論　文

離散時間 Dynamic Programming の方法と消費計画への応用：展望

村　田　安　雄

1. はじめに

表題が示すように，本論文の第1の目的は，Bellman (1957) の Dynamic Programming (D. P. と略称) の離散時間系の解法と，それに代わるラグランジュ乗数法との関連性を，確実性下と不確実性下の両方について展望することであり，第2の目的はそれらの方法を消費計画の三つの代表的モデルに適用して，異時点間最適消費論を多面的に把えることである。各節ごとにその内容を見ると，まず第2節において，確実性下での D. P. の標準的方法が，また第3節ではその2世代消費計画への応用が解説され，つぎに最大原理と D. P. の最適性原理との類似点を第4節で明確にして，不確実性下の D. P. の適合性を示す。第5節は不確実性下の資産選択と消費計画の古典的モデルを，応用例として取りあげる。さらに不確実性下の D. P. の方法の代わりに，ラグランジュ乗数法を採用する Chow の主張を第6節において説明した後に，第7節

では同様の方法論を最適制御論について検討し，最後に第8節において，それらの方法が流動性制約下の耐久財と非耐久財の消費計画モデルへ適用される。

このように本稿は D. P. の方法とその消費計画への応用と言う，二重の意味での解説的展望を試みている。もちろん動的最適化の D. P. の方法はその他の経済計画へも適用可能である。

2.　確実性下の D. P. の最適性原理

本節では D. P. の基礎理論の導出を大学生が容易に理解し得るように説明しよう。

［a］　1制御変数と1状態変数の D. P.

計画の出発時（0期）の状態変数の値は既知で，それを y_0 と記し，任意の t 期（$1 \leq t \leq T$）における状態方程式は

$$y_t = ay_{t-1} + bx_t + z_t \qquad (1 \leq t \leq T) \qquad (1)$$

で表現されると考える。ここに T は最終期を示し，

$y_t = t$ 期の状態変数

$x_t = t$ 期の制御変数

$z_t = t$ 期の外生変数（制御変数を除く）

である。a と b は固定係数で，変数と係数はすべてスカラーである。目的関数を

$$\underset{(x_t)_1{}^T}{\mathrm{Min}}\ J(T, 1) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} w(y_t) \qquad (2)$$

と書こう。$(x_t)_1{}^T$ は $t = 1, 2, \cdots, T$ の x_t の全体を意味する。そして

$$w(y_t) = py_t + \frac{1}{2} qy_t{}^2 \qquad (3)$$

と想定する。ただし $q > 0$，また

β ＝時間割引係数（$0 < \beta < 1$）

である。(2)式は t の1から T までの全期間の $w(y_t)$ の割引現在価値 $J(T, 1)$ を最小化するように x_t（$t = 1, 2, \cdots, T$）を決定することを意味し，その際に状

態式(1)が常に満たされている必要がある。もちろん初期値 y_0 から出発しなければならない。

ところで状態式(1)を任意の τ 期 ($1\leq\tau\leq T$) 以降で逐次代入すると，$t(\geq\tau)$ について次式が成立する。

$$y_t=a^{t-(\tau-1)}y_{\tau-1}+\sum_{k=\tau}^{t}a^{t-k}(bx_k+z_k) \tag{4}$$

上記の最適計画が 1 期から T 期までの全期間にわたっているとき，途中の任意の τ 期から T 期までの成果も最適でなければならない，というのがベルマン (Bellman) の最適性原理 (optimality principle) であり，これを表現するとつぎのようになる。任意の τ ($2\leq\tau\leq T$) について，(4)式の制約の下で

$$\operatorname*{Min}_{(x_t)_\tau{}^T} J(T,\tau)\equiv\sum_{t=\tau}^{T}\beta^{t-\tau}w(y_t) \tag{5}$$

を成立させる問題。

この τ 期以降の最適問題の解としての $J(T,\tau)$ を価値関数 (value function) と呼び，$v_\tau(y_{\tau-1})$ と記そう。すなわち

$$v_\tau(y_{\tau-1}) \equiv \operatorname*{Min}_{(x_t)_\tau{}^T} J(T,\tau) \tag{6}$$

(5)式の $J(T,\tau)$ を書き換えて，

$$\begin{aligned} J(T,\tau)&=w(y_\tau)+\beta w(y_{\tau+1})+\cdots+\beta^{T-\tau}w(y_T)\\ &=w(y_\tau)+\beta J(T,\tau+1) \end{aligned} \tag{7}$$

となるので，(6) の定義は，

$$\begin{aligned} v_\tau(y_{\tau-1})&=\operatorname*{Min}_{x_\tau}\{w(y_\tau)+\beta\operatorname*{Min}_{(x_t)_{\tau+1}{}^T}J(T,\tau+1)\}\\ &=\operatorname*{Min}_{x_\tau}\{w(y_\tau)+\beta v_{\tau+1}(y_\tau)\} \end{aligned} \tag{8}$$

と記すことができる。ここでは y_τ が(1)式に従って x_τ に直接に依存することを考慮している。(8)式をベルマン方程式と呼ぶ。

$\tau=T, T-1, T-2,\cdots$の時間逆順に，x_τ を(8)式によって算定しよう。まず $\tau=T$ と置くと，$J(T,T+1)$ は存在しないので，(3)式を代入して，

$$v_T(y_{T-1})=\operatorname*{Min}_{x_T} w(y_T)$$

$$=\underset{x_T}{\mathrm{Min}}\left\{py_T+\frac{1}{2}qy_T{}^2\right\} \tag{9a}$$

ここで $t=T,\ \tau=T$ の場合の(4)式

$$y_T=ay_{T-1}+bx_T+z_T \tag{4'a}$$

を考慮に入れると，(9a)の極値条件は

$$0=\frac{d}{dx_T}\left\{py_T+\frac{1}{2}qy_T{}^2\right\}$$

$$=pb+qb(ay_{T-1}+bx_T+z_T)$$

になる。従って最適な x_T は

$$x_T=-b^{-1}(ay_{T-1}+z_T+pq^{-1}) \tag{10a}$$

である。そして(10a)の x_T を(9a)式へ代入して整理すると，

$$v_T(y_{T-1})=-\frac{1}{2}p^2q^{-1} \tag{9'a}$$

になる。

つぎに(8)式において $\tau=T-1$ と置いて，(3)式と(9'a)を考慮すると，次式が得られる。

$$v_{T-1}(y_{T-2})=\underset{x_{T-1}}{\mathrm{Min}}\{w(y_{T-1})+\beta v_T(y_{T-1})\}$$

$$=\underset{x_{T-1}}{\mathrm{Min}}\left\{py_{T-1}+\frac{1}{2}qy_{T-1}{}^2-\frac{1}{2}\beta p^2q^{-1}\right\} \tag{9b}$$

ここで $t=T-1,\ \tau=T-1$ の場合の(4)式

$$y_{T-1}=ay_{T-2}+bx_{T-1}+z_{T-1} \tag{4'b}$$

を(9b)へ代入して極値条件を求めると，

$$x_{T-1}=-b^{-1}(ay_{T-1}+z_{T-1}+pq^{-1}) \tag{10b}$$

になる。以下同様にして最適解の一般形として，

$$x_t=-b^{-1}(ay_{t-1}+z_t+pq^{-1}) \qquad (t=1,2,\cdots,T) \tag{10}$$

が得られる。y_0 は所与であるので，(1)式と(10)式を用いて，すべての x_t 値が求められる。

［b］ m 制御変数と n 状態変数の D. P.

これまでと違って制御変数 x は m 次元ベクトル，状態変数 y は n 次元

ベクトル（$m, n\geq 2$）である場合を考え，従って状態式は(1)の代わりに，

$$y_t=Ay_{t-1}+Bx_t+z_t \qquad (1\leq t\leq T) \tag{11}$$

と表される。（本稿では特にことわらない限り，ベクトルは列ベクトルを意味する。）ここに A は $n\times n$ 行列，B は $n\times m$ 行列，z_t は n 次元ベクトルであり，A と B の各要素は固定係数を示す。そして目的関数を形式上は(2)と同様に

$$\underset{(x_t)_1{}^T}{\mathrm{Min}}\ J(T, 1)\equiv\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}w(y_t) \tag{12}$$

と書くが，ここに

$$w(y_t)=P'y_t+\frac{1}{2}y_t'Qy_t \tag{13}$$

であって，P は n 次元ベクトル，Q は $n\times n$ 行列で，$'$（プライム）は転置を意味し（故に P' は行ベクトル），特に Q は正値定符号の対称行列であり，P と Q の各要素は固定である。y_0 が既知である時に，状態式(11)の制約下で(12)の極小問題を解くために，[a] の場合と同様に，途中の τ 期より後のみをとっても最適とならなければならないという最適性原理を当てはめよう。それはつぎの問題にまとめられる。

任意の τ 期（$1\leq\tau\leq T$）において

$$y_t=A^{t-(\tau-1)}y_{\tau-1}+\sum_{k=\tau}^{t}A^{t-k}(Bx_k+z_k) \tag{14}$$

の制約の下に

$$\underset{(x_t)_\tau{}^T}{\mathrm{Min}}\ J(T, \tau)\equiv\sum_{t=\tau}^{T}\beta^{t-\tau}w(y_t) \tag{15}$$

を解く問題。

この問題を解くには，[a] と同様に $J(T, \tau)$ の価値関数を

$$v_\tau(y_{\tau-1})\equiv\underset{(x_t)_\tau{}^T}{\mathrm{Min}}\ J(T, \tau) \tag{16}$$

と定義して，ベルマン方程式

$$v_\tau(y_{\tau-1})=\underset{x_\tau}{\mathrm{Min}}\{w(y_\tau)+\beta v_{\tau+1}(y_\tau)\} \tag{17}$$

を活用する。その際，(13)式と(14)式を考慮に入れ，時間逆順に(17)を満たす

x_τ を求める。

まず $\tau=T$ の時には，

$$v_T(y_{T-1})=\underset{x_T}{\mathrm{Min}}\left\{P'y_T+\frac{1}{2}y_T'Qy_T\right\} \tag{18a}$$

および

$$y_T=Ay_{T-1}+Bx_T+z_T \tag{11'}$$

によって，極値条件は

$$0=\frac{d}{dx_T}\left\{P'y_T+\frac{1}{2}y_T'Qy_T\right\}$$

$$=P'B+(Ay_{T-1}+Bx_T+z_T)'QB$$

になり，これより最適値 x_T はつぎのように求められる。

$$x_T=-(B'QB)^{-1}B'[Q(Ay_{T-1}+z_T)+P] \tag{19a}$$

この x_T を(18a)式右辺へ挿入して整理すると，

$$v_T(y_{T-1})=\left[P'+\frac{1}{2}(Ay_{T-1}+z_T)'Q\right]S_T(Ay_{T-1}+z_T)-\frac{1}{2}h_T \tag{20a}$$

になる。ここに

$$S_T\equiv I-B(B'QB)^{-1}B'Q \tag{21a}$$

$$h_T\equiv P'B(B'QB)^{-1}B'P \tag{22a}$$

と置いている。

つぎに(17)式において $\tau=T-1$ と置き，(13)式と(20a)を考慮に入れると，下記のようになる。

$$v_{T-1}(y_{T-2})=\underset{x_{T-1}}{\mathrm{Min}}\{w(y_{T-1})+\beta v_T(y_{T-1})\}$$

$$=\underset{x_{T-1}}{\mathrm{Min}}\left\{P_{T-1}'y_{T-1}+\frac{1}{2}y_{T-1}'Q_{T-1}y_{T-1}+g_{T-1}\right\} \tag{18b}$$

ただし

$$P_{T-1}\equiv(I+\beta A'S_T')P+\beta A'QS_Tz_T \tag{23b}$$

$$Q_{T-1}\equiv Q+\beta A'QS_TA \tag{24b}$$

$$g_{T-1}\equiv\beta\left[P'S_Tz_T+\frac{1}{2}z_T'QS_Tz_T-\frac{1}{2}h_T\right] \tag{25b}$$

と置いている。故に

$$y_{T-1}=Ay_{T-2}+Bx_{T-1}+z_{T-1}$$

を考慮すると，(18b)の極値条件は

$$P_{T-1}'B+(Ay_{T-2}+Bx_{T-1}+z_{T-1})'Q_{T-1}B=0$$

になり，これから最適値 x_{T-1} はつぎのように求められる。

$$x_{T-1}=-(B'Q_{T-1}B)^{-1}B'[Q_{T-1}(Ay_{T-2}+z_{T-1})+P_{T-1}] \tag{19b}$$

この x_{T-1} を(18b)式右辺へ挿入して整理すると，

$$v_{T-1}(y_{T-2})=\left[P_{T-1}'+\frac{1}{2}(Ay_{T-2}+z_{T-1})'Q_{T-1}\right]$$

$$\times S_{T-1}(Ay_{T-2}+z_{T-1})-\frac{1}{2}h_{T-1}+g_{T-1} \tag{20b}$$

になる。ここに

$$S_{T-1}\equiv I-B(B'Q_{T-1}B)^{-1}B'Q_{T-1} \tag{21b}$$

$$h_{T-1}\equiv P_{T-1}'B(B'Q_{T-1}B)^{-1}B'P_{T-1} \tag{22b}$$

と置いている。

さらに $\tau=T-2$ と置いた(17)式は，同様の仕方で，

$$v_{T-2}(y_{T-3})=\min_{x_{T-2}}\left\{P_{T-2}'y_{T-2}+\frac{1}{2}y_{T-2}'Q_{T-2}y_{T-2}+g_{T-2}\right\} \tag{18c}$$

に書き換えられる。ここに

$$P_{T-2}\equiv P+\beta A'S_{T-1}'P_{T-1}+\beta A'Q_{T-1}S_{T-1}z_{T-1} \tag{23c}$$

$$Q_{T-2}\equiv Q+\beta A'Q_{T-1}S_{T-1}A \tag{24c}$$

$$g_{T-2}\equiv\beta\left[P_{T-1}'S_{T-1}z_{T-1}+\frac{1}{2}z_{T-1}'Q_{T-1}S_{T-1}z_{T-1}-\frac{1}{2}h_{T-1}+g_{T-1}\right] \tag{25c}$$

と置かれている。そして(18c)の最適解 x_{T-2} は

$$x_{T-2}=-(B'Q_{T-2}B)^{-1}B'[Q_{T-2}(Ay_{T-3}+z_{T-2})+P_{T-2}] \tag{19c}$$

と求められる。この値を(18c)へ代入して整理すると，

$$v_{T-2}(y_{T-3})=P_{T-2}'S_{T-2}(Ay_{T-3}+z_{T-2})$$

$$+\frac{1}{2}(Ay_{T-3}+z_{T-2})'Q_{T-2}S_{T-2}(Ay_{T-3}+z_{T-2})$$

$$-\frac{1}{2}h_{T-2}+g_{T-2} \tag{20c}$$

が得られる。ここに

$$S_{T-2}\equiv I-B(B'Q_{T-2}B)^{-1}B'Q_{T-2} \tag{21c}$$

$$h_{T-2}\equiv P_{T-2}'B(B'Q_{T-2}B)^{-1}B'P_{T-2} \tag{22c}$$

である。

かくして一般に最適解 x_t $(t=1,2,\cdots,T)$ はつぎのように算定することができる。

$$x_t=-(B'Q_tB)^{-1}B'[Q_t(Ay_{t-1}+z_t)+P_t] \tag{19'}$$

ここに

$$Q_T\equiv Q,\ P_T\equiv P$$

で，他の Q_t と P_t は $t=T-1, T-2,\cdots,1$ の順に次式で計算すればよい。

$$Q_t=Q+\beta A'Q_{t+1}S_{t+1}A \tag{24'}$$

$$P_t=P+\beta A'S_{t+1}'P_{t+1}+\beta A'Q_{t+1}S_{t+1}z_{t+1} \tag{23'}$$

ただし

$$S_t\equiv I-B(B'Q_tB)^{-1}B'Q_t \tag{21'}$$

である。

3.　Diamond の2世代最適消費計画

前節の確実性下の D. P. を経済問題へ適用した例として，Diamond (1972) の生産制御経済での2世代消費モデルがあり，本節では彼の第1モデルの完全制御経済 (fully controlled economy) を解説する。2期間だけ生きる個人の今期と次期の消費を，全世代間の効用を極大化するように制御するための最適条件を求めるに当たって，彼は消費財の種類を複数と想定したが，我われは簡単化のためにそれを1種類と考える。故に t 世代の代表的個人が t 期と $t+1$ 期にそれぞれ消費する量を a_t と b_t で示し，その個人の効用水準を u_t とする。すなわち

$$u_t = u(a_t, b_t) \tag{26}$$

t 世代の人口を L_t と記し，それは毎期 $n-1$ の率で増加するものとする。故につぎの関係が成り立つ。

$$L_t = nL_{t-1} = n^t L_0 \tag{27}$$

t 世代の総効用は $L_t u_t$ であり，これの現在（0期）の人口 L_0 一人当たりの値を，β の時間割引率で現在価値に引き戻して，永遠の将来を視野に入れて集計した全現在価値

$$\sum_{t=1}^{\infty} n^t \beta^t u_t \tag{28}$$

を最大化することが目的である。ただし

$$0 < n\beta < 1$$

と想定する。

t 期の資本 K_t を生産する要素として，$t-1$ 期の資本と t 期の純産出 Y_t が必要で，その生産関数 F はこれらの要素について1次同次であるもの（規模の収穫不変）と想定し，つぎのように表す。

$$K_t = F(K_{t-1}, Y_t) \tag{29}$$

ここで

$$k_t \equiv K_t / L_{t+1}, \qquad y_t \equiv Y_t / L_t$$

と記し，(29)式の両辺を $L_{t+1}(=nL_t)$ で除すと，

$$k_t = n^{-1} F(k_{t-1}, y_t) \tag{29'}$$

になる。

また純生産は当該期に生存している2世代の消費に等しくなければならないので，

$$Y_t = a_t L_t + b_{t-1} L_{t-1} \tag{30}$$

の制約式を置く。(30)式の両辺を L_t で除すと，

$$y_t = a_t + n^{-1} b_{t-1} \tag{30'}$$

になる。(30')を(29')式へ代入して次式を得る。

$$k_t = n^{-1}F(k_{t-1},\ a_t + n^{-1}b_{t-1}) \tag{31}$$

初期条件として k_0 と b_0 が与えられた時，(31)の状態式の下で，目的

$$\underset{(a_t,\, b_t)_1{}^\infty}{\mathrm{Max}}\ J(1) \equiv \sum_{t=1}^{\infty} (n\beta)^{t-1} u(a_t,\ b_t) \tag{32}$$

を達成するように，a_t と b_t $(t=1, 2, \cdots)$ を決定したい。その際，k_t は状態変数で，a_t と b_t は制御変数であり，当面の問題はD. P. によって解くことができる。すなわち任意の τ 期における価値関数を

$$v_\tau(k_{\tau-1},\ b_{\tau-1}) \equiv \underset{(a_t, b_t)_\tau{}^\infty}{\mathrm{Max}}\ J(\tau) \tag{33}$$

と定義する。ここに

$$J(\tau) \equiv \sum_{t=\tau}^{\infty} (n\beta)^{t-\tau} u(a_t,\ b_t)$$

$$= u(a_\tau,\ b_\tau) + n\beta J(\tau+1) \tag{34}$$

であるので，

$$v_\tau(k_{\tau-1},\ b_{\tau-1}) = \underset{a_\tau,\ b_\tau}{\mathrm{Max}}\{u(a_\tau,\ b_\tau) + n\beta v_{\tau+1}(k_\tau,\ b_\tau)\} \tag{33'}$$

と書き換えられる。故に(33′)の最大問題の極値条件はつぎのようになる((30′)を考慮に入れて)。

$$0 = \frac{\partial u(\tau)}{\partial a_\tau} + \beta \frac{\partial v(\tau)}{\partial k_\tau}\ \frac{\partial F(\tau)}{\partial y_\tau} \tag{35a}$$

$$0 = \frac{\partial u(\tau)}{\partial b_\tau} + n\beta \frac{\partial v(\tau)}{\partial b_\tau} \tag{35b}$$

ただしここでは

$$u(\tau) \equiv u(a_\tau,\ b_\tau), \qquad v(\tau) \equiv v_{\tau+1}(k_\tau, b_\tau),$$

$$F(\tau) \equiv F(k_{\tau-1},\ y_\tau) \tag{36}$$

と表示している。(35a)式と(35b)式よりそれぞれ最適消費量 a_τ と b_τ が決まる。それらの値を(33′)式へ代入して，1期進めた $v_{\tau+1}$ の最適価値関数は下記のように表すことができる。

$$v_{\tau+1}(k_\tau,\ b_\tau) = u(\tau+1) + n\beta v_{\tau+2}(n^{-1}F(k_\tau,\ a_{\tau+1} + n^{-1}b_\tau),\ b_{\tau+1}) \tag{37}$$

この式を k_τ および b_τ について偏微分して，

$$\frac{\partial v(\tau)}{\partial k_\tau}=\beta\frac{\partial v(\tau+1)}{\partial k_{\tau+1}}\ \frac{\partial F(\tau+1)}{\partial k_\tau} \tag{38}$$

$$\frac{\partial v(\tau)}{\partial b_\tau}=n^{-1}\beta\frac{\partial v(\tau+1)}{\partial k_{\tau+1}}\ \frac{\partial F(\tau+1)}{\partial y_{\tau+1}} \tag{39}$$

が得られる（(36)の表示方法に従って)。

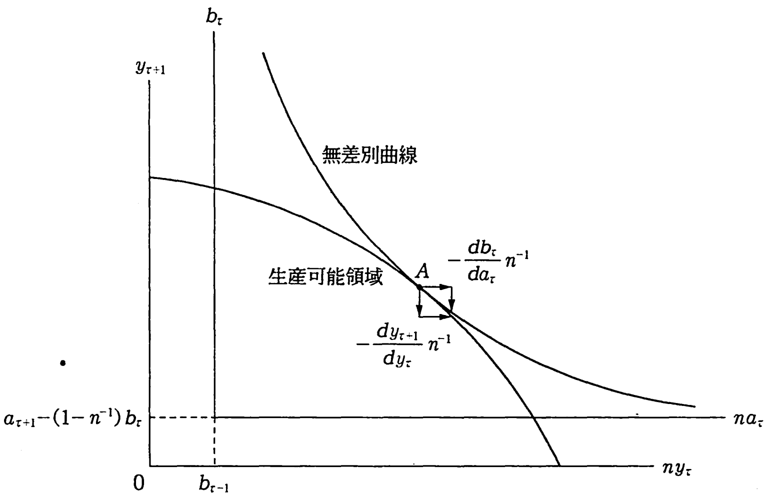
(35a)式へ(38)を，また(35b)式へ(39)を，それぞれ代入して，その結果の比をとると，次の関係が導出される。

$$\frac{\dfrac{\partial u(\tau)}{\partial a_\tau}}{\dfrac{\partial u(\tau)}{\partial b_\tau}}=\frac{\dfrac{\partial F(\tau+1)}{\partial k_\tau}\ \dfrac{\partial F(\tau)}{\partial y_\tau}}{\dfrac{\partial F(\tau+1)}{\partial y_{\tau+1}}} \tag{40}$$

この式は，左辺の a_τ と b_τ の限界代替率 $-db_\tau/da_\tau$ が，右辺の y_τ と $y_{\tau+1}$ の限界変形率 $-dy_{\tau+1}/dy_\tau$ に等しくなるように，2世代間の消費と生産が（下図のA点で）決定されることを意味する。下図では(30′)式も考慮する。

また(35b)式へ(39)を代入したものと，(35a)式を1期進めて，β 倍したものとは，右辺第2項が相等しくなるので，つぎの関係が成立する。

$$\frac{\partial u(\tau)}{\partial b_\tau}=\beta\frac{\partial u(\tau+1)}{\partial a_{\tau+1}} \tag{41}$$



(41)式は，$\tau+1$ 期に消費している若者の限界効用を τ 期価値へ引き戻した大きさが，$\tau+1$ 期に消費している年配者による τ 期の限界効用に等しいことを意味している。

4. 最大原理と D. P. の類似性

D. P. は最大原理 (Maximum Principle) と深く関連することを，Dixit(1990) のつぎのような独特な（しかし一般性もある）例を使って説明しよう。

y_t は t 期ストックで，状態変数として扱われ，x_t は t 期のフローで，制御変数とされ，両方共ベクトルと考える。Q を生産関数として，t 期の生産を $Q(y_t, x_t, t)$ と表す。ここに t を関数内にパラメータとして入れたのは，外生的技術変化を示すためである。

そして生産とストックの関係式

$$y_{t+1}=y_t+Q(y_t, x_t, t) \tag{42}$$

が一つの状態方程式と想定される。その他にストックとフローや消費などに課せられる不等式の制約を，まとめて下記のように記す。

$$G(y_t, x_t, t)\leq 0 \tag{43}$$

当然に G はベクトル関数である。(42)と(43)の制約下で最大化の対象としての目的関数を

$$\sum_{t=0}^{T} F(y_t, x_t, t) \tag{44}$$

とする。状態変数の初期値 y_0 が与えられたときに，上記の問題を $t=0, 1, \cdots, T$ にわたって解くには，λ_t を(43)式に対するラグランジュ乗数とし，π_{t+1} を y_{t+1} のシャドー・プライスとして，全期間のラグランジュ関数 L をつぎのように定義する。

$$L\equiv\sum_{t=0}^{T}\{F(y_t, x_t, t)+\pi_{t+1}[y_t+Q(y_t, x_t, t)-y_{t+1}]$$
$$-\lambda_t G(y_t, x_t, t)\} \tag{45}$$

x_t と y_t について下記の 4 条件が満たされれば，それらは最適解である。(村田(1993b), pp. 214-5 を参照。)

条件 1 ：(42)式と(43)式が成立すること。

条件 2 ：$\lambda_t G(y_t, x_t, t)=0,\ \ \lambda_t \geq 0$ (46)

条件 3 ：$\dfrac{\partial L}{\partial x_t}=0 \qquad (t=0, 1, \cdots, T)$

条件 4 ：$\dfrac{\partial L}{\partial y_t}=0 \qquad (t=1, 2, \cdots, T)$

(45)式を考慮して条件 3 を書き換えるとつぎのようになる。

$$F_x(y_t, x_t, t)+\pi_{t+1}Q_x(y_t, x_t, t)-\lambda_t G_x(y_t, x_t, t)=0 \tag{47}$$

また条件 4 も同様に下記のように書き換えられる。

$$\pi_t=F_y(y_t, x_t, t)+\pi_{t+1}(1+Q_y(y_t, x_t, t))-\lambda_t G_y(y_t, x_t, t) \tag{48}$$

以上は最大原理による極値条件である。

つぎに当面の最大問題を D. P. によって解こう。(8)式にならって，任意の t 期の価値関数 $v(y_t, t)$ は

$$v(y_t, t)=\operatorname*{Max}_{x_t}\{F(y_t, x_t, t)+v(y_{t+1}, t+1)\} \tag{49}$$

になり，その際に(42)式と(43)式が制約式として満たされなければならない。まず $t=T$ においては，(49)式は

$$v(y_T, T)=\operatorname*{Max}_{x_T}\ F(y_T, x_T, T) \tag{50a}$$

となり，その際の制約式は，y_{T+1} を所与として，

$$y_T+Q(y_T, x_T, T)=y_{T+1}, \quad G(y_T, x_T, T)\leq 0 \tag{51}$$

である。ここで得られる最適値 x_T を(50a)式へ代入して，最大価値関数 $v(y_T, T)$ が得られ，これを用いて，$t=T-1$ における(49)式

$$v(y_{T-1}, T-1)=\operatorname*{Max}_{x_{T-1}}\{F(y_{T-1}, x_{T-1}, T-1)+v(y_T, T)\} \tag{50b}$$

の解を求める。以下時間逆順に逐次に(49)式の極値条件を満たすように x_t を求める。F, G および Q が§2[a]におけるような簡単な形の時には，この解析解の導出は容易であるが，状態変数 y_t が 2 次元以上のベクトルであれば，

算定式はやっかいなものになる。

いま(49)式の中の y_{t+1} へ(42)の状態式を挿入すると，(49)の最大問題はつぎのように書きなおされる。

$$\operatorname*{Max}_{x_t}\{F(y_t, x_t, t)+v(y_t+Q(y_t, x_t, t), t+1)\} \tag{52}$$

この時の制約条件は(43)式のみである。従って，ラグランジュ乗数 λ_t をこの制約へ付けて，1階の極値条件

$$F_x(y_t, x_t, t)+v_y(y_{t+1}, t+1)Q_x(y_t, x_t, t)-\lambda_t G_x(y_t, x_t, t)=0 \tag{53}$$

が導出される。(53)式における $v_y(y_{t+1}, t+1)$ を，シャドー・プライス π_{t+1} と認識すると，(53)式は(47)式と同じになる。x_t の最適解を(49)へ代入すると，それは最大価値関数として等式になるので，これに(46)の条件式を追加して，

$$v(y_t, t)=F(y_t, x_t, t)+v(y_{t+1}, t+1)-\lambda_t G(y_t, x_t, t) \tag{54}$$

と書き，この式を y_t について微分しよう[1)]。その際に y_{t+1} が y_t に依存する(42)式を考慮に入れる。その結果として次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} v_y(y_t, t)=&F_y(y_t, x_t, t)+v_y(y_{t+1}, t+1)(1+Q_y(y_t, x_t, t))\\ &-\lambda_t G_y(y_t, x_t, t) \end{aligned} \tag{55}$$

ここで $v_y(y_t, t)$ をシャドー・プライス π_t で置き換えると，(55)式は(48)式に等しくなる。かくして以前に最大原理を適用した結果と全く同等の極値条件が D. P. によって導出されることが判明した。

注意すべきは最大原理が確実性の下でのみ適用可能であるのに対して，D. P. は確実性の下でも不確実性の下でも適用可能であるということである。もし，t 期において y_{t+1} が不確実性を伴うならば，y_{t+1} についての確率分布を想定して，$v(y_{t+1}, t+1)$ の数学的期待値

$$\mathrm{E}[v(y_{t+1}, t+1)]\equiv\int v(y_{t+1}, t+1)\phi(y_{t+1}|y_t, x_t)dy_{t+1} \tag{56}$$

1）(54)式左辺の y_t についての微係数は，(54)式右辺の y_t についての偏微係数に等しい（包絡線（envelope）定理により）。

をとって，ベルマン方程式を

$$v(y_t, t)=\underset{x_t}{\mathrm{Max}}\{F(y_t, x_t, t)+\mathrm{E}[v(y_{t+1}, t+1)]\} \tag{57}$$

と定義すればよい。(56)式において ϕ は y_{t+1} の密度関数を示し，積分は y_{t+1} の分布全領域にわたって行われる。

5. Samuelson の最適資産選択・消費計画

Samuelson (1969) は t 期資産A_t から t 期消費 C_t を行った残余資産 (A_t-C_t) を，危険資産と安全資産に分割して運用し，その 1 期後の元利合計を $t+1$ 期資産 A_{t+1} と考える。すなわち

$$A_{t+1}=(q_t\omega_t+(1+r)(1-\omega_t))(A_t-C_t) \tag{58}$$

の状態方程式を想定する。ここに ω_t は t 期の残余資産を危険資産へ投下する割合を，q_t はその危険資産収益率を，そして r は安全資産収益率を示しており，r は確定的であるが q_t は確率変数であって，その分布関数を $P(q)$ と記せば，q_t の期待値はつぎのようになる。

$$\mathrm{E}(q_t)=\int_0^\infty q_t dP(q_t) \tag{59}$$

もちろん ω_t の範囲は下記の通りである。

$$0\leq\omega_t\leq1 \tag{60}$$

当面の消費者の消費効用を $U(C_t)$ として，初期資産 A_0 が与えられ，最終期（T 期）後に遺産を残さないという条件

$$A_T-C_T=0 \tag{61}$$

を付して，毎期(58)式を満たしながら，各期の消費効用の現在価値の期待値を最大化するように，C_t と ω_t を $t=0, 1, \cdots,\ T-1$ にわたって決定したい。つまり β を時間割引係数として，

$$\underset{(C_t,\,\omega_t)_0{}^{T-1}}{\mathrm{Max}} J(T, 0)\equiv\mathrm{E}[\sum_{t=0}^{T}\beta^t U(C_t)] \tag{62}$$

が目的関数である。ここに E は数学的期待値で，(58)式より得られる C_t が

$$C_t=A_t-A_{t+1}((1+r)(1-\omega_t)+q_t\omega_t)^{-1} \tag{63}$$

となって，それが確率変数の q_t に依存しているので，(59)と同様の期待値がとられる。

当面の問題を最終期の1期前の $T-1$ 期から始めると，

$$\underset{C_{T-1},\,\omega_{T-1}}{\mathrm{Max}}\ J(T,\ T-1)\equiv \mathrm{E}[U(C_{T-1})+\beta U(C_T)] \tag{62'}$$

の問題を，つぎの制約条件の下で考えればよい。

$$C_{T-1}=A_{T-1}-A_T((1+r)(1-\omega_{T-1})+q_{T-1}\omega_{T-1})^{-1} \tag{63'}$$

$$A_T=C_T \tag{61'}$$

そして A_{T-1} を所与とする。(63′)と(61′)より

$$C_T=(q_{T-1}\omega_{T-1}+(1+r)(1-\omega_{T-1}))(A_{T-1}-C_{T-1}) \tag{58'}$$

を得るので，q_{T-1} は C_T の決定にのみ関わっている。従って(62′)はつぎのように書き換えられる。

$$v_T(A_{T-1})\equiv \underset{C_{T-1},\,\omega_{T-1}}{\mathrm{Max}}\ \{U(C_{T-1})$$
$$+\beta\mathrm{E}U[(q_{T-1}\omega_{T-1}+(1+r)(1-\omega_{T-1}))(A_{T-1}-C_{T-1})]\} \tag{64}$$

(64)式の最大問題の極値条件は，その右辺の{　}内を C_{T-1} と ω_{T-1} についてそれぞれ偏微分してゼロと置いたものである。すなわち，

$$0=U'(C_{T-1})-\beta\mathrm{E}[U'(C_T)\cdot\{q_{T-1}\omega_{T-1}+(1+r)(1-\omega_{T-1})\}] \tag{65}$$

$$0=\mathrm{E}[U'(C_T)\cdot(A_{T-1}-C_{T-1})(q_{T-1}-1-r)] \tag{66}$$

(66)式の中の C_T へ(58′)を代入すると，全体として q_{T-1} に依存することが分かり，従って(66)式の期待値は(59)と同様の形をとる。

いま効用関数を特定化して，等弾力的限界効用 (isoelastic marginal utility) の場合について考える。すなわち

$$U(C)=\eta^{-1}C^{\eta}\qquad (0<\eta<1) \tag{67}$$

と置こう。このとき $1-\eta$ は限界効用の弾力性を示す。(67)の効用関数を(64)式へ代入すると，つぎのようになる（ただし添字の $T-1$ を省略)。

$$v_T(A_{T-1})=\underset{C,\,\omega}{\mathrm{Max}}\ \eta^{-1}\{C^{\eta}+\beta\mathrm{E}[(A-C)^{\eta}(q\omega+(1+r)(1-\omega))^{\eta}]\}$$
$$=\underset{C}{\mathrm{Max}}\ \eta^{-1}\{C^{\eta}+\beta(A-C)^{\eta}$$

$$\times\underset{\omega}{\mathrm{Max}}\int_0^{\infty}((1+r)(1-\omega)+\omega q)^{\eta}dP(q)\} \tag{68}$$

この最大問題の１階条件のうち，まず ω についてのものを求めると，それは

$$0=\int_0^{\infty}(q-1-r)((1-\omega)(1+r)+\omega q)^{\eta-1}dP(q) \tag{69}$$

である。この(69)式を満たす ω を ω^* と記した後に，C について次式の極値条件を求めればよい。

$$\underset{C}{\mathrm{Max}}\{C^{\eta}+\beta(A-C)\cdot\int_0^{\infty}(1+r+(q-1-r)\omega^*)^{\eta}dP(q)\} \tag{70}$$

ここで

$$(1+r^*)^{\eta}\equiv\int_0^{\infty}(1+r+(q-1-r)\omega^*)^{\eta}dP(q) \tag{71}$$

と記すと，r^* は ω^* の時の平均資産収益率を意味する。(71)を考慮しながら(70)式の極値条件を求めると，

$$C^{\eta-1}=\beta(1+r^*)^{\eta}(A-C)^{\eta-1} \tag{72}$$

になり，これより最適値の C がつぎのように導出される（添字の $T-1$ を顕示して)。

$$C_{T-1}{}^*=\frac{\alpha_{T-1}}{1+\alpha_{T-1}}A_{T-1} \tag{73}$$

ここに

$$\alpha_{T-1}\equiv(\beta(1+r^*)^{\eta})^{\frac{1}{\eta-1}} \tag{74}$$

と置いている。

$C_{T-1}{}^*$ と$\omega_{T-1}{}^*$ を(68)式へ代入した最大価値関数 $v_T(A_{T-1})$ を，一般的効用関数に戻して表すと，つぎのようになる((58′)を考慮)。

$$v_T(A_{T-1})=U(C_{T-1}{}^*)+\beta\mathrm{E}[U(C_T{}^*)] \tag{75}$$

ここに $C_T{}^*$ は(58′)式の中の C_{T-1} へ $C_{T-1}{}^*$ を，また ω_{T-1} へ $\omega_{T-1}{}^*$ を代入したときの C_T である。$C_{T-1}{}^*$ はA_{T-1} に依存し（(73)により)，また $C_T{}^*$ は(58′)によって A_{T-1} に依存するので，(75)式が成り立つ。

つぎに T-2期の価値関数は，(64)にならって，

$$v_{T-1}(A_{T-2}) \equiv \underset{C_{T-2},\omega_{T-2}}{\mathrm{Max}} \{U(C_{T-2})+\beta \mathrm{E}[U(C_{T-1}^*)+\beta U(C_T^*)]\} \tag{64'}$$

と定義できる。従って(75)を(64′)へ代入すると，

$$v_{T-1}(A_{T-2}) = \underset{C_{T-2},\,\omega_{T-2}}{\mathrm{Max}} \{U(C_{T-2})+\beta \mathrm{E}[v_T(A_{T-1})]\} \tag{76}$$

が得られる。さらに

$$A_{T-1} = (q_{T-2}\omega_{T-2}+(1+r)(1-\omega_{T-2}))(A_{T-2}-C_{T-2}) \tag{58''}$$

を考慮すると，次式が成立する。

$$v_{T-1}(A_{T-2}) = \underset{C_{T-2}}{\mathrm{Max}} \{U(C_{T-2})+\beta \underset{\omega_{T-2}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{E}[v_T(A_{T-1})]\} \tag{76'}$$

もし効用関数を特定化して(67)を採用すれば，具体的に(76′)の最大化を達成するような C_{T-2} を，(73)と同じように求めることができる。

以下同様に時間逆順に逐次的に進行するので，一般に t 期における価値関数は

$$v_{t+1}(A_t) = \underset{C_t}{\mathrm{Max}} \{U(C_t)+\beta \underset{\omega_t}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{E}[v_{t+2}(A_{t+1})]\} \tag{77}$$

と表される。このように ω_t について，C_t から独立にその最適値を決定でき，その後に C_t が最適に決定される。(当面の生涯モデルを D.P. により解く手順を，桐谷（1986, pp. 117-120）は詳細に説明しているので，参照されたい。)

なお，Epstein-Zin (1989) は Samuelson (1969) の最適資産選択・消費計画モデルを多数資産の場合に拡大して，D. P. の方法で資産選択と消費決定の分離性を明示している (村田(1993a)を参照)。

6.　Chow の D. P. 抜き動的最適化のラグランジュ乗数法

確率的 D. P. による解法は，一般にベルマン方程式の中の価値関数を求めることを必要とする。その1例として，前節の(75)式は最終期における最大価値関数を示し，時間逆順に逐次にこのような価値関数を求めなければ，最適解を全期間にわたって得ることはできない。ところが，価値関数の導出は困難であるが，その導関数は比較的容易に導出できる事例に直面することが多いので，Chow (1992) はそのような場合に D. P. の手法によらずに，適用可能なより簡

単な解法を提唱している。彼の用いた例を §2[b]にならってつぎのように書こう。

$$\underset{(x_t)_0^T}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{E}_0[\sum_{t=0}^{T}\beta^t w(y_t,\ x_t)] \tag{78}$$

ただし y_0 と y_{T+1} は所与で，つぎの制約式が満たされなければならない。

$$y_{t+1}=f(y_t,\ x_t)+\varepsilon_{t+1} \tag{79}$$

ここに，β は時間割引係数を示し，

$y_t=n$ 次元ベクトルの状態変数

$x_t=m$ 次元ベクトルの制御変数

$\mathrm{E}_t=t$ 期の情報に基づく条件付き期待値演算子

$\varepsilon_t=$独立同分布 (iid) の偶然変数ベクトル

ただし $\mathrm{E}_t\varepsilon_{t+1}=0$，そして分散・共分散行列 $\mathrm{cov}(\varepsilon_t)=V$(定数行列) である。また w と f は微分可能な凹関数と想定される。

この問題を解く Chow の方法は，ラグランジュ乗数 λ_t (n 次元ベクトル) を導入し ($\lambda_{T+1}=0$ と想定)，

$$L=\mathrm{E}_0[\sum_{t=0}^{T}\{\beta^t w(y_t,\ x_t)-\beta^{t+1}\lambda_{t+1}'(y_{t+1}-f(y_t,\ x_t)-\varepsilon_{t+1})\}] \tag{80}$$

のラグランジュ関数を定義し，L の x_t, y_t およびλ_t ($t=T, T-1, \cdots, 0$) についての偏導関数をゼロに置いて，その結果得られる式の解を求める。その3式とは ($t=T,\ T-1, \cdots, 0$ について)，

$$w_x(y_t,\ x_t)+\beta f_x(y_t,\ x_t)\mathrm{E}_t\lambda_{t+1}=0 \tag{81}$$

$$\lambda_t=w_y(y_t,\ x_t)+\beta f_y(y_t,\ x_t)\mathrm{E}_t\lambda_{t+1} \tag{82}$$

および(79)式である。(w_x は x についての w の偏微分を意味する。その他も同様。) x_t の最適値は y_t の情報に条件付けられて，逐次的に算定され，(81)式と(82)式における条件付き期待値は，そのことを表す E_t になっている。(79)式を代入した(81)式と(82)式の連立方程式から，時間逆順に最適解を導出することができ，その手法は確実性下の最大原理の適用 (§4を参照) と類似している。

他方，当面の問題を D. P. で解くには，ベルマン方程式を

$$v_t(y_t)=\underset{x_t}{\mathrm{Max}}\{w(y_t, x_t)+\beta \mathrm{E}_t v_{t+1}(y_{t+1})\} \tag{83}$$

と書き，価値関数 v_t を微分可能と想定し，(83)式の{　}内を x_t について微分してゼロと置く。その際に(79)式を考慮に入れるので，

$$w_x(y_t, x_t)+\beta f_x(y_t, x_t)\mathrm{E}_t[dv_{t+1}/dy_{t+1}]=0 \tag{84}$$

が極値条件である。(84)式での dv_{t+1}/dy_{t+1} を λ_{t+1} と記せば，それは(81)式に等しくなる。v_{t+1} の関数が既知である場合にのみ，(84)式を x_t について解くことができ，例えばそれを $x=g_t(y_t)$ と書く。つぎにこの x_t を(83)式へ代入して

$$v_t(y_t)=w(y_t, g_t(y_t))+\beta\ \mathrm{E}_t v_{t+1}(f(y_t, g_t(y_t))) \tag{85}$$

を得，これを逐次計算の $t-1$ 期の式へ代入して $x_{t-1}=g_{t-1}(y_{t-1})$ を求める。以下同様。

前述の Chow の方法は価値関数を求めることを避けて，その代わりに(82)式を活用する。いま(82)式が無いと仮定して，(81)式を x_t について解き，その解を $\hat{x}_t(y_t, \mathrm{E}_t\lambda_{t+1})$ と書いて，$\hat{x}_t$ を $w(y_t, x_t)$ の中の x_t へ代入して，

$$v(y_t)=w(y_t, \hat{x}_t(y_t, \mathrm{E}_t\lambda_{t+1})) \tag{86}$$

と表し，λ_{t+1} を $dv(y_{t+1})/dy_{t+1}$ と置けば，(86)式は(85)式の最大価値関数に近いものになり，価値関数の算定が必要になる。Chow は(82)式を追加することによって，価値関数ではなく，λ_t を陽表的に求める方法を採用する。実際に(82)式を解くことは，(85)式を解くことよりも容易である。なぜならば一つの関数の導関数は，元の関数よりも単純であるからで，例えば $\lambda=dv/dy$ が線形関数であれば，v は2次関数であり，また(85)式は w と f の関数を含むが，(82)式はそれらの導関数から構成されている。

ところで，Chow のラグランジュ乗数法を使って，x_t の最適解を数値計算するには，λ_t を y_t の関数と考え，それを1次式（最適解 $x_t=x_t^*$ の近傍での）

$$\lambda_t=Hy_t+h \tag{87}$$

と置く。そして或る仮設の最適解 $x_t=x_t^*$ の近傍において，$w_x(y_t, x_t)$ は1次

近似式

$$w_x(y_t, x_t) = K_1x_t + K_2y_t + k_1 \tag{88}$$

になるものと想定する。ただし H, K_1, K_2 は定数行列，h と k_1 は定数ベクトルである。$f(y_t, x_t)$ は経済学への応用例では，(11)式のように線形の場合が多いので，ここでもその形を再び採用する。すなわち

$$f(y_t, x_t) = Ay_t + Bx_t + z \tag{89}$$

A と B は(11)式でのそれらと同じであるが，z は定数ベクトルである。最後に

$$w_y(y_t, x_t) = k_2 \tag{90}$$

となる簡単な場合を考える。以下では Chow (1993) に従って，最適解 x_t を1次式

$$x_t = Gy_t + g \tag{91}$$

と想定して，G と g を求めよう。まず第1ステップとして，(81)式へ(87)式と(88)式を代入し，(79)式，(89)式と$\mathrm{E}_t\varepsilon_{t+1}=0$ を考慮に入れると，

$$K_1x_t + K_2y_t + k_1 + \beta B'\{H(Ay_t + Bx_t + z) + h\} = 0 \tag{92}$$

になる。(92)式を x_t について解き，(91)式に対応させると，つぎの関係が成り立つ。

$$G = -(K_1 + \beta B'HB)^{-1}(K_2 + \beta B'HA) \tag{93}$$

$$g = -(K_1 + \beta B'HB)^{-1}[k_1 + \beta B'(Hz + h)] \tag{94}$$

第2ステップとして，(87)式，(89)式，(91)式および $\mathrm{E}_t\varepsilon_{t+1}=0$ を組み合わせて，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t\lambda_{t+1} &= H(Ay_t + Bx_t + z) + h \\ &= H[(A + BG)y_t + Bg + z] + h \end{aligned} \tag{95}$$

を得る。(90)と(95)の両式を(82)式へ代入し，(89)式を考慮に入れた結果を，(87)式に対応させると，つぎの関係が成立する。

$$H = \beta A'H(A + BG) \tag{96}$$

$$h = \beta A'HBg + k_2 + \beta A'(Hz + h) \tag{97}$$

第3ステップとして，(93)式と(96)式を連立させて G と H を求めることができる。得られた H を(94)式と(97)式へ代入し，これらの2式より g と h を導出する。このようにして得られた G と g を(91)式へ代入すると，最適解 $x_t=\hat{x}_t$ が求められる。この $\hat{x}_t$ が初めに仮設された x_t^* と違っていると，(88)式の1次近似式の係数行列を訂正する必要があり，その場合には x_t^* を新たに得られた $\hat{x}_t$ で代替して，再び前述の計算プロセスによって最適解を算定する。このような逐次計算によって，最終的に仮設の最適解と算出された最適解とが一致する。

7.　最適制御論における D. P. とラグランジュ乗数法

前節での Chow の方法は，最適制御論において D. P. を使うか，ラグランジュ乗数法によるかの，最適解導出方法に共通する問題である。本節では典型的な確率的最適制御の公式の導出について，両方法を適用する (Murata (1982), Chap. 5 を参照)。

前節の(79)式に相当する状態方程式として，

$$y_t=Ay_{t-1}+Bx_t+\varepsilon_t \qquad (t=1,2,\cdots,T) \tag{98}$$

を制約式と考え，つぎの2次形式の目的関数の最小化を図る。

$$J(y_0)\equiv \mathrm{E}_0\{y_T{}'\Gamma y_T+\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1}{}'\Xi y_{t-1}+x_t{}'\Phi x_t)\} \tag{99}$$

ここに y_0 は所与であり，そして Γ, Ξ および Φ は定数対称行列で正値定符号とし，そのほかの行列と変数ベクトルは従前通りとする。特に偶然変数ベクトル ε_t は iid であって，

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t)=0, \qquad \mathrm{cov}(\varepsilon_t)=V\ (\text{定数行列}) \tag{100}$$

を想定する。いま(98)式を(99)式の y_t へ代入して，(99)式を書きなおすとつぎのようになる。

$$J(y_0)=\mathrm{E}_0\{\sum_{t=1}^{T}g_t(y_{t-1},\ x_t,\ \varepsilon_t)\}+y_0{}'\Xi y_0 \tag{99'}$$

ここに g_t $(t=1,2,\cdots,T-1)$ は

$$g_t(y_{t-1},\ x_t,\ \varepsilon_t) \equiv (Ay_{t-1}+Bx_t+\varepsilon_t)'\Xi(Ay_{t-1}+Bx_t+\varepsilon_t)+x_t'\Phi x_t \qquad (101a)$$

と置かれ，また g_T は

$$g_T(y_{T-1},\ x_T,\ \varepsilon_T) \equiv (Ay_{T-1}+Bx_T+\varepsilon_T)'\Gamma(Ay_{T-1}+Bx_T+\varepsilon_T) + x_T'\Phi x_T \qquad (101b)$$

と置かれている。

いま $J^*(y_0)$ を(99′)における $J(y_0)$ の最小のものとすると，それはつぎのように書くことができる。

$$J^*(y_0)=\underset{x_1}{\mathrm{Min}}[\mathrm{E}_0\{g_1(y_0,\ x_1,\ \varepsilon_1)+\underset{x_2}{\mathrm{Min}}[\mathrm{E}_1\{g_2(y_1,\ x_2,\ \varepsilon_2)+\cdots + \underset{x_T}{\mathrm{Min}}[\mathrm{E}_{T-1}g_T(y_{T-1},\ x_T,\ \varepsilon_T)]\}]\cdots\}]+y_0'\Xi y_0 \qquad (102)$$

さらは新たな定義式を下記のように書こう。

$$J(T,\ T) \equiv \mathrm{E}_{T-1}g_T(y_{T-1},\ x_T,\ \varepsilon_T) \qquad (103a)$$

$$J(T,\ T-1) \equiv \mathrm{E}_{T-2}\{g_{T-1}(y_{T-2},\ x_{T-1},\ \varepsilon_{T-1})+\underset{x_T}{\mathrm{Min}}\ J(T,\ T)\} \qquad (103b)$$

$$\vdots$$

$$J(T,t) \equiv \mathrm{E}_{t-1}\{g_t(y_{t-1},\ x_t,\ \varepsilon_t)+\underset{x_{t+1}}{\mathrm{Min}}\ J(T,t+1)\} \qquad (103c)$$

$$\vdots$$

$$J(T,\ 1) \equiv \mathrm{E}_0\{g_1(y_0,\ x_1,\ \varepsilon_1)+\underset{x_2}{\mathrm{Min}}\ J(T,\ 2)\}+y_0'\Xi y_0 \qquad (103d)$$

ここで(101a, b)式を考慮しつつ，D. P. の最適性原理を適用して，時間逆順に $x_T,\ x_{T-1},\cdots$ を逐次的に導出する。まず第1に $J(T,\ T)$ を x_T について偏微分し，ゼロと置いて，極値条件を

$$0=\partial J(T,\ T)/\partial x_T$$

$$=2(B'\Gamma Bx_T+B'\Gamma Ay_{T-1}+\Phi x_T) \qquad (104a)$$

と導出する。（この導出について Murata(1982), p. 113 を参照。）(104a)式より x_T の最適値 $\hat{x}_T$ は

$$\hat{x}_T=-K_Ty_{T-1} \qquad (105a)$$

と求められる。ここに K_T は

$$K_T \equiv (\Phi+B'\Gamma B)^{-1}B'\Gamma A \qquad (106a)$$

である。(105a)の $\hat{x}_T$ を(103a)式の中の x_T へ代入すると，最小の $J(T,\ T)$ は

つぎのように算定される2)。

$$J^*(T,T)=\mathrm{E}_{T-1}\{((A-BK_T)y_{T-1}+\varepsilon_T)'\Gamma((A-BK_T)y_{T-1}+\varepsilon_T)\}$$
$$+y_{T-1}'K_T'\Phi K_Ty_{T-1}$$
$$=y_{T-1}'[(A-BK_T)'\Gamma(A-BK_T)$$
$$+K_T'\Phi K_T]y_{T-1}+\mathrm{tr}(\Gamma V) \qquad (103'\mathrm{a})$$

第2に(103b)式の $J(T,T-1)$ の中へ(103′a)を代入すると，次式が得られる。

$$J(T,T-1)=\mathrm{E}_{T-2}\{(Ay_{T-2}+Bx_{T-1}+\varepsilon_{T-1})'S_{T-1}$$
$$\times(Ay_{T-2}+Bx_{T-1}+\varepsilon_{T-1})\}+\mathrm{tr}(\Gamma V)+x_{T-1}'\Phi x_{T-1}$$
$$=(Ay_{T-2}+Bx_{T-1})'S_{T-1}(Ay_{T-2}+Bx_{T-1})$$
$$+\mathrm{tr}(S_{T-1}V)+\mathrm{tr}(\Gamma V)+x_{T-1}'\Phi x_{T-1} \qquad (103'\mathrm{b})$$

ただし

$$S_{T-1}\equiv(A-BK_T)'\Gamma(A-BK_T)+K_T'\Phi K_T+\Xi$$
$$=A'\Gamma(A-BK_T)+\Xi$$

ここでは(106a)が考慮に入れられた。(103′b)式の $J(T,T-1)$ を x_{T-1} について偏微分してゼロと置けば，極値条件が下記のように得られる。

$$0=\partial J(T,T-1)/\partial x_{T-1}$$
$$=2(B'S_{T-1}Bx_{T-1}+B'S_{T-1}Ay_{T-2}+\Phi x_{T-1}) \qquad (104\mathrm{b})$$

(104b)式より x_{T-1} の最適値 $\hat{x}_{T-1}$ は

$$\hat{x}_{T-1}=-K_{T-1}y_{T-2} \qquad (105\mathrm{b})$$

と求まり，ここに K_{T-1} は

$$K_{T-1}\equiv(\Phi+B'S_{T-1}B)^{-1}B'S_{T-1}A \qquad (106\mathrm{b})$$

である。

2）下記の公式が利用される（Murata（1982), pp. 113-4 を参照)。

$$\mathrm{E}(\zeta'M\varepsilon)=(\mathrm{E}\zeta)'M(\mathrm{E}\varepsilon)+\mathrm{tr}(M\,\mathrm{cov}(\varepsilon,\zeta)) \qquad (1^*)$$

ただし M は定数正方行列，ζ と ε は確率ベクトル，そして $\mathrm{cov}(\varepsilon,\zeta)$ は有限の共分散行列である。

さらに第3に(105b)の $\hat{x}_{T-1}$ を(103'b)式の中の x_{T-1} へ代入すると，$J(T, T-1)$ の最適なもの $J^*(T, T-1)$ がつぎのように得られる。

$$J^*(T, T-1)=y_{T-2}'\{(A-BK_{T-1})'S_{T-1}(A-BK_{T-1})$$
$$+K_{T-1}'\Phi K_{T-1}\}y_{T-2}+\mathrm{tr}((\Gamma+S_{T-1})V) \qquad (103''\mathrm{b})$$

以下同様に時間逆順に逐次的に x_t を導出し，つぎの一般則（最適制御則と呼ばれる）が得られる。すなわち x_t の最適解 $\hat{x}_t$ は

$$\hat{x}_t=-K_t y_{t-1} \qquad (t=1, 2, \cdots, T) \qquad (107)$$

であって，ここに

$$K_t\equiv(\Phi+B'S_tB)^{-1}B'S_tA \qquad (108\mathrm{a})$$

$$S_{t-1}=A'S_t(A-BK_t)+\Xi \qquad (t=2, 3, \cdots, T) \qquad (109\mathrm{a})$$

$$=A'(S_t-S_tB(\Phi+B'S_tB)^{-1}B'S_t)A+\Xi \qquad (109'\mathrm{a})$$

$$S_T=\Gamma \qquad (109'')$$

である。このとき目的関数 $J(y_0)$ はその最小値として

$$J^*(y_0)=\underset{x_1}{\mathrm{Min}}\ J(T, 1)$$
$$=y_0'S_0y_0+\mathrm{tr}((S_1+\cdots+S_T)V) \qquad (110)$$

になる。(109'a)式は行列リカッチ (Riccati) 差分方程式と呼ばれる。

これまでは有限視野の最適制御問題を D. P. の方法によって解を求めた。いま計画期間を無限へ伸長すれば，S_t は定数行列 S へ収束する。従って無限視野に立って以前の問題を書き換えると次のようになる。

$T=\infty$ と置いた(98)式の制約の下に，

$$J(y_0)\equiv \mathrm{E}_0\sum_{t=1}^{\infty}(y_{t-1}'\Xi y_{t-1}+x_t'\Phi x_t) \qquad (111)$$

を最小化する問題の最適制御則は，y_0 を所与として，

$$x_t=-Ky_{t-1} \qquad (t=1, 2, \cdots) \qquad (112)$$

であり，ここに

$$K\equiv(B'SB+\Phi)^{-1}B'SA \qquad (108\mathrm{b})$$

$$S\equiv A'S(A-BK)+\Xi \qquad (109\mathrm{b})$$

$$=(A-BK)'S(A-BK)+K'\Phi K+\Xi \qquad (109'\mathrm{b})$$

となる。そして S はリカッチ行列と呼ばれ，それは(109′a)式の定常解である(その解法については例えば McGrattan (1990) を参照)。

ところで Turnovsky (1976) は，当面の無限視野の最小問題を解くのに，ラグランジュ乗数法を用いた。彼は最初に最適な制御変数 x_t の形として

$$x_t=-Ky_{t-1} \qquad (113)$$

を仮定して，この未定係数のままの(113)式を制約式の(98)式へ代入する。従って

$$y_t=(A-BK)y_{t-1}+\varepsilon_t \qquad (114)$$

そして y_t の漸近的 (asymptotic) 期待値を ζ と記そう。すなわち

$$\mathrm{E}y_t=\mathrm{E}y_{t-1}=\zeta \qquad (115)$$

また同様に y_ty_t' と $\varepsilon_t\varepsilon_t'$ の漸近的期待値

$$\mathrm{E}(y_ty_t')=Y,\quad \mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t')=V \qquad (116)$$

を定義すると，(114)式を用いて下記の漸近的関係を得る。

$$Y=(A-BK)Y(A-BK)'+V \qquad (117)$$

他方，Turnovsky は x_t をつぎの漸近的目的関数を最小にするように決定しようとする。

$$J=\mathrm{E}\{y_t'\Xi y_t+x_t'\Phi x_t\} \qquad (118)$$

そして(118)式へ注2)の公式(1*)を適用して，それは

$$J=(\mathrm{E}y_t')\Xi(\mathrm{E}y_t)+(\mathrm{E}x_t')\Phi(\mathrm{E}x_t)+\mathrm{tr}(\Xi\,\mathrm{cov}(y_t)+\Phi\,\mathrm{cov}(x_t)) \qquad (118')$$

へ変わる。ただし $\mathrm{cov}(y_t)$ と $\mathrm{cov}(x_t)$ はそれぞれの変数ベクトルの分散・共分散行列である。(113)式と(115)式を考慮に入れると，$\mathrm{cov}(x_t)$ は

$$\mathrm{cov}(x_t)=\mathrm{E}\{(x_t-\mathrm{E}x_t)(x_t-\mathrm{E}x_t)'\}$$
$$=K\,\mathrm{E}\{(y_{t-1}-\zeta)(y_{t-1}-\zeta)'\}K'=K\,\mathrm{cov}(y_{t-1})\,K'$$

になる。また

$$\mathrm{cov}(y_t)=\mathrm{cov}(y_{t-1})=Y-\zeta\zeta'$$

であるので，次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{cov}(x_t)=KYK'-K\zeta\zeta'K'$$

これらの漸近的関係をすべて(118′)の目的関数へ代入して整理すると，次式が得られる[3)]。

$$\begin{aligned}J&=\zeta'\Xi\zeta+\zeta'K'\Phi K\zeta+\mathrm{tr}[\Xi(Y-\zeta\zeta')+\Phi(KYK'-K\zeta\zeta'K')]\\&=\mathrm{tr}[(\Xi+K'\Phi K)Y]\end{aligned}\tag{119}$$

かくして当面の問題は(117)式の制約の下に(119)の J 値を最小化することである。これをラグランジュ関数に定式化すると

$$L=\mathrm{tr}[(\Xi+K'\Phi K)Y]+\mathrm{tr}[S\{(A-BK)Y(A-BK)'+V-Y\}]\tag{120}$$

と表現される。ここに S はラグランジュ乗数行列（対称行列と想定）である。L を K と Y についてそれぞれ偏微分してゼロと置くと，

$$0=\partial L/\partial K=2(\Phi K-B'SA+B'SBK)Y\tag{121a}$$

$$0=\partial L/\partial Y=(\Xi+K'\Phi K)'+(A-BK)'S(A-BK)-S\tag{122a}$$

になり，(121a)式より

$$K=(\Phi+B'SB)^{-1}B'SA\tag{121b}$$

が得られ，また(122a)式より

$$S=(A-BK)'S(A-BK)+K'\Phi K+\Xi\tag{122b}$$

を得る。明らかに(121b)と(122b)はそれぞれ(108b)と(109′b)に等しい。かくして D. P. の方法による解とラグランジュ乗数法による解は，無限視野の最適制御論においては同一であることが分かった。

8.　流動性制約下の耐久財と非耐久財の最適消費

前節で述べた D. P. とラグランジュ乗数法との関連性は，無限生存期間の最適消費計画へ適用する場合にも認知されることはもちろんである。本節では特にその分析モデルとして，村田(1993c)の流動性制約下の耐久財と非耐久財の

3）$\mathrm{tr}(\Xi\zeta\zeta')=\zeta'\Xi\zeta$ と $\mathrm{tr}(\Phi K\zeta\zeta'K')=\zeta'K'\Phi K\zeta$ を考慮に入れる。

最適消費を取りあげ，その主要点を以下にまとめておこう。

いま平均的家計の消費支出を C_t と D_t に二分し，

$C_t = t$ 期の非耐久財（サービスを含む）への消費支出

$D_t = t$ 期の耐久財への消費支出

とする。耐久消費財の物的減耗率を毎期一定の δ として，t 期末の耐久消費財ストックを K_t と記すと，

$$K_t=(1-\delta)K_{t-1}+D_t \tag{123}$$

の関係が成り立つ。耐久消費財の t 期における相対価格（非耐久消費財で表示）を p_t と記せば，金融資産の定義（予算制約式）はつぎのようになる。

$$A_t=(1+r_{t-1})A_{t-1}+Y_t-C_t-p_tD_t \qquad (t=1, 2, \cdots, T) \tag{124}$$

ここでの変数は実質表示で下記の通りである。

$A_t = t$ 期末の金融資産

$Y_t = t$ 期の労働所得（税引き後）

$r_{t-1}=A_{t-1}$ についての1期間の事後的な純収益率（税引き後）

この場合，流動性制約式として

$$A_t+\varphi p_tK_t\geq 0 \qquad (t=1, 2, \cdots, T-1) \tag{125}$$

を想定しよう。ここに φ は耐久消費財ストック K_t に対して融資する割合を示していて，

$$0\leq\varphi\leq 1$$

の範囲内の或る定数である。φp_tK_t は t 期の消費支出についての借入れ限度額を示す。

(125)式を書き換えると，(124)式を考慮して，

$$C_t+p_tD_t\leq(1+r_{t-1})A_{t-1}+Y_t+\varphi p_tK_t \qquad (t=1, \cdots, T-1) \tag{125$'$}$$

になる。(125′)式へ(123)の関係を代入して得られる

$$C_t+p_t(1-\varphi)K_t\leq(1+r_{t-1})A_{t-1}+p_t(1-\delta)K_{t-1}+Y_t \tag{126}$$

が当面の流動性制約式である $(t=1, \cdots, T-1)$。t 期首に存在する資産 Z_t は

$$Z_t\equiv(1+r_{t-1})A_{t-1}+Y_t+p_t(1-\delta)K_{t-1} \tag{127}$$

と定義される。この Z 変数を用いて，(126)の流動性制約式は

$$Z_t-C_t-p_t(1-\phi)K_t\geq 0 \qquad (t=1,2,\cdots,T-1) \tag{126$'$}$$

と表現され，また(124)の予算制約式はつぎのように書かれる。

$$A_t=Z_t-C_t-p_tK_t \qquad (t=1,2,\cdots,T) \tag{124$'$}$$

この式の A_t を1期遅らせて(127)式の右辺への代入した

$$Z_t=(1+r_{t-1})(Z_{t-1}-C_{t-1})+Y_t-(r_{t-1}+\delta-(1-\delta)\pi_t)p_{t-1}K_{t-1} \tag{128}$$

が新しい予算制約式と考えられる ($t=1,\cdots,T$)。ここに π_t は耐久消費財価格の t 期における上昇率$(p_t-p_{t-1})/p_{t-1}$ を示す。

生涯終期 T においては，消費支出についての借入れは不可能であるから，T 期の流動性制約式は，(124′)式において $t=T$ と置いて，

$$A_T=Z_T-C_T-p_TK_T\geq 0 \tag{129}$$

と表すことができる。

予算制約式(128)および流動性制約式(126′)と(129)の下に，非耐久財の消費と耐久消費財ストックの両方に依存する効用関数（t 期の）

$$U(t)\equiv U(C_t,K_t) \tag{130}$$

の生涯期間の全期待効用の現在価値

$$\mathrm{E}_t\sum_{\tau=0}^{T-t}\beta^{\tau}U(t+\tau) \tag{131}$$

を最大にするための必要条件を D. P. の手法によって導出しよう。

まず $t=T$ のときの価値関数を

$$V_T(Z_T)\equiv\underset{C_T,K_T}{\mathrm{Max}}\,\{U(C_T,K_T)+\lambda_T(Z_T-C_T-p_TK_T)\} \tag{132}$$

と置き，クーン＝タッカー条件

$$\lambda_T\geq 0,\ \ \lambda_T(Z_T-C_T-p_TK_T)=0 \tag{133}$$

が追加される。(132)式右辺の最大化の1階条件はつぎの二つになる。

$$U_C(T)=\lambda_T \tag{134a}$$

$$U_K(T)=p_T\lambda_T \tag{134b}$$

ここに $U_C(T)$ と $U_K(T)$ は $U(C_T,K_T)$ をそれぞれ C_T と K_T で偏微分した

導関数を示す。消費の未飽満の状態を想定するので，消費の限界効用は正値をとり，従って $\lambda_T>0$ である。ゆえに(133)の条件によって

$$Z_T=C_T+p_TK_T \tag{129'}$$

が得られ，これを(132)式へ考慮すれば，(134a, b)を満たす C_T と K_T について

$$V_T(Z_T)=U(C_T,\ K_T) \tag{132'}$$

となる。ここで耐久財のストックを当該期において所与とみなし， C_T だけが Z_T をパラメータとして変化するものと考え，(132′)式の両辺を Z_T で微分すると，(129′)の関係を用いて，

$$V_T'(Z_T)=U_C(T) \tag{135}$$

が成立する。

つぎに $t=T-1$ のときの価値関数を

$$V_{T-1}(Z_{T-1})\equiv\underset{C_{T-1},\,K_{T-1}}{\mathrm{Max}}\{U(C_{T-1},\ K_{T-1})+\beta\mathrm{E}_{T-1}V_T(Z_T)$$
$$+\lambda_{T-1}(Z_{T-1}-C_{T-1}-p_{T-1}(1-\varphi)K_{T-1})\} \tag{136}$$

と定義し，同時にクーン=タッカー条件

$$\lambda_{T-1}\geq0,\ \lambda_{T-1}(Z_{T-1}-C_{T-1}-p_{T-1}(1-\varphi)K_{T-1})=0 \tag{133'}$$

および予算制約式

$$Z_T=(1+r_{T-1})(Z_{T-1}-C_{T-1})+Y_T-p_{T-1}$$
$$\times(r_{T-1}+\delta-(1-\delta)\pi_T)K_{T-1} \tag{128'}$$

が充足されなければならない。故に(136)式右辺の最大化の1階条件は，(135)と(128′)式を考慮に入れて，

$$U_C(T-1)=(1+r_{T-1})\beta\mathrm{E}_{T-1}U_C(T)+\lambda_{T-1} \tag{137a}$$

$$U_K(T-1)=p_{T-1}(\delta+r_{T-1}-(1-\delta)\pi_T)\beta\mathrm{E}_{T-1}U_C(T)$$
$$+p_{T-1}(1-\varphi)\lambda_{T-1} \tag{137b}$$

になる。そして(137a)の λ_{T-1} を(137b)式へ代入して次式のように書き換えることができる。

$$U_K(T-1)=p_{T-1}[U_C(T-1)-(1-\delta)\beta\mathrm{E}_{T-1}\{(1+\pi_T)U_C(T)\}$$

$$-\varphi\lambda_{T-1}] \tag{137'b}$$

いま(137a, b)の両式から決まる最適消費 C_{T-1} と最適耐久消費財ストック K_{T-1} を(136)式へ挿入して，両辺を Z_{T-1} について微分する。その場合 C_{T-1} はパラメータとしての Z_{T-1} に依存することに注意し，また(128')を考慮しながら $V_T'(Z_T)\cdot(\partial Z_T/\partial Z_{T-1})$ の計算を行う。

$$\begin{aligned} V_{T-1}'(Z_{T-1}) &= U_C(T-1)C_{T-1}'(Z_{T-1}) \\ &\quad +\beta(1+r_{T-1})(1-C_{T-1}'(Z_{T-1}))\mathrm{E}_{T-1}V_T'(Z_T) \\ &\quad +\lambda_{T-1}(1-C_{T-1}'(Z_{T-1})) \end{aligned} \tag{138}$$

この(138)へ(135)式の関係と(137a)の λ_{T-1} を代入して，

$$V_{T-1}'(Z_{T-1}) = U_C(T-1) \tag{138'}$$

に整理することができる。これは注1)の包絡線定理の1例である。以下，任意の t 期 $(t=T-2,\cdots,2,1)$ について(137a)，(137'b)と同様の最大化の1階条件が導出される。すなわち $t=1,2,\cdots,T-1$ についてつぎの2式

$$U_C(t)=\beta(1+r_t)\mathrm{E}_tU_C(t+1)+\lambda_t \tag{139a}$$

$$U_K(t)=p_t[U_C(t)-(1-\delta)\beta\mathrm{E}_t\{(1+\pi_{t+1})U_C(t+1)\}-\varphi\lambda_t] \tag{139b}$$

を満たすように C_t と K_t は決定され，同時に

$$V_t'(Z_t)=U_C(t) \tag{140}$$

が成立する。

(139a, b)の最適性の諸条件はまた，Chah-Ramey-Starr (1991) が行ったように，無限生存期間を想定して，異時点間ラグランジュ関数から直接に導出することが出来る。それは

$$\mathrm{Max}\ \mathrm{E}_1\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{1-t}\{U(C_t, K_t)+\lambda_t(Z_t-C_t-p_t(1-\varphi)K_t)\} \tag{141}$$

を C_t, K_t $(t=1,2,\cdots)$ について最大化するために，各 t の C_t と K_t でそれぞれ偏微分してゼロと置くという方法を用いる。その際に，(124')と(128)から得られる

$$C_{t+1}=(1+r_t)(Z_t-C_t)$$

$$+Y_{t+1}-p_t(\delta+r_t-(1-\delta)\pi_{t+1})K_t-p_{t+1}K_{t+1}-A_{t+1} \tag{142}$$

に配慮する。またクーン=タッカー条件

$$\lambda_t \geq 0,\ \lambda_t(Z_t-C_t-p_t(1-\varphi)K_t)=0 \tag{143}$$

も充足されなければならない。

(141)式のうち t 期における最適解を求めるのに関連する諸項を抜き出すと，それは

$$U(C_t, K_t)+\beta \mathrm{E}_t U(C_{t+1}, K_{t+1})+\lambda_t(Z_t-C_t-p_t(1-\varphi)K_t) \tag{141'}$$

であるので，(141')を C_t で偏微分し（(141)に配慮しながら），ゼロと置くと，(139a)式が得られる。また(141')を K_t で偏微分してゼロと置き，(139)の λ_t を代入すると，(139b)式が導出されるのである。

以上の分析によって，無限視野での計画においては，D. P. よりもラグランジュ乗数法の方が最適解の導出を容易に行えることが明らかになった。

参考文献

〔1〕Bellman, R., *Dynamic Programming,* Princeton Univ. Press, 1957.

〔2〕Chah, E. Y., V. A. Ramey and R. M. Starr, "Liquidity Constraints and Intertemporal Consumer Optimization: Theory and Evidence from Durable Goods," *NBER Working Paper,* No. 3907 (1991).

〔3〕Chow, G. C., "Dynamic Optimization without Dynamic Programming," *Economic Modelling,* 9 (1992), pp. 3-9.

〔4〕Chow, G. C., "Optimal Control without Solving the Bellman Equation," *Journal of Economic Dynamics and Control.,* 17 (1993), pp. 621-630.

〔5〕Diamond, P. A., "Taxation and Public Production in a Growth Setting," in J. A. Mirrlees and N. H. Stern, eds., *Models of Economic Growth,* Macmillan, 1973, pp. 215-235.

〔6〕Dixit, A. K., *Optimization in Economic Theory,* 2nd edition, Oxford Univ. Press, 1990.

〔7〕Epstein, L. G. and S. E. Zin, "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework," *Econometrica,* 57 (1989), pp. 937-969.

〔8〕桐谷　維『資産選択の現代理論』，東洋経済新報社，1986年.

〔9〕McGrattan, E. R., "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation," *Journal of Business & Economic Statistics,* 8 (1990), pp. 41-44.

〔10〕Murata, Y., *Optimal Control Methods for Linear Discrete-Time Economic Systems,* Springer-Verlag, 1982.

〔11〕村田安雄「エプスタイン=ヅィンの異時点間効用関数」，関西大学『経済論集』第43巻（1993年 a），pp. 15-34.

〔12〕村田安雄「２地域最適発展の投資配分と期間別貯蓄率」，浜田文雅（編）『アジアの経済開発と経済分析』（文眞堂，1993年 b），第11章，pp. 207-241.

〔13〕村田安雄「流動性制約下の最適消費と耐久消費財」，関西大学『経済論集』第43巻（1993年 c），pp. 467-486.

〔14〕Samuelson, P. A., "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *Review of Economics and Statistics,* 51 (1969), pp. 239-246.

〔15〕Turnovsky, S. J., "Optimal Stabilization Policies for Stochastic Linear Systems," *Review of Economic Studies,* 43 (1976), pp. 191-194.