論　文

経済計画と経済均衡

神　保　一　郎

経済計画が大きく取り上げられ，自由主義的経済の影が薄くなった時代があった。また，社会主義経済が崩壊するに及んで，計画経済に対する疑問が大きく浮かび上がっている。その原因は色々なものが考えられるであろうが，ここでその最も本質的な側面を取り上げて，如何に良心的に立てられた計画であっても，成功しないのを証明したい。

1．経済計画と非線形計画法

1国が経済計画を立てるに当たって，種々な目標が置かれるのが普通であるが，ここではそれが1個であるとする。複数個の目標が置かれたとしても，本質的には何らの差異も生じないからである。ここで財ベクトルを $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ の n 次元ベクトルで示す事とする。経済の目的は目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ で示される。また，ここで目的を達成しようとした場合，その環境あるいは制約は次の2つの制約条件式で表すこととする。

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad (i=1, \cdots, k)$$

$$h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (i=1, \cdots, l)$$

ただし，f と g_i は連続で微分可能な凹関数であると仮定する。また h_i は線形関数である。そうすると，ここでの経済計画は

$$max\ f(\boldsymbol{x})$$

$$s.\ t.\quad g_i(\boldsymbol{x})\geq 0 \qquad (\mathrm{i}=1,\ \cdots,\ k)$$
$$h_i(\boldsymbol{x})=0 \qquad (\mathrm{i}=1,\ \cdots,\ l)$$

(1)

となる。ただし $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^1$, $g_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^1$, $h_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^1$ となる関数である。また $\boldsymbol{x}$ の実行可能集合を

$$X=\{\boldsymbol{x}\mid g_i(\boldsymbol{x})\geq 0,\ i=1,\ \cdots,\ k,\ h_i(\boldsymbol{x})=0\quad i=1,\ \cdots,\ l\}$$

(2)

とする。ここで $\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ とすればクーン＝タッカーの条件は次のようになる。ただし $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r]$, $\mu=[\mu_i,\ \cdots,\ \mu_s]$ はラグランジュ乗数である。また $\nabla f(\boldsymbol{x})^T$ はベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x})$ の転置ベクトルである。

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^T+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla g_i(\boldsymbol{x})^T+\sum_{i=1}^{l}\mu_i\nabla h_i(\boldsymbol{x})^T=0$$
$$\lambda_i\geq 0\quad g_i(\boldsymbol{x})\geq 0\ \ (i=1,\ \cdots,\ k)$$
$$\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})=0\ \ (i=1,\ \cdots,\ k)$$
$$h_i(\boldsymbol{x})=0\ \ (i=1,\ \cdots,\ l)$$

(3)

非線形計画法では解が尖点となる場合がある。その場合を処理する為に制約限定 (constraint qualification) として，$\boldsymbol{x}$ のうちに次の条件を満足するものがなければならない。

1．1点 $\boldsymbol{x}^0\in\mathbb{R}^n$ が存在して

$$g_i(\boldsymbol{x}^0)>0 \qquad i=1,\ \cdots,\ k$$
$$h_i(\boldsymbol{x}^0)=0 \qquad i=1,\ \cdots,\ l$$

となる。

2．$\boldsymbol{x}\in X$ に対して，$\nabla h_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,\ \cdots,\ l$ は線形独立である。

ここでクーン＝タッカーの条件は取扱にくいので，それと同値である次の連立方程式に作りかえる。

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T + \sum_{i=1}^{k} a_j + \nabla g_i(\boldsymbol{x})^T + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(\boldsymbol{x})^T = \mathbf{0}$$

$$a_i^- - g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i=1, \cdots, k)$$

$$h_i(\boldsymbol{x}) \qquad = 0 \quad (i=1, \cdots, l)$$

ここで $a_i^+ = [max\ (0,\ a)]^k$, $a_i^- = [max\ (0, -a)]^k$ である。k はその時の条件に応じて適宜決められる定数である。すなわちこの最適解 $(\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{a}^*,\ \boldsymbol{\mu}^*)$ が存在するとすれば

$$\lambda_i^* = a_i^{+*}$$

$$a_i^* \equiv \begin{cases} (\lambda_i^*)^{\frac{1}{k}} & g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \text{ の場合} \\ -g_i(\boldsymbol{x}^*)^{\frac{1}{k}} & g_i(\boldsymbol{x}^*) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$k=3$ の場合

となっている。

さて，ここでホモトピーによって非線形連立方程式がどのように解を得るかを示しておこう。

$$\begin{aligned} F_1(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ F_2(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

があって，本来，解を求めたい連立方程式であるとする。ただし $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$ であるとする。ここにホモトピー・パラメター t を追加して，比較的簡単に解ける次の方程式に作り変えて，その解を求める。

$$\begin{aligned} E_1(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ E_2(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ E_n(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

ここでホモトピー関数$H(\boldsymbol{x}, t): \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$を考える。ただし$[\boldsymbol{x}, t]=[x_1, x_2, \cdots, x_n, t]$である。$t=0$のときは簡単化された関数であり，$t=1$のときは本来解きたいと考えた連立方程式である。したがってホモトピー関数は

$$H(\boldsymbol{x}, t)=H(\boldsymbol{x}, 0)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$$

$$H(\boldsymbol{x}, t)=H(\boldsymbol{x}, 1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

となる。ただし$\boldsymbol{E}=[E_1, \cdots, E_n]$，$\boldsymbol{F}=[F_1, \cdots, F_n]$である。例えば

$$x_1{}^3-3x_1{}^3+8x_1+3x_2-36=0$$

$$x_1{}^2 \qquad +x_2+4=0$$

を解きたいと考える。

$$E(\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x}, 0)=\begin{pmatrix} x_1{}^3+8x_1+3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

(7)

$$F(\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{x}, t)$$

$$=\begin{pmatrix} x_1{}^3+8x_1+3x_2-t(3x_1{}^2+36) \\ x_2+t(x_1{}^2+4) \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

(8)

となる。$t=1$の場合は本来解を求める方程式となるのである。(7)式の解は先ず$x_2=0$であるから$x_1=0$となる。この解が出発点として選ばれる。また，(8)式の解として，実数のみを取り上げれば第2式のx_2を第1式に代入する事により，次の解を得る。

$$x_1(t)=6t$$

$$x_2(t)=-36t^3-4t$$

(9)

これより$t=1$のときは$[x_1, x_2]=[6, -40]$が解となりこれが求めたかった，もとの式の解である。このようにして非線形で非常に解を求めるのが困難な連立方程式も，比較的簡単に解を得る事ができるのが分かった。

ホモトピー方程式のヤコビアンを次のように表わす事としよう。

$$H'(\boldsymbol{x},\ t)=\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial H_1}{\partial x_n} & \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial H_n}{\partial x_n} & \frac{\partial H_n}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

を得る。x_i $(i=0,\ \cdots,\ n)$ も t も同じようにホモトピー関数の中の変数であるから，これを y_i で示す。また，出発点から〔y_1, y_2, $\cdots$, y_{n+1}〕までの径路上の距離を p で示せば，すなわち $\boldsymbol{y}$ はやはり p の関数となる。

$$\boldsymbol{y}(p)=〔x,\ (p),\ \cdots,\ x_n(p),\ t(p)〕$$

ここでホモトー関数 $H(\boldsymbol{y})=0$ の逆関数を

$$H^{-1}=\{\boldsymbol{y} \mid H(\boldsymbol{y})=0\}=\{(\boldsymbol{x},\ t) \mid H(\boldsymbol{x},\ t)=0\}$$

で示す。

$$\dot{y}_i=\frac{dy_i}{dp} \quad (i=1,\ \cdots,\ n+1)$$

とすれば

$$H(\boldsymbol{y}(p))=0$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial g_i}\ \dot{y}_i=0$$

となる。H' から i 番目の列を除いたものを $(H')_{-i}$ で示せば $\det(H')_{-i}\neq 0$ の場合には逆関数の定理により $[(H')_{-i}]^{-1}$ の存在が保証される。

命題1.

$H:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $H\in C^2$ であって $(H')_{-i}$ が正則行列であるとしよう。そうすると

$$\dot{y}_i=(-1)^i\det(H')_{-i} \tag{11}$$

は出発点 $y^0 \in H_{-i}$ から解に到る一義的な径路を示す。△

〔証　明〕

$$H(\boldsymbol{y}(p))=0$$

であるから両辺を微分して

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial H}{\partial y_i}\dot{y}_i=0$$

となる。(11)式にこれを代入すれば

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial H}{\partial y_i}\left[(-1)^i det(H')_{-i}\right]=0 \tag{12}$$

これを移項して

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial H}{\partial y_i}\left[(-1)^i det(H)_{-i}\right]$$

$$=-\frac{\partial H}{\partial y_1}\left[(-1)^i det(H')_{-1}\right]$$

$$(i=2,\ \cdots,\ n+1)$$

クラーマーの法則から

$$(-1)^i\ det(H')^{-i}$$

$$=\frac{1}{det\ H'_{-1}}det\left(\frac{\partial H}{\partial y_2},\ \frac{\partial H}{\partial y_3},\ \cdots,\ \frac{\partial H}{\partial y_{i-1}},\right.$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial y_i}det(H')_{-1},\ \frac{\partial H}{\partial y_{i+1}},\ \cdots,\ \frac{\partial H}{\partial y_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{det(H')_{-1}(-1)^i\ det(H')_{-i}}{det(H')_{-1}}=(-1)^i det(H')_{-i}$$

この事は y_i は唯一の値しか持たないのを示している。

□

さて，ここで非線形計画法に対するホモトー関数を次のように表現しよう。

$$H(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a},\ \mu,\ t)$$

$$
=\begin{pmatrix}
-(1-t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)+t\nabla f(\boldsymbol{x})^T+\sum_{i=1}^{k} a_i^+\nabla \mathbf{g}_i(\boldsymbol{x})^T \\
\qquad +\sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(\boldsymbol{x})^T \\
a^-{}_i-g_i(\boldsymbol{x}) \qquad (\mathrm{i}=1,\ \cdots,\ k) \\
h_i(\boldsymbol{x}) \qquad (\mathrm{i}=1,\ \cdots,\ l)
\end{pmatrix}
$$

$$
=\boldsymbol{o} \tag{13}
$$

$\boldsymbol{x}^0$は制約限定を満足す値であり，出発点とする。

命題 2

H が C^2であり $det(H')_{-i}$が正則行列であるとする。そうすれば H^{-1}は一義的な連続で微分可能な径路である。

〔証　明〕

命題１により一義的な径路が存在する。　□

さて，次に個々独立の主体からなる経済を考える。この社会には m 個の主体があり，対象となる財貨の種類は n であるとする。そうすると $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ であり，$\boldsymbol{x}=〔x^1,\ \cdots,\ x^m〕$であるとする。$x^i$ 以外の選好対象のベクトルを $\boldsymbol{x}^{-i}=〔x^1,\ \cdots,\ x^{i-1},\ x^{i+1},\ \cdots,\ x^m〕$で表すと主体は $\boldsymbol{x}^{-i}$ を与えられたものとして，自己の目的関数 ϕ^i を最大にしようとする。また，経済均衡に到達するには各主体が直面する環境は異なるが，それは与えられたものと考える事ができるであろう。それを非線形の関数 g と線形の関数 h で示し得るものとする。だから個々の主体が直面する環境は自己以外の主体の決定である $\boldsymbol{x}^{-i}$ と，自己の制約条件式 $g_j{}^i$, $h_j{}^i$ である。そして経済全体が直面する問題を主問題，各主体が直面する問題を副問題と名付ける事とする。そうするとここでの副問題は次のように表されるであろう。

$$
max\ \phi_i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})
$$

$$s.\ t.\ g_j{}^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i}) \geq 0,\ j=1,\ \cdots,\ k_i$$
$$h_j{}^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i}) = 0,\ j=1,\ \cdots,\ l_i \tag{14}$$

ここでベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}^{-i}$ が与えられた時，副問題の解が $\hat{\boldsymbol{x}}^i\ (i=1,\ \cdots,\ m)$ となったのであれば，$\hat{\boldsymbol{x}}^i$ を均衡解と呼ぶ。さて，主体 i に対する制約限定を次のようなものであるとしよう。

1．$g_j{}^i\ (\boldsymbol{x}^{i0}) > 0,\ j=1,\ \cdots,\ k_i$
　$h_j{}^i\ (\boldsymbol{x}^{i0}) = 0\quad j=1,\ \cdots,\ l_i$
　を満たす $\boldsymbol{x}^{i0} \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

2．$D_i = \{\boldsymbol{x}^i \mid g_j{}^i(\boldsymbol{x}^i) \geq 0,\ j=1,\ \cdots,\ k_i,\ h_j{}^i(\boldsymbol{x}^i) = 0\quad j=1,\ \cdots,\ l_i\}$
　に所属する x に対して $\nabla h_j{}^i$，i＝1，…，l_i は互いに1次独立である。

ここでこの副問題に対するホモトー関数を次のように定義する。

$$H(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a},\ \mu,\ t)$$
$$= \left(\begin{array}{l} (1-t)(\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^{i0}) + t \nabla x^i \phi^i(\boldsymbol{x})^T \\ \qquad + \sum_{j=1}^{k_i} (a_j{}^i)^+ \nabla_{xi}\, g_i{}^j(\boldsymbol{x})^T + \sum_{j=1}^{l_i} \mu_i{}^j \nabla_{xi}\, h_j{}^i\ (\boldsymbol{x})^T \\ \qquad (a_j{}^i)^- - g_j{}^i(\boldsymbol{x}) \\ \qquad\qquad h_j{}^i(\boldsymbol{x}) \end{array} \right)$$

命題3．

副問題の全ての関数が C^3 であり，ϕ^i と $g_j{}^i$ が $\boldsymbol{x}^i$ に対して凹であり，$h_j{}^i$ は線形であるとしよう。D_i がコンパクトであり，制約限定を $\boldsymbol{x}^i$ が満たしているものとしよう。H' が正則行列であれば，出発点（$\boldsymbol{x}^{i0}$，$\boldsymbol{a}^{i0}$，$\boldsymbol{\mu}^{i0}$，0）から解に到る一義的な径路が存在する。△

これで副問題にも解が存在するのが分かった。

結び

2つのモデルに対して，解存在が証明された。この事は2つとも理論的に

妥当性を持つものを示している。しかし，計画経済の場合，如何に良心的に計画が樹立され実行されたとしても，その結果，達成される $\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{x}^*=\mathfrak{x}=$〔$\mathfrak{x}^1$, $\mathfrak{x}^2$, …, $\mathfrak{x}^m$〕となる必然性は全く無い。$\boldsymbol{x}^*$ はベクトルであるに対して，$\mathfrak{x}$ は行列であるので，比較そのものが不可能である。$\boldsymbol{x}^*=\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{x}^i$ となっており，且つ $\mathfrak{x}^1=\mathfrak{x}^2=\cdots=\mathfrak{x}^m$ となっていなければ，各主体に不満が残るであろう。これが消費者である場合，日常の生活で自己の欲するものが手に入らない結果となる。また生産者である場合には期待しただけの利潤が上げられず，企業を経営してゆく incentive を失わせる事となろう。

また，例え目的関数が，国家の計画当局と個人とが偶然に一致するとしても，それを取り巻く環境 g_i，h_i が個々の主体のものである $g_j{}^i$，$h_j{}^i$ とが一致しないのは明らかである。従って，例え国民の為に立てられた最良の計画があったとしても，それが国民全体の満足を得る事は先ず不可能と結論付けることが出来るであろう。

参考文献

〔1〕Day, Richard H. (1994):
Complex Economic Dynamics, Vol. I, MIT Press.

〔2〕Gandolfo, Giancarlo (1996):
Economic Dynamics, 3rd completely revised and enlarged ed., Springer.

〔3〕Garcia, C. B., and W. I. Zangwill (1979):
"Determing All Solutions to Certain Systems of Nonlinear Equations," *Mathematics of Operations Research* 4, 1-14.

〔4〕Lorenz, Hans-Walter (1993):
Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, Springer.

〔5〕Tu, Pierre N. V. (1994):
Dynamical Systems: an introduction with applications in economics and biology, 2nd revised and enlarged ed., Springer.