研究ノート

# 持続可能な財政規範，税率，公債累積

村　田　安　雄



## はじめに

公債累積に伴って，多くの国はその財政支出に占める公債利払いの増大に対して，長期的な見地からの対策を立てる必要に迫られている。本稿はこの問題を第1節において論じ，持続可能性を保つ財政の条件を提示する。ついで第2節では，GDP に対する一括税としての税率の，持続可能な財政規範に整合するものを導出し，持続可能税率と名付ける。そしてこの税率を算定して，現実の税率と比較検討する。以上の理論は主として Blanchard (1990) および Blanchard-Chouraqui-Hagemann-Sartor (1990) に沿って展開され，OECD の統計資料を活用して算定が行われる。最後に第3節は，Blanchard (1984) に依拠しながら，対GDP 比で表した公債累積と一次的余剰との動学体系を考えて，持続可能な進行経路を追求する。

## 1.　持続可能な長期の財政規範

いま連続時間の $t$ 時点における政府の予算制約式はつぎのように表現される。

$$\frac{dB_t}{dt}=G_t-T_t+rB_t \tag{1}$$

ここに $G_t$, $T_t$ および $B_t$ はそれぞれ $t$ 時点における（移転支出を含む）政府支出，租税収入および公債残高を示しており，$r$ は瞬時的名目利子率で一定と想定される。(1)式右辺が正値のとき，それは財政赤字額を示し，これを公債（公的債務の略称としての）の

増発によって賄い，逆に（1）式右辺が負値をとれば，既発行の公債をそれだけ償還するというのがこの式の意味である。

（1）式右辺の $rB_t$ を左辺へ移項し，両辺に指数関数 $\exp(-rt)$ を乗ずると，微分演算を考慮して，次式が得られる。

$$\frac{d(B_t \exp(-rt))}{dt}=(G_t-T_t)\exp(-rt) \tag{2}$$

さらに（2）式を $t$ の 0 時点（現在）より将来の $n$ 時点まで積分して整理すると，（1）の微分方程式の解として

$$\int_o^n (T_t-G_t)\exp(-rt)dt+B_n \exp(-rn)=B_o \tag{3}$$

の方程式が導出される。その意味は，現在から $n$ 時点までの一次的余剰と $n$ 時点での累積残高との現在価値総計が，現存公債残高に等しいということである。もし $n$ が無限へ伸長されたときに，（3）式左辺の第2項が消滅するならば，つぎの関係が成立する。

$$\int_o^\infty T_t \exp(-rt)dt=B_o+\int_o^\infty G_t \exp(-rt)dt \tag{4}$$

すなわち，将来の全税収の現在価値は現存公債残高と将来の全政府支出の現在価値の合計に一致する，という長期的な財政の基本原則を（4）式は含意している。これを持続可能な（sustainable）財政規範と呼ぼう。そしてこの規範が充足されるための前提として，

$$\lim_{n\to\infty} B_n \exp(-rn)=0 \tag{5}$$

とならなければならず，これは公債残高の増加率を名目利子率より低く抑えるように要求する。従って，持続可能な財政規範はまた，公債累積の増加率を名目利子率より低く抑制することに同値である。

## 2. 持続可能税率の理論と算定

（1）式の関係を対 GDP 比の変数で表示するために，$t$ 時点の名目 GDP を $Y_t$ として，

$$g_t \equiv G_t/Y_t,\quad \tau_t \equiv T_t/Y_t,\quad b_t \equiv B_t/Y_t \tag{6}$$

の諸変数を定義する。GDP の瞬時的物価上昇率を $\pi$，実質 GDP の瞬時的成長率を $\theta$ とし，これらのパラメータは一定であると想定しよう。名目 GDP の成長率が $\pi+\theta$ に等しいこと，および

$$\frac{dB_t}{dt}=\frac{db_t}{dt}Y_t+b_t\frac{dY_t}{dt} \tag{7}$$

の微分公式を考慮に入れると，（1）式の両辺を $Y_t$ で除した式はつぎのように整理され

る。

$$\frac{db_t}{dt}=g_t-\tau_t+(r-\pi-\theta)b_t \tag{8}$$

(8)式は(1)式を対 GDP 比で表現したものである。(8)式における変数 $rb_t$, $g_t$ および $\tau_t$ の値を先進7カ国について掲載したものが，それぞれ表1，表2および表3である。

いま実質利子率 $(r-\pi)$ は実質成長率 $\theta$ より大きいと想定して，

$$\sigma\equiv r-\pi-\theta\ (>0) \tag{9}$$

と置き，(8)式についての解の方程式を，(3)式と同様に，下記のように導出できる。

$$\int_o^n(\tau_t-g_t)\exp(-\sigma t)\,dt+b_n\exp(-\sigma n)=b_o \tag{10}$$

この場合の持続可能な財政規範は

$$\int_o^\infty \tau_t\exp(-\sigma t)dt=b_o+\int_o^\infty g_t\exp(-\sigma t)dt \tag{11}$$

の関係が成立することであり，換言すると，

$$\lim_{n\to\infty} b_n\exp(-\sigma n)=0 \tag{12}$$

が成り立つことである。(12)の条件は，公債残高の対 GDP 比の増加率が $\sigma$ より低いことを要請する。

(11)式において将来の税率を一定 $\tau_*$ に設定すると，それは持続可能な財政規範によって決定される税率であるので，「持続可能税率」と呼ばれて，

$$\tau_*=\sigma\{b_o+\int_o^\infty g_t\exp(-\sigma t)\,dt\} \tag{13}$$

になる。さらに $g_t$ が毎時 $\gamma$ の率で増加すると仮定すれば，(13)式の持続可能税率はつぎのように決まる。ただし $\gamma<\sigma$ を想定する。

$$\tau_*=\sigma b_o+\frac{\sigma}{\sigma-\gamma}g_o \tag{14}$$

表2では先進7カ国の政府支出の対 GDP 比が掲載されていて，これは $g_t$ に相当する。いま日本の $\tau_*$ を算定するため，$g_o$ の値として31.9%（1992年の日本の $g_t$）をとり，$b_o$ の値を68.2%（1991年度末の日本の $b_t$）と置いて，(14)式によって $\tau_*$ を算定した結果が表4の左半分にまとめられている[1]。全体的に $g_t$ の増加率 $\gamma$ が増えるにつれて，$\tau_*$ の値は大きくなって行くが，$\gamma=-0.25$%と0.0%の場合に日本の $\tau_*$ は26%〜34

1）$b_o$ の値は村田（1994年）の表2から得られる。

**表1**　先進7カ国の公債利払い $rb_t$　（対 GDP 比　%）

| | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 米国 | 2.0 | 2.1 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.1 | 2.3 | 2.2 |
| 日本 | 1.8 | 1.7 | 1.6 | 1.3 | 1.0 | 0.9 | 0.5 | 0.3 | 0.3 |
| ドイツ | 2.3 | 2.3 | 2.3 | 2.4 | 2.4 | 2.2 | 2.1 | 2.2 | 2.7 |
| フランス | 1.9 | 2.0 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.2 | 2.4 | 2.5 | 2.8 |
| イタリヤ | 7.5 | 7.4 | 7.8 | 7.4 | 7.6 | 8.4 | 9.1 | 9.7 | 10.9 |
| 英国 | 3.3 | 3.4 | 3.1 | 3.1 | 2.7 | 2.4 | 2.4 | 2.1 | 2.1 |
| カナダ | 3.5 | 4.0 | 4.2 | 4.2 | 4.3 | 4.8 | 5.4 | 5.5 | 5.2 |
| G7の平均 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.5 |

**表2**　先進7カ国の政府支出（公債利払いを除く）$g_t$　（対 GDP 比　%）

| | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 米国 | 30.6 | 31.1 | 31.7 | 31.4 | 30.5 | 30.4 | 31.2 | 31.8 | 32.9 |
| 日本 | 30.5 | 29.9 | 30.4 | 30.9 | 30.6 | 30.0 | 31.2 | 31.1 | 31.9 |
| ドイツ | 45.1 | 44.7 | 44.1 | 44.3 | 43.9 | 42.6 | 43.0 | 46.3 | 46.3 |
| フランス | 50.0 | 50.2 | 49.2 | 48.8 | 47.9 | 46.9 | 47.4 | 48.1 | 49.0 |
| イタリヤ | 41.8 | 43.5 | 42.9 | 42.8 | 42.7 | 42.9 | 44.1 | 43.9 | 42.3 |
| 英国 | 41.9 | 40.6 | 39.4 | 37.6 | 35.3 | 35.2 | 37.5 | 38.7 | 41.1 |
| カナダ | 41.4 | 41.3 | 40.4 | 39.3 | 38.2 | 38.3 | 40.4 | 43.6 | 44.7 |
| G7の平均 | 35.8 | 35.9 | 35.9 | 35.7 | 34.9 | 34.6 | 35.6 | 36.5 | 37.2 |

[注] 表1と表2は *OECD Economic Outlook* 54 (Dec. 1993) の統計から算定。

表 3　先進 7 カ国の広義の租税収入 $\tau_t$　（対 GDP 比 %）

| | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 米国 | 29.7 | 30.1 | 30.2 | 31.0 | 30.5 | 30.9 | 30.8 | 30.7 | 30.6 |
| 日本 | 30.2 | 30.8 | 31.0 | 32.6 | 33.1 | 33.4 | 34.6 | 34.4 | 32.9 |
| ドイツ | 45.5 | 45.8 | 45.1 | 44.8 | 44.1 | 44.9 | 43.1 | 45.3 | 46.4 |
| フランス | 49.2 | 49.3 | 48.6 | 49.0 | 48.3 | 47.8 | 48.3 | 48.5 | 47.9 |
| イタリヤ | 37.8 | 38.3 | 39.1 | 39.3 | 39.6 | 41.4 | 42.2 | 43.3 | 43.7 |
| 英国 | 41.2 | 41.2 | 40.1 | 39.4 | 39.0 | 38.5 | 38.6 | 38.1 | 37.0 |
| カナダ | 38.5 | 38.5 | 39.2 | 39.7 | 40.0 | 40.3 | 41.7 | 42.8 | 43.3 |
| G 7 の平均 | 34.7 | 35.1 | 35.1 | 35.7 | 35.4 | 35.8 | 36.0 | 36.3 | 36.1 |

［注］出所は *OECD Economic Outlook* 54 (Dec. 1993)。

表 4　持続可能税率 $\tau_*$　（%）

| | 日本 ($b_o$=68.2%, $g_o$=31.9%) | | | | ドイツ ($b_o$=41.8%, $g_o$=46.3%) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma$ ＼ $r$ | −0.25 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | −0.25 | −0.10 | 0.00 | 0.10 |
| 1.0 | 26.2 | 32.6 | 43.2 | 64.5 | 37.5 | 42.5 | 46.7 | 51.9 |
| 2.0 | 29.7 | 33.3 | 37.8 | 43.9 | 42.0 | 44.9 | 47.1 | 49.6 |
| 3.0 | 31.5 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 44.0 | 46.1 | 47.6 | 49.2 |

%の範囲に在って（$\sigma$＝1%〜3%に対して），これらの値は，表3における $\tau_t$ の日本の実績値に大体同じであることが分かる。つぎにドイツの $\tau_*$ を算定するため，$g_o$=46.3%（1992年のドイツの $g_t$）と $b_o$=41.8%（1991年度末のドイツの $b_t$）に置く。その算定された値は表4の右半分に掲載されていて，$\gamma$＝−0.25%と −0.1%のときに，それらの $\tau_*$ の値は大体42%〜46%の範囲内にあって，表3でのドイツの $\tau_t$ の実績に相当することが分かる。以上の日本とドイツの持続可能税率の算定値が含意することは，政府支出の対GDP 比 $g_t$ を今後は増大させないようにするか，少しづつ減少させるようにすれば，現実の税率を持続可能税率に近似させることが出来るということである。両国共，もし $g_t$ が増大すれば，持続可能税率は現実の税率を超過することになるであろう。その他のG7の国ぐにもすでに政府支出の対 GDP 比を一定とした場合の持続可能税率は，現実の税率より高くなってしまっている。

## 3.　公債累積と一次的余剰の持続可能経路

さて一次的余剰／GDP 比を

$$v_t \equiv \tau_t - g_t \tag{15}$$

と表すので，(8)式はつぎのように書き換えられる。

$$\frac{db_t}{dt} = \sigma b_t - v_t \tag{16}$$

この式は，公債／GDP 比 $b_t$ が一次的余剰／GDP 比 $v_t$ との関わりにおいて変化することを意味する。

他方，一次的余剰／GDP 比 $v_t$ がその必要水準 $\bar{v}$ よりも低いならば，$v_t$ を高くするように財政当局は反応するであろうから，ある正値の調整係数を $\alpha$ として，

$$\frac{dv_t}{dt} = \alpha(\bar{v} - v_t) \qquad (\alpha > o) \tag{17}$$

の財政反応関数が妥当するであろう。(17)式はもちろん $v_t$ が $\bar{v}$ より大きい時には，$v_t$ を減少させるという財政当局の行動をも含意する[2)]。

(17)式によって $v_t$ が変動し，それに伴って $b_t$ は (16)式に従って変わる。これらの2変数の変動状態を両者の位相図に描いたのが図1である。(16)式左辺がゼロになるのは

$$\sigma b_t = v_t \tag{18}$$

2) Blanchard (1984) は同様の反応関数を考えた。図1は彼の図を参考にして描かれている。

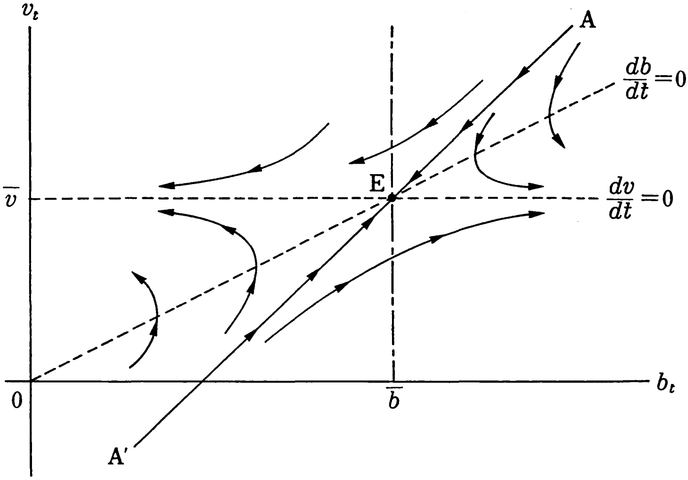


図１　$b_t$ と $v_t$ の位相関係

が成立する線上であり，また(17)式左辺がゼロになるのは

$$v_t=\bar{v} \tag{19}$$

の線上である。これらの各線で区分される領域内では，それぞれ(16)式と(17)式に従って $v_t$ と $b_t$ は増加または減少するのであり，それらの変化を組み合わせて，図１の矢印で示された色んな運動経路が描かれる。それらの中で AE の経路と A′E の経路は均衡点（$b_t$ と $v_t$ が共に不変になる）E に収束するが，それ以外の経路はすべて，$v_t$ については(19)式の成立する状態へと近づきながら，$b_t$ についてはゼロまたは無限大へと発散する。実際，(17)式を解くと，

$$v_t=\bar{v}+(v_o-\bar{v})\exp(-\alpha t) \tag{20}$$

になって，$v_t$ は時間がたつと $\bar{v}$ へ収束するが，(16)と(17)の微分方程式の解としての $b_t$ は

$$b_t=\bar{b}+\frac{v_o-\bar{v}}{\alpha+\sigma}\exp(-\alpha t)+\left(b_o-\bar{b}-\frac{v_o-\bar{v}}{\alpha+\sigma}\right)\exp(\sigma t) \tag{21}$$

になる[3)]。ただし $\bar{b}\equiv\bar{v}/\sigma$ と置かれている。

(21)式右辺の第３項をみれば，初期値が

$$\frac{v_o-\bar{v}}{b_o-\bar{b}}=\alpha+\sigma \tag{22}$$

３）数学付録を参照。

の状態を満たす場合にのみ，経路 AE または A′E に沿って運動が均衡点 E に向かうことが分かる。初期値が(22)を満たさない場合の経路はすべて不安定的である。従ってE点は鞍点（saddle point）不安定性をもつ。

均衡点Eにおいては $b_t$ は

$$\bar{b} \equiv \bar{v}/\sigma \tag{23}$$

に等しい。ところで任意の $s$ 時点において，(11)式と同様の，持続可能な財政規範を満たす式を求めると，次式になる。

$$b_s = \int_s^{\infty} v_t \exp(-\sigma(t-s))\,dt \tag{24}$$

ここで $v_t$ を $\bar{v}$ と置けば，$b_s$ は(23)の $\bar{b}$ になる。従って $\bar{b}$ は持続可能な公債／GDP 比を意味する。かくしてE点では，一次的余剰は必要水準に保持され，公債／GDP 比は持続可能水準に在る。そのE点へ到達する経路に乗るためには，$v_t$ と $b_t$ の初期値が(22)の状態を満たすようにすればよい。

また AA′ 線より下方の領域から出発する経路は，すべて $\bar{b}$ を超過する方向へ進むので，それらは持続可能な経路とは言えない。その反対側の（AA′ 線より上方の）領域から出発する経路のうち，$\bar{v}$ の水平線より上方の領域に在るものは，$b_t$ が最終的に $\bar{b}$ より小さくなり，$v_t$ が $\bar{v}$ より大きいので，持続可能な経路と言うことができる。

(22)を満たした(21)式と(20)式から得られる次式

$$v_t - \bar{v} = (\alpha+\sigma)(b_t - \bar{b}) \tag{25}$$

は AA′ 線を表し，この線より上方の領域内に $b_t$ と $v_t$ が在る場合には，

$$v_t - \bar{v} \geq (\alpha+\sigma)(b_t - \bar{b}) \tag{26}$$

が成立する。従って上記の持続可能経路に乗るためには，(26)の不等式と，

$$v_t > \bar{v} \tag{27}$$

の不等式とが共に満たされるように，初期値 $b_0$ と $v_0$ を決めればよい。

**数学付録**

$$db_t/dt = \sigma b_t - v_t \tag{①}$$

$$dv_t/dt = \alpha(\bar{v} - v_t) \tag{②}$$

の両式を行列表示すると，

$$\begin{bmatrix} db_t/dt \\ dv_t/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & -1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\bar{v} \end{bmatrix} \tag{③}$$

である。その特解を $\{b_p, v_p\}$ と記せば，

$$\begin{bmatrix} b_p \\ v_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \sigma & -1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\bar{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\sigma}\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \qquad ④$$

になる。ただし $\bar{b} \equiv \bar{v}/\sigma$ である。

特性方程式

$$(x-\sigma)(x+\alpha) = 0 \qquad ⑤$$

の根は

$$x_1 = \sigma(>0),\ \ x_2 = -\alpha(<0) \qquad ⑥$$

であるので，鞍点解を持つことが分かる。各特性根に対応する特性ベクトルを $\{1, k_i\}$ とおいて $(i=1,2)$，算定式

$$k_i = (x_i - \sigma)/(-1) \qquad ⑦$$

へ⑥を代入すると，

$$k_1 = 0,\ \ k_2 = \alpha + \sigma \qquad ⑧$$

を得る。かくして未定定数 $c_1$ と $c_2$ を用いて，一般解は下記のように表される。

$$\begin{bmatrix} b_t \\ v_t \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\exp(\sigma t) + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha+\sigma \end{bmatrix}\exp(-\alpha t) + \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \qquad ⑨$$

最後に，⑨式にて $t=0$ と置けば，初期値 $b_o$ と $v_o$ を所与として，未定定数は

$$c_2 = (v_o - \bar{v})/(\alpha+\sigma) \qquad ⑩$$

$$c_1 = b_o - \bar{b} - c_2 \qquad ⑪$$

に定まる。かくして一般解の最終形はつぎのようになる。

$$v_t = \bar{v} + (v_o - \bar{v})\exp(-\alpha t) \qquad ⑫$$

$$b_t = \bar{b} + \frac{v_o - \bar{v}}{\alpha+\sigma}\exp(-\alpha t) + \left(b_o - \bar{b} - \frac{v_o - \bar{v}}{\alpha+\sigma}\right)\exp(\sigma t) \qquad ⑬$$

## 参考文献・資料

〔1〕Blanchard, O. J., "Current and Anticipated Deficits, Interest Rates and Economic Activity", *European Economic Review* 25 (1984), pp. 7〜27.

〔2〕Blanchard, O. J., "Suggestions for a New Set of Fiscal Indicators", *OECD Economics and Statistics Department Working Papers,* No. 79, 1990.

〔3〕Blanchard, O. J., J. C. Chouraqui, R. P. Hagemann, and N. Sartor, "The Sustainability of Fiscal Policy: New Answers to an Old Question", *OECD Economic Studies* No. 15, 1990, pp. 7〜36.

〔4〕村田安雄「前川リポートをめぐるISバランス論と公的債務」，関西大学『経済論集』，第44巻，1994年，pp. 471～483.
〔5〕*OECD Economic Outlook* 54, December 1993.