囲は次第に広がりつつあるのも事実である。

私たちは $\mu_{q+1}=\cdots=\mu_p=0$ に対応するモデルの妥当性（適合度）を調べる際に，条件付き参照集合（2）上の分布をもとにして考えてゆくのである。次の2つの節1.2，1.3で具体的な例を与えよう。

1.2 対数線形モデル

この節では，数え上げによる正確な推測を行うことが比較的容易な，対数線形モデルについて説明する。このモデルとの比較をしながら，ロジスティック回帰モデルについて議論して行く。説明を簡単にするために，扱いやすくまた最も一般的な $r\times c$（2次元）分割表に対する対数線形モデルを考えよう。確率モデルの与え方にはいくつかあるが（例えば柳川（1986）を参照されたい）結果として得られる条件付き推測は同じなので，最も説明しやすいポアソンモデルを考えることにする。つまり，各セルの度数 Y_{ij}，$i=1,\cdots,r$；$j=1,\cdots,c$ は期待値 $\mu_{ij}=\exp[\alpha_i\beta_j]$ のポアソン分布に従っていると仮定する。このとき，Y_{ij}，$i=1,\cdots,r$；$j=1,\cdots,c$ の同時確率分布は，

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta}(y) &= \prod_{i,j}\frac{\exp[y_{ij}(\alpha_i+\beta_j)]}{y_{ij}!}\,e^{-\exp[\alpha_i+\beta_j]} \\ &= \frac{\exp\{\sum_i \alpha_i y_{i\cdot}+\sum_j \beta_j y_{\cdot j}\}}{\prod_{i,j} y_{ij}!}\,e^{-\sum_{i,j}\exp[\alpha_i+\beta_j]} \end{aligned} \tag{4}$$

となり，指数型分布族となる。ただし，$y_{i.}=\sum_{j=1}^{c} y_{ij}$，$y_{.j}=\sum_{i=1}^{r} y_{ij}$ とする。このモデルの妥当性（適合度）を調べる際の条件付き参照集合は行および列の周辺和が観測値のそれに一致する表全体，

$$\mathcal{T}_{obs} \;=\; \{y \mid y_{i\cdot}=y_{i\cdot,obs}\;; i=1,\cdots,r\;,\; y_{\cdot j}=y_{\cdot j,obs}\;;\; j=1,\cdots,c\;\} \tag{5}$$

となり，任意の $y\in\mathcal{T}_{obs}$ に対し条件付き確率は，

$$\Pr(\,Y=y\mid\mathcal{T}_{obs})=\frac{1}{\prod_{i,j}y_{ij}!}\;/\;\frac{y_{\cdot\cdot}!}{\prod_i y_{i\cdot}!\prod_j y_{\cdot j}!} \tag{6}$$

と表わされる。このように条件付き確率が，条件付き参照集合の数え上げを必要とせずに，求まることは非常に好ましい性質であり，他のモデルではほとんど期待できないものである。このモデルの条件付き推測については膨大な文献があり，Agresti (1992) に列挙されている。特に，Gail and Mantel (1977) は上の条件付き参照集合（5）の要素数，$\#\mathcal{T}_{obs}$ で表わす，を求める方法について議論している。

1.3　ロジスティック回帰モデル

この節では，この論文の対象であるロジスティック回帰モデルについての説明を行う。このモデルは前節で紹介した対数線形モデルに比べ，条件付き推測の例としてはあまり取り上げられていない。その理由の一部分はこの論文を通して明らかになる。

いま，Y_1，…，Y_kは互いに独立な確率変数であり，各Y_iは二項分布B（m_i，p_i），ただし$p_i = 1/(1+\exp[-(\beta_0+\beta_1 x_i)])$，に従うと仮定する。ここで，$x_i$は説明変数の値で既知とする。すると$Y_1$，…，$Y_k$の同時分布関数は，

$$\begin{aligned} f_\beta(y) &= \prod_{i=1}^{k} {}_{m_i}C_{y_i} p_i^{y_i} (1-p_i)^{m_i-y_i} \\ &= \{\prod_{i=1}^{k} {}_{m_i}C_{y_i}\} \exp[\beta_0 \sum_{i=1}^{k} y_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{k} x_i y_i] \{\prod_{i=1}^{k} (1+\exp[\beta_0+\beta_1 x_i])^{-m_i}\} \end{aligned} \tag{7}$$

となり，指数型分布族となる。この論文を通して，x_iはベクトルではなくスカラーとする。つまり説明変数はただ一つとする。もしも説明変数が一つもなく定数項β_0のみならば，それは前節の対数線形モデルの条件付き参照集合と一致する。このアプローチは「正確なロジスティック回帰（exact logistic regression)」と呼ばれるもので，Cox and Snell（1989），Hirji, Mehta and Patel（1987）等で議論されていて，前節のネットワークアルゴリズムを利用した分析が可能である。しかし1.4節末のデータセットを見ても分かるように，説明変数（投薬量）が一つだけ利用できるデータが数多く存在する状況では，その説明変数を含むモデルの妥当性（適合度）について調べることも同様に重要である思われる。この立場でロジスティック回帰モデルの妥当性を議論している数少ない論文として，Bedrick and Hill (1990)，(1992a) が挙げられる。

さて，この場合の条件付き参照分布は，$T_1(y)=\sum_{i=1}^{k} y_i$，$T_2(y)=\sum_{i=1}^{k} x_i y_i$としたときの(3)であり，

$$\mathcal{T}_{obs} = \{y \mid \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} y_{i,obs}, \sum_{i=1}^{k} x_i y_i = \sum_{i=1}^{k} x_i y_{i,obs}\} \tag{8}$$

と表わされ，任意の$y \in \mathcal{T}_{obs}$に対し条件付き確率は，

$$\Pr(y \mid \mathcal{T}_{obs}) = \frac{\prod_{i=1}^{k} {}_{m_i}C_{y_i}}{\sum_{y\in\mathcal{T}_{obs}} \{\prod_{i=1}^{k} {}_{m_i}C_{y_i}\}} \tag{9}$$

で表わされる。この式を見ても分かるように（Bedrick and Hill（1992b）でも述べられているが），対数線形モデルの場合とは違い（ネットワークアルゴリズムは条件付き参照集合の一部しか数えあげない），ロジスティック回帰モデルの適合度検定を行う場合には条件付き参照集合の要素を全て数え上げなければならない。確かに条件付ける十分統計量の数が増えれば増えるほど，条件付き参照集合の要素数は減少して取り扱いやすくなるが，説明変数の数が一つのときにはそれでもまだ容易

とは言い難い場合がある。それゆえまず条件付き参照集合の要素数がどれくらいあるかを知ることは重要な課題となる。

1.4　データセットについて

この論文で扱うデータは，この節の最後に列挙されている。これらはいずれも河合（1997）が引用しているもので，実際に論文の中で議論されたものである。ただし説明変数（薬品の用量）は表に書かれている数値を用いず，第一水準より１，２，３，４，…，kとして計算を行う。その理由は，表の説明変数をそのまま用いると条件付き参照集合 T_{obs} の要素数が観測データただ一つになってしまうか，そうでなくてもかなり少数になることが予想されるからである。もしそうなれば，仮説検定を行うときの検出力が著しく低下してしまうのである（*Mehta and Hilton*（1993））。また，データセットの説明変数の値をよく見れば，それ程現実からかけ離れた設定ではないことがわかる。つまり，ほとんどのデータでは線形変換をすることでほぼこの設定どおりになり，他のものも対数変換など適当な変換をしてやることでこの設定に近くなるからである。実際，説明変数の数値の有効桁数が２桁以上あってもそれが実態を表わしているかどうかは疑問であり，この部分の情報を落とした方が有効である場面もあるだろうし，少なくとも解析の出発点となるのである。

次の表１－１に各データのパラメータ推定値と２つの適合度検定統計量（尤度比：D，ピアソン X^2統計量：X^2）そして自由度を与えている。これらの値は以後の解析の参考となる。

表１－１

データセット番号	推定値		統計量		自動度
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	D	X^2	$d.f.$
1	-3.675	1.282	10.826	9.525	5
2	-5.594	1.204	4.698	4.142	5
3	-2.235	1.092	9.091	8.006	4
4	-2.367	0.954	2.861	2.847	4
5	-2.928	1.063	2.768	2.728	3
6	-3.486	1.162	0.379	0.367	3
7	-5.651	1.606	5.019	4.609	3
8	-4.842	1.217	5.842	4.998	3
9	-3.579	0.983	9.838	8.581	6
10	-3.544	0.973	2.659	2.303	6
11	-3.562	0.978	7.562	6.705	6
12	-3.438	0.803	9.192	9.065	6
13	-1.365	0.652	0.127	0.127	2
14	-3.901	1.299	1.259	1.259	2
15	-5.361	0.914	6.368	5.230	7
16	-9.250	1.413	5.144	3.926	10
17	-2.876	0.647	6.302	4.934	5
18	-3.593	0.855	1.902	1.343	4
19	-2.238	0.856	1.197	1.177	2
20	-2.986	1.219	2.208	1.938	3

以下データを列挙する。

Data-1 [Thompson, 1947]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1.0625	50	6
2	1.1250	50	7
3	1.2500	50	33
4	1.5000	50	39
5	2.0000	50	45
6	3.0000	50	50
7	5.0000	50	50

Data-2 [Fisher & Yates, 1963]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	9	8	0
2	16	8	0
3	32	8	2
4	64	8	3
5	128	8	3
6	256	8	7
7	512	8	8

Data-3 [Finney, 1971]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2.6358941	49	16
2	3.0000000	48	18
3	3.4794154	48	34
4	3.7894873	49	47
5	4.0525184	50	47
6	4.2490096	48	48

Data-4 [Finney, 1971]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1.3915079	47	7
2	1.6358941	46	22
3	2.0000000	46	27
4	2.2657678	48	38
5	2.4794154	46	43
6	2.6390158	50	48

Data-5 [Finney, 1971]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1.3287	50	6
2	1.4948	48	16
3	1.6358	46	24
4	1.8532	49	42
5	2.1039	50	44

Data-6 [Cox, 1970]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1	30	2
2	2	30	8
3	4	30	15
4	8	30	23
5	16	30	27

Data-7 [Irwin, 1937]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	4.375×10^{-4}	40	0
2	8.750×10^{-4}	40	2
3	1.750×10^{-3}	40	14
4	3.500×10^{-3}	40	30
5	7.000×10^{-3}	40	34

Data-8 [Irwin, 1937]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1.75×10^{-3}	40	0
2	3.50×10^{-3}	40	2
3	7.00×10^{-3}	40	14
4	1.40×10^{-2}	40	19
5	2.80×10^{-2}	40	30

Data-9 [Irwin, 1937]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	49.06	30	4
2	52.99	30	6
3	56.91	34	9
4	60.84	29	14
5	64.76	33	29
6	68.69	28	24
7	72.61	32	32
8	76.54	31	31

Data10 [Irwin, 1937]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	49.06	29	2
2	52.99	30	7
3	56.91	28	9
4	60.84	27	14
5	64.76	30	23
6	68.69	31	29
7	72.61	30	29
8	76.54	29	29

Data-11 [Irwin, 1937]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	49.06	59	6
2	52.99	60	13
3	56.91	62	18
4	60.84	56	28
5	64.76	63	52
6	68.69	59	53
7	72.61	62	61
8	76.54	60	60

Data-12 [Bliss, 1938]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	6.00×10^{-2}	10	0
2	7.00×10^{-2}	10	1
3	8.00×10^{-2}	10	3
4	9.00×10^{-2}	10	6
5	0.10	10	8
6	0.11	10	5
7	0.12	10	9
8	0.13	10	10

Data-13 [Berkson, 1960]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2	30	10
2	3	30	14
3	5	30	20
4	9	30	23

Data-14 [Berkson, 1960]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1	30	1
2	2	30	8
3	4	30	15
4	8	30	23

Data-15 [Reed et al, 1938]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	1	6	0
2	2	6	0
3	4	6	1
4	8	6	0
5	16	6	2
6	32	6	4
7	64	6	4
8	32	6	6
9	64	6	5

Data-16 [Mantel & Bryan, 1963]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2.4410×10^{-4}	79	0
2	9.7650×10^{-4}	41	0
3	1.9531×10^{-3}	19	0
4	3.9062×10^{-3}	19	0
5	7.8125×10^{-3}	17	3
6	1.5625×10^{-2}	18	6
7	3.1250×10^{-2}	20	13
8	6.2500×10^{-2}	21	17
9	0.1250	21	21
10	0.2500	21	21
11	0.5000	21	21
12	1.0000	20	20

Data-17 [Woodard et al, 1941]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2.239	10	1
2	2.512	10	0
3	2.859	5	3
4	3.100	10	5
5	3.500	10	6
6	4.000	10	7
7	4.467	10	8

Data-18 [Woodard et al, 1941]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2.800	10	0
2	3.545	10	2
3	4.200	10	3
4	5.012	10	4
5	5.600	10	7
6	6.310	10	8

Data-19 [Brown, 1967]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	2	27	4
2	4	30	13
3	8	30	18
4	16	30	22

Data-20 [Goldstein, 1967]

No.	Dose	Exposed	Responded
1	62.5	8	1
2	125.0	8	4
3	250.0	8	4
4	500.0	8	7
5	1000.0	8	8

2　条件付き参照集合の数え上げ法

この章以降（最後まで）説明変数の値は，1.4節で述べたように，$x_i=i$；$i=1, 2, \cdots, k$として計算を行う。つまりここでは，次の条件付き参照集合，

$$\mathcal{T}_{obs}=\{\ y\ :\ \sum_{i=1}^{k} y_i=t_{1,obs}\ ,\ \sum_{i=1}^{k} iy_i=t_{2,obs}\ ,\ 0\le y_i\le m_i(i=1,\cdots,k)\} \tag{10}$$

を効率的に数え上げるためのアルゴリズムについて述べる。

(10) ではその定義より，y_1，y_2，…，y_kのうち任意の2つは残りの$k-2$個の値により一意に決まる。それゆえ$k-2$個の変数の取り得る組み合わせ全てに対し，残りの2つの変数を計算しそれらが許容値をとるものだけを抽出してゆけばよい。つまり各変数に1つの繰り返しループ(合計$k-2$個) を割り当てるのである。ただし，この場合すべての組み合わせは少なくとも$\Pi_{i=1}^{k} m_k/max_{\ i\neq j}\ (m_im_j)$通りあるので，まともに計算すると時間を浪費することになる。そこで，残り2つの変数が許容値をとる見込みのない組み合わせについてはできるだけ早い段階で判定しループを抜けださせる必要が出てくる。

数え上げの順番であるが，データセットに共通な構造（説明変数の水準番号が高いほど反応率が高くなっていて，そのことがβ_1の十分統計量の値を大きくしている）より，第k水準を最も外側のループに配し，あと順に外側から第$k-1$，$k-2$，…，3水準を配する。また各変数を大きい方から小さい方へステップを-1として変化させることにする。その理由は，条件付き参照集合ではy_kは比較的大きい値をとり，極端に小さい値をとることはないからである。

さて，付録のサブルーチンプログラムの記号に沿って詳しい説明を行うことにしよう。なお，このプログラムでは水準数の最大数が12になっているが，この数は本質的なものではなく，プログラムを追加すればいくらでも大きくできる。サブルーチンのイン・アウトプットは，

SUBROUTINE ENCRSET (***K, Y, M, COUNT***)

変数名	タイプ	I/O	説明
K	Integer	input：	水準数：k
Y	Integer array	input：	反応数を表わすベクトル
M	Integer array	input：	被験数を表わすベクトル
COUNT	Integer	output：	条件付き参照集合の要素数

であり，内部変数は，

変数名	タイプ	説明
T1S	Integer array	$T1S(j)=\sum_{i=1}^{j} y_i$
T2S	Integer array	$T2S(j)=\sum_{i=1}^{j} y_ix_i$
FROM1-12	Integers	$FROM_i$：$T1S(k-i)$ の最小値
TO1-12	Integers	TO_i：$T1S(k-i)$ の最大値
I1-12	Integers	Index numbers
N	Integer	$\sum_{i=1}^{k} m_i$

である。$T1S(j-1)$ のとり得る値の最小値は $\max(0,\ T1S(j)-M(j))$，最大値は $\min(\sum_{i=1}^{j-1} M(j),\ T1S(j))$ であり，これらをそれぞれ $FROMk-j+1$，$TOk-j+1$ に割り当てる。次に，与えられた $T1S(j)$ に対して $T2S(j)$ のとり得る最大値と最小値を，それぞれ，$T2MAXFN$, $T2MINFN$ により計算させる。もしも与えられた $T2S(j)$ の値が対応する $T2MAXFN$ より大きければ，その値に対応する条件付き参照集合の要素が存在しないことを意味する。ここで $T1S(j)$ の値を増やすと，$T2MAXFN$ は大きくなるがそれ以上に $T2S(j)$ の値が大きくなるので，このループを抜ける。逆に与えられた $T2S(j)$ の値が上の最小値より小さければ，同様にその値に対応する条件付き参照集合の要素が存在しないことを意味するので，次の $T1S(j)$ の値に移らせる。このように，無駄な組み合わせを極力避けるように工夫することで，計算時間を大幅に短縮できる。なお，２つの関数 $T2MAXFN$，$T2MINFN$ の入出力変数は以下の通りである。

INTEGER FUNCTION T2MAXFN (T1S, LEVEL, M, X)

変数名	タイプ	I/O	説明
T1S	Integer	input：	$\sum_{i=1}^{LEVEL} y(i)$
LEVEL	Integer	input：	水準番号
M	Integer array	input：	被験数を表わすベクトル
X	Integer array	output：	説明変数ベクトル

INTEGER FUNCTION T2MINFN (T1S, LEVEL, M, X)

変数名	タイプ	I/O	説明
T1S	Integer	input：	$\sum_{i=1}^{LEVEL} y(i)$
LEVEL	Integer	input：	水準番号
M	Integer array	input：	被験数を表わすベクトル
X	Integer array	output：	説明変数ベクトル

3　$\#\mathcal{T}_{obs}$の正規近似

組み合わせ理論より，(10) 式の $\mathcal{T}_{obs}$の要素数$\#\mathcal{T}_{obs}$は，

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}[\ \sum_{j=1}^{m_i}(\xi\eta^i)^j] \ = \ & \{1+\xi\eta+(\xi\eta)^2+\cdots+(\xi\eta)^{m_1}\} \\ & \times\{1+\xi\eta^2+(\xi\eta^2)^2+\cdots+(\xi\eta^2)^{m_2}\} \\ & \cdots\cdots \\ & \times\{1+\xi\eta^k+(\xi\eta^k)^2+\cdots+(\xi\eta^k)^{m_k}\}\end{aligned} \tag{11}$$

を展開したときの $\xi^{t_{1,obs}}\eta^{t_{2,obs}}$の係数として与えられることに注目しよう。上の式は確率変数の畳み込みと同じ原理であるので，確率母関数の概念を用いて言い換えると次のようになる。$(X_1,\ Y_1)$，$(X_2,\ Y_2)$，…，$(X_k,\ Y_k)$ は互いに独立な k 個の２変量確率変数であり，各 $(X_i,\ Y_i)$ は $(0,\ 0)$，$(1,\ i)$，$(2,\ 2i)$，…，$(m_i,\ im_i)$ を等しい確率で与えるものとする。このとき $(S_1=\sum_{i=1}^{k} X_i,\ S_2=\sum_{i=1}^{k} Y_i)$ の確率母関数は，

$$\begin{aligned} G_S(\xi,\eta) &= \prod_{i=1}^{k} \frac{\sum_{j=0}^{m_i}(\xi\eta^i)^j}{m_i+1} \\ &= \sum_{s_1,s_2} \Pr(S_1 = s_1,\ S_2 = s_2)\ \xi^{s_1}\eta^{s_2} \\ &= \sum_{s_1,s_2} \frac{\#\mathcal{T}_{s_1,s_2}}{\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)} \times \xi^{s_1}\eta^{s_2}, \end{aligned} \tag{12}$$

ただし $\mathcal{T}_{s1,s2}=\{x:\sum_{i=1}^{k} x_i=s_1,\ \sum_{i=1}^{k} ix_i=s_2\}$，となる。それゆえ，この確率 $\Pr(S_1=s_1,\ S_2=s_2)$ を分布の近似理論を用いて計算し，それを $\Pi_{i=1}^{k}(m_i+1)$ 倍することにより，$\#\mathcal{T}_{obs}$を推定することができる。まず *Gail and Mantel* (1977) に倣い，少し安易ではあるが，単純な正規近似から考えてゆこう。ただし，*Gail and Mantel* (1977) は分割表の場合，この枠組みで言えば Y_iを考えない場合，の近似を行っているので，次の3.1節で述べる近似方式でもかなり良好な近似値が得られることが報告されている。

3.1　単純な正規近似法

ここで述べる方法は，$(S_1,\ S_2)$ の分布を単純に2変量正規分布により近似させるもので，あまり良好な近似を期待できないが，次の節で提案する方法を導出する動機づけとなり，また，比較を行うためにも意味があるものと考え紹介する。近似法は次の通りである。まずモーメント，

$$\mathrm{E}(S_1)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}(X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{2},\ \ \mathrm{E}(S_2)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}(Y_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{im_i}{2}$$

$$\mathrm{V}(S_1)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{V}(X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i^2+2m_i}{12},\ \ \mathrm{V}(S_2)=\sum_{i=1}^{k}i^2\mathrm{V}(X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2(m_i^2+2m_i)}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(S_1,S_2)=\sum_{i=1}^{k}i\mathrm{V}(X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i(m_i^2+2m_i)}{12}$$

を計算し，

$$\mu_1=\mathrm{E}(S_1),\ \mu_2=\mathrm{E}(S_2),\ \sigma_1=\sqrt{\mathrm{V}(S_1)},\ \sigma_2=\sqrt{\mathrm{V}(S_2)},\ \rho=\frac{\mathrm{Cov}(S_1,S_2)}{\sqrt{\mathrm{V}(S_1)\mathrm{V}(S_1)}} \tag{13}$$

として，

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{Q(x,y)}{2}] \tag{14}$$

ただし，

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}] \tag{15}$$

に代入する。そして，

$$\Pr(S_1 = t_{1,obs}\ ,\ S_2 = t_{2,obs}) = \frac{\#\mathcal{T}_{obs}}{\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)} \doteq f(t_1obs,\ t_2obs) \tag{16}$$

あるいは，より正確を期して，

$$\Pr(S_1 = t_{1,obs}\ ,\ S_2 = t_{2,obs}) \doteq \int_{t_{1,obs}-.5}^{t_{1,obs}+.5}\int_{t_{2,obs}-.5}^{t_{2,obs}+.5} f(x,y)dxdy \tag{17}$$

を用いる。(17)を用いた近似値は**表２－１**の右から２列目にあるが，右端の列の実際の値の推定値としてはあまりよくない。特にデータ１，９，10，11，16では実際の値からかなり隔たっている。その理由としてまず挙げられるのが，$(t_{1,\mathrm{obs}},\ t_{2,\mathrm{obs}})$ の値が $(\mu_1,\ \mu_2)$ から離れ過ぎている，つまり $\sqrt{Q(t_{1,\mathrm{obs}},\ t_{2,\mathrm{obs}})}$ の値が大きすぎるということである。もちろん S_1，S_2の高次のモーメントを用いることによって近似をより正確にするアプローチも考えられるが，$\sqrt{Q(t_{1,\mathrm{obs}},\ t_{2,\mathrm{obs}})}$ の値が大きい場合はその効果をあまり期待できない（*Stuart and Ord, 1986, Chapter. 6*）。よって何等かの工夫が必要になる。

表２－１

番号	$t_{1,\mathrm{obs}}$	$t_{2,\mathrm{obs}}$	μ_1	μ_2	$\sqrt{Q(t_{1,\mathrm{obs}},\ t_{2,\mathrm{obs}})}$	正規近似	$\#\mathcal{T}_{obs}$
1	230	1150	175	700	3.273	222,084	34,985
2	23	131	28	112	2.294	110	70
3	210	865	146	511.5	2.821	21.203	8,953
4	185	787	141.5	499.5	2.587	34,733	27,071
5	132	498	121.5	365	2.216	2,763	3,814
6	75	290	75	225	2.298	576	804
7	80	336	100	300	2.676	522	425
8	65	272	100	300	2.446	936	826
9	149	860	123.5	556.5	3.324	432,626	121,971
10	142	823	117	529.5	3.326	314,116	102,209
11	291	1683	240.5	1086	3.379	1.798×10^7	4,507,329
12	42	248	40	180	2.888	2,918	2,585
13	67	190	60	150	1.191	202	218
14	47	154	60	150	1.964	60	87
15	22	158	27	135	3.209	422	208
16	122	1148	158.5	832.5	4.037	5.954×10^8	2,864
17	30	158	32.5	132.5	2.192	1,184	1,491
18	24	112	30	105	2.254	220	256
19	57	172	58.5	148.5	1.414	142	173
20	24	89	20	60	2.194	18	22

3.2　正規近似を良くするための提案

ここで提案する方法はあくまでも正規近似（平均分散共分散のみに基いたもの）の範囲内で近似を良くするための方法であり，高次のモーメントを利用するものではない。この方法をもとにして高次の近似を行う方が，3.1節の単純な近似をもとにするよりも良好な近似値が得られることが期待できるが，このことについては別の機会に譲りたい。さて，アイデアは次のとおりである。前節では，各（X_i，Y_i）は（0，0），（1，i），（2，$2i$），…，（m_i，im_i）を等しい確率で与えるものと考えたが，ここでは，確率 $p_i(j)$；$j=0$，1，…，m_iで与えるという一般化を行う。すると確率母関数は，

$$
\begin{aligned}
H_S(\xi,\eta) &= \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{m_i}(\xi\eta^i)^j p_i(j) \right) \\
&= \sum_{s_1,s_2} \Pr(S_1=s_1, S_2=s_2)\,\xi^{s_1}\eta^{s_2},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ただし，Pr（$S_1=s_1$，$S_2=s_2$）$=\sum_{x\in\mathcal{T}_{s_1,s_2}}$［$\Pi_{i=1}^{k} p_i(x_i)$］となる。そこで，

$$
p_i(j)=\Pr(X_i=j)=\frac{(\frac{p_i}{q_i})^j}{1+\frac{p_i}{q_i}+(\frac{p_i}{q_i})^2+\cdots+(\frac{p_i}{q_i})^{m_i}}
$$

ただし $q_i=1-p_i$，$p_i=\frac{\exp(\beta_0+\beta_1 i)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 i)}$ とおくと，

$$
p_i(j)=\Pr(X_i=j)=\frac{\exp[j(\beta_0+\beta_1 i)]}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 i)+\exp[2(\beta_0+\beta_1 i)]+\exp[m_i(\beta_0+\beta_1 i)]}
$$

となり，任意の $x\in\mathcal{T}_{s1,s2}$にたいし，$\Pi_{i=1}^{k} p_i(x_i)$ は一定で，

$$
\prod_{i=1}^{k} p_i(x_i)=\frac{\exp[\beta_0 s_1+\beta_1 s_2]}{\prod_{i=1}^{k}\{1+\exp(\beta_0+\beta_1 i)+\exp[2(\beta_0+\beta_1 i)]+\exp[m_i(\beta_0+\beta_1 i)]\}}
\tag{19}
$$

と表わされる。それゆえ（18）は，

$$
\begin{aligned}
H_S(\xi,\eta) &= \sum_{s_1,s_2}\Pr(S_1=s_1,S_2=s_2)\,\xi^{s_1}\eta^{s_2} \\
&= \sum_{s_1,s_2}\#\mathcal{T}_{s_1,s_2}\times\frac{\exp[\beta_0 s_1+\beta_1 s_2]}{\prod_{i=1}^{k}\{1+\exp(\beta_0+\beta_1 i)+\exp[2(\beta_0+\beta_1 i)]+\exp[m_i(\beta_0+\beta_1 i)]\}}\,\xi^{s_1}\eta^{s_2}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

という形を得る。よって Pr（$S_1=s_1$，$S_2=s_2$）を，β_0，β_1に適当な値を与えておいて正規近似し，その値を $\Pi_{i=1}^{k} p_i(x_i)$で割ることにより$\#\mathcal{T}_{s1,s2}$の近似値を求めることにする。なお，$\beta_0=\beta_1=0$ のとき H_S（ξ，η）は G_S（ξ，η）に等しくなることに注意しよう。

さて，最も正規近似を良くすると思われる β_0，β_1の決め方について考えよう。ここで提案するの

は，S_1，S_2の期待値がそれぞれ $t_{1,obs}$，$t_{2,obs}$に等しくなるように定める方式である。具体的に言うと，β_0，β_1についての連立方程式，

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_\beta(X_i) &= t_{1,obs} \\ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_\beta(Y_i) &= t_{2,obs} \end{cases} \tag{21}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\beta(X_i) &= \sum_{j=1}^{m_i} j\ p_i(j) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} j \exp[j(\beta_0+\beta_1 i)]}{\sum_{j=0}^{m_i} \exp[j(\beta_0+\beta_1 i)]} \\ &= \frac{m_i \exp[(m_i+2)(\beta_0+\beta_1 i)]-(m_i+1)\exp[(m_i+1)(\beta_0+\beta_1 i)]+\exp[(\beta_0+\beta_1 i)]}{\exp[(m_i+2)(\beta_0+\beta_1 i)]-\exp[(m_i+1)(\beta_0+\beta_1 i)]-\exp[(\beta_0+\beta_1 i)]+1} \\ \mathrm{E}_\beta(Y_i) &= i\mathrm{E}_\beta(X_i) \end{aligned} \tag{22}$$

の解を用いるのである。この方程式から分かるように，この方程式の数値解を求めるための計算量は，各水準での二項分母 m_iではなく水準数 k に依存するので，m_iの値が大きいときにも対応できることに注目されたい。β_0，β_1の初期値の与え方だが，**表 2 － 2** の右から 4 列目を見ても分かるように，上の方程式 (21) の解 $\tilde{\beta}_0$と $\tilde{\beta}_1$の比は表 1 － 1 の最尤推定値 $\hat{\beta}_0$と $\hat{\beta}_1$のそれとほぼ等しい。実際ここで与えている20個のデータでは誤差は 2 ％の範囲内である。また**表 2 － 2** の右から 3 列目を見ても分かるように，$\hat{\beta}_0$と $\tilde{\beta}_0$との比は，変則的な *Data*-16を除いては，m の値により大体決まり $m=10$のとき 3，$m=30$のとき 8，$m=50$のとき12というのが経験則となる。

以上のように求めた $\tilde{\beta}_0$，$\tilde{\beta}_1$のもとで p_i (j) を計算し，S_1，S_2の分散と相関係数を，

$$\sigma_1^2 = \mathrm{V}(S_1) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}(X_i), \sigma_2^2 = \mathrm{V}(S_2) = \sum_{i=1}^{k} i^2\ \mathrm{V}(X_i)\ ,$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(S_1, S_2)}{\sqrt{\mathrm{V}(S_1)\mathrm{V}(S_1)}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i\ \mathrm{V}(X_i)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

求め，$E_{\tilde{\beta}}$ $(S_1)=t_{1,obs}$，$E_{\tilde{\beta}}(S_2)=t_{2,obs}$であることに注意して計算すると**表 2 － 2** のような結果が得られる。

上表の右 2 列を比較すれば分かるように，この修正法による推定値は，20のデータに対し，誤差は－ 3 ％から20％の間に収まっていて，3.1節の結果よりもはるかに良くなっている。この誤差は，正確な数え上げによる推測が可能かどうかを判定する場合には，十分小さいと考えてよい。また *Data*-16を除いて，修正法による推定値は一貫して大きい目の値をとっていることが分かる。このことは，S_1，S_2の高次モーメントを利用することによる推定精度の向上を期待させるに十分である。

4　終わりに

次の課題としては，まず，3.2節で紹介した近似法をもとに 4 次までのモーメントを利用して近似を

表2－2

番号	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0\tilde{\beta}_1/\tilde{\beta}_0\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0/\tilde{\beta}_0$	修正法	# T_{obs}
1	-0.3637	0.12906	0.9831	10.1042	36,697	34,985
2	-2.1933	0.47012	1.0042	2.5504	74	70
3	-0.2041	0.10223	0.9754	10.9508	9,863	8,953
4	-0.1954	0.08035	0.9801	12.1139	29,969	27,071
5	-0.2139	0.07825	0.9925	13.6877	4,214	3,814
6	-0.4174	0.13914	1.0000	8.3512	866	804
7	-0.6282	0.17685	1.0096	8.9953	462	425
8	-0.5031	0.12513	1.0107	9.6237	908	826
9	-0.4857	0.13594	0.9813	7.3684	129,752	121,971
10	-0.4987	0.13857	0.9881	7.1060	108,390	102,209
11	-0.2664	0.07441	0.9828	13.3730	4.776×10^6	4,507,329
12	-1.0546	0.24678	0.9981	3.2601	2,748	2,585
13	-0.1352	0.06496	0.9945	10.0927	259	218
14	-0.4650	0.15336	1.0097	8.3887	94	87
15	-2.4928	0.42349	1.0036	2.1506	215	208
16	-2.5689	0.38890	1.0090	3.6007	2790	2,864
17	-0.8623	0.19027	1.0195	3.3353	1590	1,491
18	-1.0627	0.25114	1.0070	3.3809	280	256
19	-0.2470	0.09114	1.0106	9.2935	2022	173
20	-1.0623	0.43761	0.9910	2.8110	26	22

さらに良くすることを考える。次に，(9)式右辺の分母をどれだけ正確に近似できるかという問題について考えたい。条件付き参照集合の要素数が大きければ，すべての要素を数え上げることは困難になる。しかし，もしもこの分母を正確に推定できる（どれだけの誤差を伴って推定できるかが分かる）ならば，すべての要素を考える必要はなくなり，ネットワークアルゴリズムの場合と同様に，検定統計量が観測値よりも大きく（小さく）なるものの確率を加え合わせるだけでよくなるのである。

注

1）*Agresti, A. (1992). A survey of exact inference for contingency tables. Statist. Sci.* 7 131-177.

2）Bedrick, E. J. and Hill, J. R. (1990). Outlier tests for logistic regression : A conditional approach. Biometrika 77 815-27.

3）Bedrick, E. J. and Hill, J. R. (1992a). An empirical assessment of saddlepoint approximations for testing logistic regression parameter. Biometrics 48 529-44.

4）Bedrick, E. J. and Hill, J. R. (1992b). A comment on "A survey of exact inference for contingency tables". Statist. Sci.7 153-157.

5）Berkson, J. (1960). Nomograms for fitting the logistic function by maximum likelihood. *Biometrika 47 121-141.*

6）*Bliss, C. I.(1935). The calculation of the dosage-mortality curve. Ann. Appl. Biol. 22 134-167.*

7）*Bliss, C. I. (1938). The determination of the dosage-mortality curves from small numbers. Quart. J. Pharm. Pharmacol.* 11 192-216.

8）Brown, B. W. Jr. (1970). Quantal-response assay, *Statistics in Epidemiology* edited by McArthur, J. W. and Colton, T. MIT Press 129-144.

9) Cox, D. R. and Snell, E. J. (1989). *Analysis of Binary Data, 2nd ed. Chapman and Hall, London.*
10) *Finney, D. J. (1971). Probit Anarlysis, 3rd ed. CUP.*
11) *Fisher, R. A. and Yates, F. (1963) Statistical Tables ; Agricultural and Medical Research.* Hafner, New York.
12) Gail, M. and Mantel, N. (1977) Counting the number of r x c contingency tables with fixed margins. *J. Amer. Statist. Assoc.* 72 859-862.
13) Goldstein, A. (1967) Biostatistics : *An Introductory Test.* MacMillan, New York.
14) Hirji, K. F., Mehta, C. R. and Patel, N. R. (1987). Computing distributions for exact logistic regression. *J. Amer. Soc. Assoc.* 82 1110-1117.
15) Irwin, J. O. (1937). Statistical Method applied to biological assays. *Suppl. J. Roy. Statist. Soc.1 1-60.*
16) *Lehmann, E. H. (1959) Testing Statistical Hypotheses.* Wiley.
17) Mantel, N. and Bryan, W. R. (1963). "Safety" testing of carcinogenic agents. Journal of the National Cancer Institute 27 455-470.
18) McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*, 2nd ed. Chapman and Hall.
19) Mehta, C. R. and Hilton, J. F. (1993) Exact power of conditional and unconditional test : Going beyond the 2 x 2 contingency table. *J. Amer. Statist. Assoc.* 47 91-98.
20) Mehta, C. R. and Patel, N. R. (1983). A network algorithm for performing Fisher's exact test in *r x c* contingency tables. *J. Amer. Statist. Assoc. 78 427-434.*
21) *Reed, L. J. and Muensh, H. (1938). A Simple method of estimating fifty per cent endpoints. American Journal of Hygiene* 27 493-497.
22) Stuart, A. and Ord, K. (1986) *Kendall's Advanced Theory of Statistics.* Griffin, London.
23) Thompson Thompson, W. R. (1947). Use of moving averages and interpolation to estimate median effectivedose. I. Fundamental formulas, estimation error, and relation to other methods. *Bacteriological Review* 11 115-145.
24) Woodard, G., Lange, S. W., Nelson, K. W. and Calvery, H. O. (1941) The acute oral toxicity of acetic, chloracetic, dichloracetic and trichroracetic acids. J. Ind. Hyg. Toxicol. 23 78-82.
25) 河合　統介(1997)。悉無応答型試験におけるデータ解析過程。平成8年度修士論文，大阪大学大学院　基礎工学研究科　情報数理系。
26) 柳川　堯（1986）離散多変量データの解析。共立出版。

```
C  THIS SUBROUTINE IS FOR FINDING THE NUMBER OF ELEMENTS IN THE
C  CONDITIONAL REFERENCE SET OF THE LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH TWO
C  PARAMETERS. THE NUMBER OF THE LEVELS OF THE COVARIATE MUST BE LESS
C  OR EQUAL TO 12
C
   SUBROUTINE ENCRSET(K, Y, M, COUNT)
   INTEGER K, Y(12), M(12), X(12), CM(12)
   INTEGER T1S(12), T2S(12)
   INTEGER T1, T2
   INTEGER FROM1, FROM2, FROM3, FROM4, FROM5, FROM6, FROM7, FROM8, FROM9,
FROM10, FROM11, FROM12
   INTEGER TO1, TO2, TO3, TO4, TO5, TO6, TO7, TO8, TO9, TO10, TO11, TO12
   INTEGER I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12
   INTEGER LEVEL, N, COUNT
   INTEGER T2MAX, T2MIN
C
C  ASSIGN THE VALUES OF THE COVARIATE AS FOLLOWS.
C
   DO 20 I=1, K
   X(I)=I
20  CONTINUE
C
C  CALCULATE THE VALUES OF THE SUFF. STAT. ETC.
C
   T=0
   T2=0
   N=0
   DO 21 I=1, K
   T1=T1+Y(I)
   T2=T2+Y(I)*I
   N=N+M(I)
   CM(I)=N
21  CONTINUE
C
C
   T1S(K)=T1
   T2S(K)=T2
   COUNT=0
C
   FROM1=MAX0(0, T1S(K)-M(K))
   TO1=MIN0(T1S(K), CM(K-1))
   DO 101 I1=FROM1, TO1
   LEVEL=K-1
   T1S(LEVEL)=I1
   T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
   T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
```

```
    IF(T2S(LEVEL). GT. T2MAX) GOTO 201
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
    IF (T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 101
  IF(LEVEL .EQ. 1 ) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 101
  END IF
C
C
  FROM2 = MAX0(0, T1S(K-1)-M(K-1))
  TO2 = MIN0(T1S(K-1), CM(K-2))
  DO 102 I2 = FROM2, TO2
  LEVEL=K-2
  T1S(LEVEL)=I2
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX) GOTO 101
  T2MIN=T2MINFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF (T2S(LEVEL) .LT. T2MIN) GOTO 102
  IF(LEVEL .EQ. 1)THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 102
  END IF
C
C
  FROM3=MAX0(0, T1S(K-2)-M(K-2))
  TO3 = MIN0(T1S(K-2), CM(K-3))
  DO 103 I3 = FROM3, TO3
  LEVEL=K-3
  T1S(LEVEL)=I3
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF (T2S(LEVEL).GT. T2MAX) GOTO 102
  T2MIN=T2MINFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF (T2S(LEVEL) .LT. T2MIN) GOTO 103
  IF ( LEVEL .EQ. 1 ) THEN
    CALL RECORD( T1S, K)
    GOTO 103
  END IF
C
C
  FROM4=MAX0(0, T1S(K-3)-M(K-3))
  TO4=MIN0(T1S(K-3), CM(K-4))
  DO 104 I4=FROM4, TO4
  LEVEL=K-4
  T1S(LEVEL)=I4
```

```
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL).GT. T2MAX ) GOTO 103
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN) GOTO 104
  IF(LEVEL.EQ. 1)THEN
    COUNT=COUNT+ 1
    GOTO 104
  END IF
C
  FROM5=MAX0(0, T1S(K-4)-M(K-4))
  TO5=MIN0(T1S(K-4), CM(K-5))
  DO 105 I5=FROM5, TO5
  LEVEL=K-5
  T1S(LEVEL)=I5
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 104
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF (T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 105
  IF(LEVEL .EQ. 1)THEN
    COUNT=COUNT+ 1
    GOTO 105
  END IF
C
  FROM6=MAX0(0, T1S(K-5)-M(K-5))
  TO6=MIN0(T1S(K-5), CM(K-6))
  DO 106 I6=FROM6, TO6
  LEVEL=K-6
  T1S(LEVEL)=I6
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 105
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF (T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 106
  IF(LEVEL .EQ. 1)THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 106
  END IF
C
  FROM7=MAX0(0, T1S(K-6)-M(K-6))
  TO7=MIN0(T1S(K-6), CM(K-7))
  DO 107 I7=FROM7, TO7
  LEVEL=K-7
  T1S(LEVEL)=I7
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
```

```
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 106
  T2MIN=T2MINFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 107
  IF(LEVEL .EQ. 1) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 107
  END IF
C
  FROM8=MAX0(0, T1S(K-7)-M(K-7))
  TO8=MIN0(T1S(K-7), CM(K-8))
  DO 108 I8=FROM8, TO8
  LEVEL=K-8
  T1S(LEVEL)=I8
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX) GOTO 107
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 108
  IF(LEVEL .EQ. 1) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 108
  END IF
C
  FROM9 = MAX0(0, T1S(K-8)-M(K-8))
  TO9 = MIN0(T1S(K-8), CM(K-9))
  DO 109 I9=FROM9, TO9
  LEVEL=K-9
  T1S(LEVEL)=I9
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 108
  T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 109
  IF(LEVEL .EQ. 1) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 109
  END IF
C
  FROM10 = MAX0(0, T1S(K-9)-M(K-9))
  TO10 = MIN0(T1S(K-9), CM(K-10))
  DO 110 I10 = FROM10, TO10
  LEVEL=K-10
  T1S(LEVEL)=I10
  T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
  T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
```

```
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 109
   T2MIN=T2MINFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 110
   IF(LEVEL .EQ. 1) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 110
   END IF
C
   FROM11=MAX0(0, T1S(K-10)-M(K-10))
   TO11=MIN0(T1S(K-10), CM(K-11))
   DO 111 I11=FROM11, TO11
   LEVEL=K-11
   T1S(LEVEL)=I11
   T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
   T2MAX=T2MAXFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX ) GOTO 110
   T2MIN=T2MINFN( T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN ) GOTO 111
   IF ( LEVEL .EQ. 1 ) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 111
   END IF
C
   FROM12 = MAX0(0, T1S(K-11)-M(K-11))
   TO12 = MIN0(T1S(K-11), CM(K-12))
   DO 112 I12 = FROM12, TO12
   LEVEL=K-12
   T1S(LEVEL)=I12
   T2S(LEVEL)=T2S(LEVEL+1)-(T1S(LEVEL+1)-T1S(LEVEL))*X(LEVEL+1)
   T2MAX=T2MAXFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .GT. T2MAX) GOTO 111
   T2MIN=T2MINFN(T1S(LEVEL), LEVEL, M, X)
      IF(T2S(LEVEL) .LT. T2MIN) GOTO 112
   IF(LEVEL .EQ. 1) THEN
    COUNT=COUNT+1
    GOTO 112
   END IF
C
   112  CONTINUE
   111  CONTINUE
   110  CONTINUE
   109  CONTINUE
   108  CONTINUE
   107  CONTINUE
   106  CONTINUE
   105  CONTINUE
```

```
  104  CONTINUE
  103  CONTINUE
  102  CONTINUE
  101  CONTINUE
C
  201  CONTINUE
C
  STOP
  END

C
C  A FUNCTION FOR CALCULATING THE MAXIMUM POSSIBLE NUMBER
C  FOR T2S(LEVEL)
C
  INTEGER FUNCTION T2MAXFN(T1S,LEVEL, M, X)
  INTEGER T1S, LEVEL, WW, WS, WT, M(12), X(12)
  WT=0
  WW=T1S
  WS=LEVEL
  DO 301 WHILE (WW .GT. 0)
  WT= WT + MIN0(WW, M(WS)) * X(WS)
  WW=WW-M(WS)
  WS=WS-1
301  CONTINUE
  T2MAXFN=WT
  RETURN
  END
C
C  A FUNCTION FOR CALCULATING THE MINIMUM POSSIBLE NUMBER
C  FOR T2S(LEVEL)
C
  INTEGER FUNCTION T2MINFN( T1S,LEVEL, M, X)
  INTEGER T1S, LEVEL, WW, WS, WT, M(12), X(12)
  WT=0
  WW=T1S
  WS=1
  DO 302 WHILE (WW .GT. 0)
  WT= WT + MIN0( WW, M(WS) ) * X(WS)
  WW=WW-M(WS)
  WS=WS+1
302  CONTINUE
  T2MINFN=WT
  RETURN
  END
```