論　文

現代経済学における数学的方法

神　保　一　郎

経済現象は色々な見地から分析でき，場合によっては数種類の方法の結合によって行われる。例えば，演繹的方法が採られたり帰納的推理が採られたりする。C. Menger と G. V. Schumoller の間に戦わされた Methodestreit などはその古典的な好個の一例である。その他に理論的方法や実証的方法などに区別して考えられるが，ここでは近年，ますますその重要性が増しつつある数学的方法が経済分析にどの様な役割を果しているかを考察してみたい。経済現象を数学の用具を使って分析しようとするのは長い歴史を持っている。Joanne Ceva の De renumaria, quoad fieri potuit geometrice tractata, 1711 は言うに及ばず19世紀には N. F. Canard, J. H. v. Thunen があり，Antonine-Augustin Cournot や Leon Walras などはその後世に与えた影響からみて，大きな mile-stone とも言うべきものであろう。しかし，しばしば以前に使用された「数理経済学」とか「経済数学」といった言葉から類推されるように，数学を使う経済学は決して主流とは長い間，考えられていなかった。物理学では数学を使うのが当然のことと受け止められているのに反し，経済学は文化系の学問であり，それに数学が使用されるのは寧ろ邪道との考えが日本では依然として，その跡を留めている。かつて Paul A. Samuelson はその主著『経済分析の基礎』の扉に J. Willard Gibbs のことば “Mathematics is a Language” を掲げているが，後にその四分の一をけずって “Mathematics is Language” としたけれども，これは文章で経済学を表現しようと，数学で表現しようと，その差がほとんど無い事を表明したものであろう。とわ言うものの，経済現象の中にも数学の tool で表現できないものも幾多あるで

あろう。制度的分析や歴史的現象などはむしろ文章で表現すべきであって，数式や統計数字で全てをカバー出来る場合はむしろ少ない。V. パレートは経済学における数学の役割について次のように述べている。

「一定の人々の行動を平均的に律する数学的法則が与えられたとき，これらの法則が諸結果を決定することである。……理論的見地からは，これらの法則は特に限定しないけれども，われわれが取り上げたものが，抽象的であるばかりではなく，この法則が正しいか否かを判定できる具体性をそなえている法則であるべきである。」（〔12〕 p. 8〜9）これは次の事を述べているものと考えられる。先ず，平均的な人間が数学的に表現できる法則に基づいて行動する事がなくてはならず，変数として選ばれたものは，原則として観察可能であり測定可能でなければならない。第2に，これらの法則から，経済学と関連のある結論を導き出せなければならないのである。

1.　非線型計画法

経済学とは何かについて，経済学者の数ほど定義があるが，ここではその一例としてライオネル・ロビンスのものを取り上げよう。彼によれば「限られた稀少な生産資源を利用して，どの様にして数多くの種類の財貨を生産し，その目的である社会構成要員である色々な人々にそれらを分配するかを研究する」学問であるとしている。このように経済学を理解すれば，多くの問題は条件付き極大に帰属してしまうであろう。ここではその満足を極大にしようとしている消費者を考え，与えられたある貨幣所得を M で表す事としよう。そうするとこの状態は次の式でしめし得るであろう。

$$\max\ u=u(x_1, x_2, \cdots, x_l) \tag{1}$$

subject to

$$M=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_lx_l \tag{2}$$

ここで u は効用指標関数であり，p_i は i 番目の財貨の価格であり，x_i は i 番目の財貨の購入量である。よく知られているようにこの問題はラグランジュ乗

数法で簡単に解くことができる。しかし，経済学の立場からすれば，負の消費量は意味の無いことであり，また価格についても同じことが言える。所得は全額が必ずしも使用されるとは限らない。（1）式は目的関数と呼ばれ，（2）は変数の定義域を制約するものであるから，制約条件式とよばれている。すなわち（1）式以外は必ずしも等式で成立するのではなく，不等式が適当であり，変数も $\boldsymbol{R}_+{}^l$ の領域に限定されなければならない。その為に（1），（2）式は次のように変化しなければならない。

$$\max\ u=u(\boldsymbol{x}) \tag{1'}$$

subject to

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geq 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2,\cdots, x_l]$ は財ベクトルである。また u, g は擬凹関数とする。これはクーン＝タッカーの条件を導くことにより，比較的簡単に解をうる。ここで λ は非負のスカラーであり，μ は任意のスカラーで正，負，あるいはゼロである。

$$L=u(x)+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j g_j(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{s}\mu_j h_j(\boldsymbol{x})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\leq 0,\ x_j\geq 0,\ \text{および}\ x_j\frac{\partial L}{\partial x_j}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\geq 0,\ \lambda_j\geq 0,\ \text{および}\ \lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j}=0$$

また，constraint qualification としてある変数 $\boldsymbol{x}^0\in D$ は次の条件を満足していなければならない。ただし D は（3），（4）式で決定された $\boldsymbol{x}$ の定義域である。

1. 点 $\boldsymbol{x}^0$ は $\boldsymbol{R}_+{}^l$ に所属し

$$g_j(\boldsymbol{x}^0)>0,\ j=1,\cdots, r$$

$$h_j(\boldsymbol{x}^0)=0,\ j=1,\cdots, s \tag{6}$$

2. 任意の $\boldsymbol{x}\in D$ に対して，ベクトル $\nabla\boldsymbol{h}_j$, $j=1,\cdots, s$ は一次独立である。ただし $\nabla\boldsymbol{h}_j=\left[\frac{\partial h_j}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial h_j}{\partial x_l}\right]$ はグラディアント行ベクトルを示している。これ

から一応は経済学的意味を持つ解が得られるのである。

2. 均衡計画法

完全競争の場合には経済主体の数は無限大に限りなく近く，個々の主体の行動は大海の中の一滴の水となって没し去って，市場が決定する価格には何ら影響を与える事ができないのである。ただひたすら価格受容者として行動するのみであって，与えられた価格に対して如何に合理的に行動するかに，その注意を集中させるのである。ここでは情報は完全であって，互いにそれを交換しても何の利得も得ないのである。

さて，現実へ一歩進めるために，モデルの中の主体の数を有限個 n であるとし，主体（例えば消費主体）が直面する財貨の種類の数を l としよう。そうすると i 番目の主体が購入する財ベクトルは

$$\boldsymbol{x}^i=[x_1{}^i, x_2{}^i, \cdots, x_l{}^i] \tag{7}$$

であって，これが自由に決定できる数量である。主体の数が有限であるので，その需要量は，完全に自由に決定できる訳ではない。他の主体が経済の初期保有量（あるいは供給量）の限界ぎりぎりまで購入していれば，この主体の購入しうる量は少なくなる。いかなる財貨も他の主体の行動を十分に考慮した上で，その需要量を決めねばならない。ここで経済全体の財ベクトル

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^n] \tag{8}$$

から i 番目の主体の財ベクトルを除いたものを $\boldsymbol{x}^{-i}$ で示す事とする。そうすれば

$$\boldsymbol{x}^{-i}=[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^{i-1}, \boldsymbol{x}^{i+1}, \cdots, \boldsymbol{x}^n] \in \boldsymbol{R}_+{}^{(n-1)\times l}$$

であって，$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{-i}]$ と示す事ができるであろう。ここで効用指標関数 u: $\boldsymbol{R}_+{}^l \to \boldsymbol{R}_+{}^1$ は凹の実数値関数であるとする。主体 i は自由に $\boldsymbol{x}^i$ を選ぶ事ができず，また通常の制約に従うものとすれば主体 i の財貨 j に対する制約条件式は

$$g_j{}^i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{-i}) \geq 0 \quad (j=1, \cdots, r_i)$$

$h_j^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})=0 \quad (j=1,\cdots,\ s_i)$

となる。ここで $\boldsymbol{x}^{-i}$ は与えられており，i 番目の主体が決定できるのは $\boldsymbol{x}^i$ についてだけである。したがって，ここでの問題は次のように示す事ができるであろう。

$$\max_{x_i}\ u^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i}) \quad (i=1,\cdots,\ n)$$

$s.\ t.$

$$g_j^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})\geq 0 \quad (j=1,\cdots,\ r_i)$$
$$h_j^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})=0 \quad (j=1,\cdots,\ s_i)$$

ここで経済は n 個の財ベクトル $\boldsymbol{x}^i(i=1,\cdots,\ n)$ から成っており，各主体は最良の $\boldsymbol{x}^i$ を選んで自己の目的関数 u^i の最適値を得ようとするのである。ここで ∇ がそれぞれのグラディエント・ベクトル $\nabla u(\boldsymbol{x})^T$, $\nabla g_j(\boldsymbol{x})^T$, $h_j(\boldsymbol{x})^T$ がその転置ベクトルを示しているものとする。そうするとこれらはクーン＝タッカーの条件とホモトピーを利用して比較的簡単に解く事ができる。H をホモトピー関数とすれば，

$$H(\boldsymbol{x},\alpha,\mu,t):=\begin{cases} -(1-t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)+t\nabla f(\boldsymbol{x})^T+\sum_{j=1}^{r}\alpha^+\nabla g_j(\boldsymbol{x})^T \\ \qquad\qquad +\sum_{j=1}^{s}\mu_j\nabla h_j(\boldsymbol{x})^T=0 \\ \alpha^- - g_j(\boldsymbol{x})=0 \qquad j=1,\cdots,\ r_i \\ h_j(\boldsymbol{x})=0 \qquad j=1,\cdots,\ s_i \end{cases}$$

ただし $\alpha^+=(\max\ \{0,\ \lambda\})^3$, $\alpha^-=(\max\ \{0,-\lambda\})^3$

$\boldsymbol{x}^0\in \boldsymbol{R}_+^l$ は constraint qualification を満足する値であって，次の条件を満足しているものとする。

1. $g_j(\boldsymbol{x}^0)>0,\ j=1,\cdots,\ r$

   $h_j(\boldsymbol{x}^0)=0,\ j=1,\cdots,\ s$

2. $\nabla \boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial h_j}{\partial x_n}\right) \ (j=1,\cdots,\ s)$

は1次独立である。

ここで

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$$

$$\alpha^-{}_j=g_j(\boldsymbol{x}_0),\ \alpha^+=0,\qquad j=1,\cdots,r$$

$$\mu_j=0\qquad j=1,\cdots,s$$

を出発点とし，$t\in[0,1]$ を1に近づける事により，ホモトピー関数より解を得るであろう。

ここで主体の数を有限にした効果を見るために $n=2$ としよう。このように相手の反応を十分に考慮した上で，均衡について考えるのはゲーム理論的手法である。$\boldsymbol{x}^i$ を列ベクトルとし $[\boldsymbol{x}^i]^T$ をその行ベクトルとし，A^1，A^2 をそれぞれ以下に示す正方マトリックスとする。$\boldsymbol{x}^1=[x_1{}^1, x_2{}^1]$，$\boldsymbol{x}^2=[x_1{}^2, x_2{}^2]$ を選んだ行動を示すベクトルとする。そうすると，それぞれの主体の目的関数および制約条件式は次のようになるものとする。

$$\max\ u^1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^1A^1\,\boldsymbol{x}^2$$

$$s.\ t.\ \sum_{j=1}^{2}x_j{}^1=1,\ x_j{}^1\geq 0$$

$$\max\ u^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^1A\,\boldsymbol{x}^2$$

$$s.\ t.\ \sum_{j=1}^{2}x_j{}^2=1,\ x_j{}^2\geq 0,\ j=1,\ 2.$$

ここで

$$A^1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

とおいて見よう。

$$\boldsymbol{x}^1=[x_1{}^1, x_2{}^1]=[1,0]$$

あるいは

$$\boldsymbol{x}^1=[x_1{}^1, x_2{}^1]=[0,1]$$

また

$$\boldsymbol{x}^2=[x_1{}^2, x_2{}^2]=[1,0]$$

あるいは

$$\boldsymbol{x}^2=[x_1{}^2,\ x_2{}^2]=[0,\ 1]$$

の純粋戦略を採るものと考えて主体 1，および 2 の利得行列 P を計算すれば次のようになる。

$$P_1=\begin{bmatrix}(\ 2,\ 4) & (\ 1,\ \ 0) \\ (\ 1,\ 0) & (-2,\ -2)\end{bmatrix}$$

ここで括弧の中の最初の数字は主体 1 の利得であり，第 2 の数字は，それぞれの行動を選んだ時の主体 2 の利得である。ここの均衡点は

$$\boldsymbol{x}^1=[1,0],\ \boldsymbol{x}^2=[1,0]$$

であって，他のどのような行動を選ぼうとも双方の利得は低下するであろう。利得行列について，完全な情報が得られれば，両者とも自然にこの均衡点に到達しうるのであって，その間に何らの矛盾はなく，均衡点は安定している。しかし，行列 A が次のように変化した場合にはどうであろうか。

$$A^1=\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}3 & 1 \\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

この場合，利得行列は

$$P_2=\begin{bmatrix}(2,\ 3) & (1,\ 1) \\ (1,\ 1) & (4,\ 4)\end{bmatrix}$$

となる。$\boldsymbol{x}^1=[1,0]$，$\boldsymbol{x}^2=[1,0]$ は 1 つの均衡点である。何故ならば $\boldsymbol{x}^2=[1,0]$ であれば，主体 1 は他の行動 $\boldsymbol{x}^1=[0,1]$ を選べば確実にその利得が低下するからである。また同じ事が主体 2 についても言えるのである。この場合，利得行列について完全な情報が与えられるだけでは，必ずしも十分ではない。互いに情報を交換し，協力が得られた場合のみ，より水準の高い均衡点

$$\boldsymbol{x}^1=[0,1],\ \boldsymbol{x}^2=[0,1]$$

到達できるのである。

$$A^1=\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

である場合には利得行列 P_3 は

$$P_3=\begin{bmatrix}(2,\ 1) & (0,\ 0)\\(0,\ 0) & (1,\ 2)\end{bmatrix}$$

となって両者の利害は完全に対立してしまう。ここで $\boldsymbol{x}^1=[0,\ 1]$ の場合，もし主体2が $\boldsymbol{x}^2=[1,\ 0]$ の行動を選べば，$\boldsymbol{x}^1=[1,\ 0]$，$\boldsymbol{x}^2=[1,\ 0]$，あるいは $\boldsymbol{x}^1=[0,\ 1]$，$\boldsymbol{x}^2=[0,\ 1]$ の場合よりも両者の利得は低下してしまう。この場合，両者が結託を結んで，その利得を再配分するような方法が取られる可能性がある。

経済全体を総合して解き，その最適解に沿って経済を運営してゆこうとするのが経済政策の基本である。すなわち

$$\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$
$$s.\ t.\ g_j{}^i(\boldsymbol{x})\geq 0,\ \ j=1,\cdots,\ r_i$$
$$h_j{}^i=0,\ \ j=1,\cdots,\ s_i,$$

を解くのであって，その最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とする。これに対して理論経済学の立場は

$$\max_{\boldsymbol{x}^i} f(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i}),\ \ i=1,\cdots,\ n$$
$$s.\ t.\ g_j{}^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})\geq 0,\ \ j=1,\cdots,\ r_i$$
$$h_j{}^i(\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^{-i})=0,\ \ j=1,\cdots,\ s_i$$

の解を求め，それを積み上げて経済の目標とするのである。その最適解を $\mathring{\boldsymbol{x}}^i$ とし

$$\mathring{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}\mathring{\boldsymbol{x}}^i$$

とすれば，$\boldsymbol{x}^*=\mathring{\boldsymbol{x}}$ となる保証は複雑な場合には，殆ど無いことが証明されている。そこにマクロ的政策決定と理論的決定に矛盾があるのであって，例え良心的な独裁者が居て，「民の心を心として善良な政策」を行ったとしても，国民から最大の満足を引き出せないのである。

3.　一般均衡理論における解存在とその数

最初1928年に発表され，1947年に完成されたフォン・ノイマンのゲーム理論は当時の経済学の方法に大きな影響を与えた（〔10〕，〔11〕）。第1にはアダム・スミス以来，利己的な利得の追求が結局は「見えざる手」に導かれて最も効率的で各主体の選好水準の高い一般均衡に到達しうるとの神話への訣別であった。この場合，互いに利得が対立したままの均衡に到達する時もあり，そこで適用された原理は条件付き極大ではなくて，ミニ・マックスあるいはマックス・ミニ原理であった。また，市場への参加者が多い場合のは，コアが縮小し，一般均衡と同じ解に到達できるのが証明された。この理論は価格の存在を必要としないので，競争均衡解は必ずしも「見えざる手」の働きを必要としないのが分かったのも皮肉であった。第2に新古典派は経済学は限界革命当時，一番進んだ科学と考えられていた物理学一特に力学の影響を大きく受けていた。従って，そこで使用された数学は微分・積分であって必ずしも経済現象を説明するのに適切なものではなかった。ここでフォン・ノイマンが提唱したのはトポロジーであって，それ以後の経済学では問題を解く強力な武器となったのである。第3に確率論の導入である。人間の行動は事前に決定的なものは少なく，不確実性が付きまとう。混合戦略や機会手番の概念は，このような点を強調している。第4に情報理論の経済学での重要性を示した点である。展開形のゲーム理論で示された情報集合の概念は，この方面の出発点として非常に重要である。ここでは第2の貢献を取り上げ，その方法が如何に強力なものであったかを考えよう。

一般均衡理論のワルラス＝カッセル・モデルでは均衡解の存在を証明する手法として利用されたのは超過需要関数の数と未知数の数が一致する場合には，この連立方程式には一義的に解けると言うものであった。この事が真でないのは次の例ですぐ判明するが，解存在が保証されない場合は，その理論体系に論理的矛盾があって，現実の経済現象をうまく説明できないかも知れないのであ

る。

$$\begin{cases} 3x+\ 5y=10 \\ 6x+10y=20 \end{cases}$$

であれば解は無限にあり，

$$\begin{cases} 3x+5y=20 \\ 3x+5y=30 \end{cases}$$

であれば解は存在しない。このような事がワルラスの経済学への貢献の偉大さを損なうものではないが，この問題がフォン・ノイマンが利用した不動点定理の適用によって解決し，広く経済学者に受け入れられたのは1950年代に入ってからの事であった。ワルラスの侵した誤りについては，ワルラスの研究家ジャフェは次のような興味ある説明を加えている。「……ワルラスには元来数学者としての素養が不足していたのである。彼は数学的直観力を具えていたものの，その分野について系統的な訓練をほとんど受けていなかった。この数学に関する技術的能力の欠如のゆえに，彼は，自分の方程式体系が何らかの解をもちえないかもしれないというレクシスの鋭い批評を，まったく理解することができなかった。ワルラスは生涯の最後の日まで，未知数の数と独立な方程式の数との整合が，要求される解の存在を保証するに足りると，確信しつづけたのであった。」（〔6〕pp. 49-50）

P. A. サムエルソンは連立方程式のヤコビアン行列の主座小行列式が全てゼロにならない場合には解が存在するのを証明しようとした（〔9〕）。2方程式2変数の例で考えると，次の場合，$x=y$ を除外すれば，やはり解が無いので彼の主張は正しくない。

$$\begin{cases} f(x,\ y)=x+y=0 \\ g(x,\ y)=xy-1=0 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = x - y \neq 0$$

この定義域（値域）を G とすれば，その中には解は存在しないのである。

解存在の問題を考える為に，超過需要写像が対応ではなくて関数となる簡単な場合を考察する事とする。$F \in C^2$ であって $F: D \to \boldsymbol{R}_+^l$ とする。D は F の定義域であった。C^2 は C^2 級写像の集合である。ここで $D \subset \boldsymbol{R}_+^l$ はコンパクトであって，その内点 D^0 は $D^0 \neq \phi$ とする。そうすると

$$F(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$$

の点 $\boldsymbol{x}^*$ は不動点と言われる。ここでは Fは $\boldsymbol{x}^*$ をもとの所に写像し，点は動いていない。この点が不動点と言われる理由はここにある。

定理　1.

$\boldsymbol{x}^0 \in D^0$ であって，ホモトピー関数を

$$H(\boldsymbol{x}\ ,t) = (1-t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + t(\boldsymbol{x} - F(\boldsymbol{x})) = 0$$

とする。そうすると $H: D \times T \to \boldsymbol{R}_+^l$ は regular であり連続的に微分可能で boundary free な写像であるとする。そうすると F は不動点をもっている。　△

〔証明〕

$y(p) = [\boldsymbol{x}(p),\ t(p)] = [\boldsymbol{x}_1(p),\ \boldsymbol{x}_2(p), \cdots,\ \boldsymbol{x}_l(p),\ t(p)]$ とおく。p は経路に従った動いた距離であるとする。H は regular であって微分可能であるから，$H(\boldsymbol{x},\ t) = 0$ の解集合は

$$H^{-1}(t) = \{\boldsymbol{x},\ t) \mid H(\boldsymbol{x},\ t) = 0\}$$

$$y(p) \in H^{-1},\quad \dot{y}_i = (-1)^i \det H'_{-i}$$

となる経路が p の変化に対して存在する。ただし H'_{-i} は H のヤコビアン行列 Hから i 番目の列を除外したものであるとする。出発点が $\boldsymbol{x}^0 \in H^{-1}(\boldsymbol{o})$ であ

り，det $H'_x(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{o})=1$ であるから，y の値は少なくとも 0 から増加の方向に変化する。だから図 1 における (a) に示された経路のような変化は生じない。det $H'_x(\boldsymbol{o})>0$ であるからである。(b) は H が boundary free であるから起こらない。したがって (c) の場合のみが $t=1$ において到達可能であり，$\boldsymbol{x}^*\in H^{-1}(1)$ が存在し，$\boldsymbol{x}^*$ は不動点である。　□

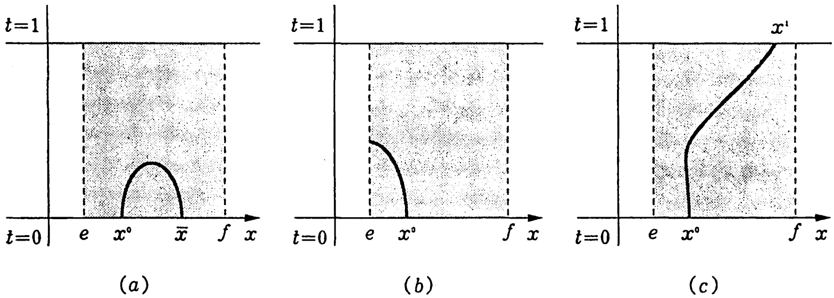

図　1

定理　2.

F には奇数個の不動点が存在する。　△

〔証明〕

t が 0 から 1 に変化するに従って，解 $\boldsymbol{x}$ がどのように変化するかを考察する。F は boundary free であるから，図 2 における A のような場合は生じ

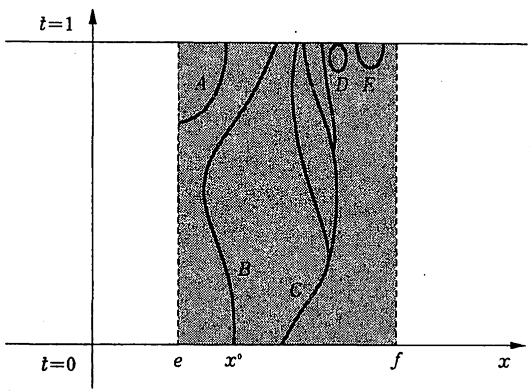

図　2

ない。$\boldsymbol{x}^0 \in H^{-1}(\boldsymbol{o})$ から経路は H が regular であるので分枝は生じない。H は $t=1$ でもやはり regular であるから $H'_x(\boldsymbol{x}, 1)$ は全ての $\boldsymbol{x}^* \in H^{-1}(1)$ では正則行列となっている。したがって，経路は D のように接線となる事はない。しかし，E のような経路が $\boldsymbol{x}^0$ から $t=1$ に到達した後に生じる可能性は十分にある。したがって $t=1$ に到達しうる点は奇数個である。

この証明については1次元の場合には比較的簡単に図を使って証明できる。図3では縦横ともに1単位の正方形が描かれている。四隅は○印で示されているが，それぞれ定義域と値域が端を含まず，開集合になっているのを示している。ここで下の横軸は定義域であり，縦軸は値域である。曲線は連続関数 $f(x)$ をしめしている。ここの問題は左の縦軸の任意の一点から出発して右の縦軸の任意の一点に到達する曲線を引けば，斜に引いた直線を幾回切るかと言う問題と考える事ができる。曲線が斜に引いた直線と交わる点 A, B, C, D, E, は不動点である。図3から簡単に分かるように，どのように曲線を引いても奇数個である。 □

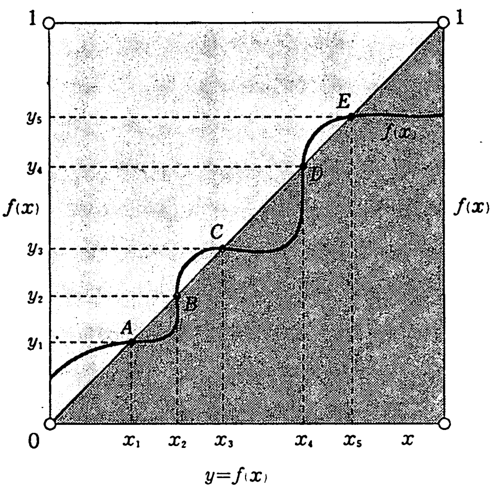

図 3

4.　不動点と均衡値

さて，ここで再び一般均衡理論に立ち返ろう。

命題

財貨の種類は l 個であり，$\boldsymbol{p}$ がその価格ベクトル，$\boldsymbol{z}$ を超過需要ベクトルとする。選好が完備性，反射性，推移性，単調性，連続性および狭義の凸性を満足しており，$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ が連続であり，全て $\boldsymbol{p}>\boldsymbol{o}$ であるならば，次の3つの関係が成立する。

1.　（同次性）　$\boldsymbol{z}(\lambda\boldsymbol{p})=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$，$\lambda>0$ である任意のスカラー。

2.　（ワルラス法則）　$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{z}=0,\ \forall\ \boldsymbol{p}>\boldsymbol{o}$

3.　（無償財）　$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})\leq\boldsymbol{o}$ であって $z_j<0$ であるならば，$p_j=0$ となる。

△

〔証明〕

1.　の証明。

純粋交換の場合を考えると，全ての価格と所得が2倍になっても，ここでは貨幣錯覚が存在しないから，消費構造は全く変化しないのがわかる。

2.　の証明。

主体 i の財貨の初期保有ベクトルを $\boldsymbol{e}^i$ とすると，市場に持ち込まれた全ての財貨は誰かの所有に帰さなばならないから，

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(x_j^i(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}^i)-e_j^0)=0$$

ただし x_j^i (…) は主体 i の第 j 財に対する需要関数である。これを H 個の家計について合計すれば，

$$\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{l} p_j(x_j^i(\boldsymbol{p},\cdot\boldsymbol{e}^i)-e_j^i)=0$$

合計の順序は関係がないから

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i\in N} p_j(x_j^i(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}^i)-e_j^i)=0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{l} p_j \left(\sum_{i \in N} x_j{}^i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}^i) - \sum_{i \in N} e_j{}^i\right) = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{l} p_j \cdot z_j(\boldsymbol{p}) = 0$$

3の証明。

ここで $z_j(\boldsymbol{p})<0$ であるにもかかわらず，$p_j>0$ であると仮定しよう。

そうすると

$$p_j\, z_j<0$$

となる。他の項を合計すると

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{l} p_k\, z_k(\boldsymbol{p}) = 0$$

であるから結局は

$$\sum_{k=1}^{l} p_k\, z_k(\boldsymbol{p}) < 0$$

となりワルラス法則に反することになる。これは矛盾である。したがって $z_j<0$ であれば $p_j=0$ でなければならない。 容易に証明できるように，生産が導入されても，同様の結論を得る。 □

定義

均衡とはある価格ベクトル $\boldsymbol{p}^*\gg 0$ に対して $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)=0$ となる場合を言う。$\boldsymbol{p}^*$ は均衡価格と呼ばれる。 △

定理　3.

超過需要ベクトル $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ が連続であり，ワルラス法則を満足するものとすれば，$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)=0$ となるような均衡価格ベクトル $\boldsymbol{p}^*$ が奇数個存在する。 △

〔証明〕

命題1において $\lambda=\dfrac{1}{\sum p_i}>0$ とおけば

$$S^{l-1}:=\{\boldsymbol{p}\mid \boldsymbol{p}\gg 0,\ \sum_{j=1}^{l} p_j=1\}\subset \boldsymbol{R}_+{}^l$$

となる（$l-1$）次元の単位シンプレックスの中に価格ベクトルを閉じ込める事ができる。これは（$l-1$）次元の超平面であるが l 次元空間に所属している点に注意して欲しい。単位シンプレックスは凸でコンパクトな集合であり，価格ベクトルが動きうる定義域と値域を，この中に封じ込むのは何かにつけて便利である。また，そうしても議論の本筋に何の変化もない点に注目したい。

次に，$\boldsymbol{p}$ が不動点であれば均衡値となる関数を見いだそう。

$$f_j(\boldsymbol{p}):=\frac{p_j+\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}))}{\sum_{k=1}^{l} p_k[p+\max(0,\ z_k(\boldsymbol{p}))]}$$

考える。分母については

$$\sum_{k=1}^{l}[p_k+\max(0,\ z_k(\boldsymbol{p}))]$$

$$=\sum_{k=1}^{l} p_k+\sum_{k=1}^{l}\max(0,z_k(\boldsymbol{p}))]$$

$$=1+\sum_{k=1}^{l}\max\ (0,\ z_k(\boldsymbol{p}))>0$$

したがってゼロでないのが保証されたから分母としてなんら差し支えない。分子については $\boldsymbol{p}\gg 0$ であったから，$p_j>0$ である。したがって $f_j(\boldsymbol{p})>0$ である。

$$\sum_{j-1}^{l} f_j(\boldsymbol{p})=\frac{\sum_{j=1}^{l}[p_j+\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}))]}{\sum_{k=1}^{l}[p_k+\max(0,\ z_k(\boldsymbol{p}))]}=1$$

したがって $0<f<1$ であって，これもシンプレックスの成分であるのが分かった。均衡においては

$$\boldsymbol{p}^*=f(\boldsymbol{p}^*)$$

となるのを確かめる。

分母を払えば

$$p_j{}^*\sum_{k=1}^{l} p_k{}^*+p_j{}^*\sum_{k=1}^{l}\max(0,\ z_k(\boldsymbol{p}^*))$$

$$=p_j{}^*+\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}^*)),\qquad i=1,\cdots,l$$

$$p_j^*\sum_{k=1}^{l}\max(0,z_k(\boldsymbol{p}^*))=\max(0,z_j(\boldsymbol{p}^*))$$

両辺に $z_j(\boldsymbol{p}^*)$ を掛ければ

$$p_j^* z_j(\boldsymbol{p}^*)\sum_{k=1}^{l}\max(0,\ z_k(\boldsymbol{p}^*))=z_j(\boldsymbol{p}^*)\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}^*)),\quad j=1,\cdots,\ l$$

ワルラス法則により

$$0=\sum_{j=1}^{l} z_j(\boldsymbol{p}^*)\max(0,z_j(\boldsymbol{p}^*))$$

$z_j(\boldsymbol{p}^*)\leq 0$ である場合 $\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}^*))=0$，また $z_j(*)>0$ である場合には $z_j(\boldsymbol{p}^*)\cdot\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}^*))=(z_j(\boldsymbol{p}^*))^2>0$ となる。

したがって

$$\sum_{j=1}^{l} z_j(\boldsymbol{p}^*)\max(0,\ z_j(\boldsymbol{p}^*))>0$$

となって，上の式と矛盾する。ゆえに $z_j(\boldsymbol{p}^*)\leq 0$ でなければならない。$p_j>0$ であるから，$z_j(\boldsymbol{p}^*)<0$ であれば $\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)<0$ となってワルラス法則と矛盾する。したがって $\boldsymbol{p}^*$ の場合は $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)=0$ となり均衡が成立する。命題により，不動点が奇数個存在するのが証明されている。故に均衡点は奇数個存在する。 □

現代経済学の中心は理論経済学であり，その核をなすものが一般均衡理論である。これは主としてミクロ経済学に利用されているけれども，マクロ・モデルも一般均衡理論を中心に展開されている。ここで利用される数学は，最初は微分・積分・微分方程式が中心であった。今ではトポロジー，微分トポロジー，ホモトピーなどが利用されて，一層深い研究が行われ，有益な結論が展開されている。また，最近では経済学の主な問題の殆んどが Degree Theory を使って解けるようになった。

REFERENCES

〔1〕Arrow, Kenneth J., and F. H. Hahn (1971)
General Competitive Analysis, San Francisco: Holden-Day. 福岡正夫・川又邦

夫訳『一般均衡分析』東京：岩波書店.

〔2〕Debreu, G. (1970)
"Economies with a Finite Set of Equilibria," *Econometrica* 38, 387-92.

〔3〕Garcia, C. B., and F. J. Gould (1978)
"A Theorem on Homotopy Path," *Mathematics of Operations Research* 3, 282-89.

〔4〕―――――――, (1979)
"Scalar Labelings for Homotopy Path, "*Mathematical Programming*. 17, 184-97.

〔5〕Harsanyi, J. C. (1973)
"Oddness of the Number of Equilibrium Points: a New Proof," *International Journal of Game Theory* 2, 235-50.

〔6〕Jaffe, William (1977) 安井琢磨・福岡正夫編訳『ワルラス経済学の誕生』東京：日本経済新聞社.

〔7〕Mas-Colell, A. (1974)
"A Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences," *Journal of Mathematical Economics* 1, 237-46.

〔8〕Rickert, H. (1926)
Kulturwissenshaft und Naturwissenshaft, 6th ed., Tubingen: Mohr.

〔9〕Samuelson, P. A. (1953-54)
"Prices of Factors and Goods in General Equilibrium," *Review of Economic Studies*, 21, 1-20.

〔10〕vou Neumann, J. (1928)
"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.

〔11〕――――, and O. Morgerstern (1947)
Theory of Games and Economic Behavior, 2nd ed., Princeton, N. J.: Princeton University Press.

〔12〕Zawazki, W. (1914)
Les Mathematiques appliques a l Economie Politique. Paris. 寺尾琢磨訳 (1942)『経済学に応用された数学』東京：日本評論社.