研究ノート

ライフ・サイクル消費と資本蓄積
——Blanchard 理論の解明——

村　田　安　雄

1.　序

マクロ経済学，特にその中でも新古典派の成長論，における消費と資本の変動が，ミクロの個人消費選択（異時点間の）と理論的整合性を保ったモデルとして，Blanchard (1985) のライフ・サイクル消費理論は画期的である。本稿はこの理論の統計学的基礎から始めて（第2節），全ての式の導出を行い，ミクロ成分からマクロ概念への昇華がモデルから自生することを示す（第3節）。なかんずくマクロの消費と資本の運動の位相関係がライフ・サイクル消費から派生することを第4節に，さらにその修正形を第5節に解説する。最後に旧来の典型的ライフ・サイクル理論に対して Blanchard のそれがもつ優位性を第6節において明らかにする。

2.　ハザード関数と期待余命

同質の人口に属する一個人の0時点からの死亡時刻を表す非負の確率変数を ξ として，ξ が或る正値 t 以上である確率は生存関数（survivor function）$F(t)$ と定義される。すなわち P_r を確率として，

$$F(t)=P_r(\xi\geq t)\qquad(0<t<\infty)\tag{1}$$

明らかに $F(t)$ は t の増大に対して，単調非増加の関数であり，

$$F(0)=1,\ \lim_{t\to\infty} F(t)=0 \tag{2}$$

の性質を持つ（Kalbfleisch-Prentice (1980), pp. 5～6 を参照)。

ξ の確率密度関数（$\xi=t$ における）を $f(t)$ とすると，

$$f(t)\equiv\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\mathrm{P_r}(t\leq\xi<t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{-dF(t)}{dt}\geq 0 \tag{3}$$

であり，逆に

$$F(t)=\int_t^\infty f(z)dz \tag{3'}$$

となる。t 時までの生存を前提として，死亡時刻が $\xi=t$ である確率 $\lambda(t)$ をハザード関数（hazard function）と呼び，それは

$$\lambda(t)\equiv\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\mathrm{P_r}(t\leq\xi<t+\Delta t\,|\,\xi\geq t)}{\Delta t} \tag{4}$$

と定義されて，

$$f(t)=\lambda(t)\cdot F(t) \tag{5}$$

が成立する。（5）式はちょうど t 時に死ぬ確率が $f(t)$ であることを意味する。

（3）と（5）より

$$\lambda(t)=\frac{-\dfrac{dF(t)}{dt}}{F(t)}=\frac{-d\ \log\ F(t)}{dt} \tag{6}$$

となり，これを積分して，$F(0)=1$ を考慮すれば，

$$F(t)=\exp\left[-\int_0^t \lambda(z)dz\right] \tag{7}$$

が得られる。（7）を（5）式へ代入して，ξ の t における確率密度関数を

$$f(t)=\lambda(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t \lambda(z)dz\right] \tag{8}$$

と書くことが出来る。

いまハザード関数 $\lambda(t)$ が一定値 p をとる場合，つまり死亡確率がつねに p である場合には，（8）より

$$f(t)=pe^{-pt} \tag{9}$$

が導出され，t 時間以上生存する確率は

$$F(t)=e^{-pt} \tag{10}$$

になる。今後は $\lambda(t)=p$ の場合について考察する。

これまでは現時点を0時と考えて，0時から t 時間後に死亡する確率を $f(t)$，t 時間

以上生存する確率を $F(t)$ と記したが，当面の個人が0時点に生まれた人であれば，この人がもつ0時点からの期待余命は，$\lambda(t)=p$ の場合には

$$H_0=\int_0^\infty tf(t)dt=p\int_0^\infty te^{-pt}\ dt=p^{-1} \tag{11}$$

となることが分かる。さらにまた現在（0時）において s 歳の人（s 時間生きて来た人と考える）がもつ期待余命 H_s も，$\lambda(t)=p$ の場合には p^{-1} となることが判明する。すなわち

$$H_s=\int_s^\infty (t-s)f_s(t)dt=p^{-1} \tag{12}$$

ここに $f_s(t)$ は s 時生まれの人の t 時での（s 歳の人の（$t-s$）時間後の）死亡確率の密度を示し，

$$f_s(t)\equiv\lambda(t)F(t-s)=pe^{-p(t-s)} \tag{13}$$

となる（(12) 式の導出は数学付録Aを参照)。かくして死亡確率がいつも p である場合には，何歳の個人の期待余命も p^{-1} に等しい。従ってこの場合には各個人は有限視野（finite horizon）p^{-1} をもつことになる。

いま出生の増減がない場合に，すべてのコーホートの大きさをその生れた時に p となるように正準化すると，s 時生まれのコーホートの t 時における大きさは，

$$pF(t-s)=pe^{-p(t-s)} \tag{14}$$

となり，その場合の t 時点での全人口 P_t は1に等しい。また出生率が n の率で増大し続けている場合には，s 時生まれのコーホートの t 時の大きさは

$$pe^{ns-p(t-s)} \tag{14'}$$

となり，その国の t 時点での人口 P_t は次のように算定される（数学付録Aを参照)。

$$P_t=\int_{-\infty}^t pe^{ns-p(t-s)}\ ds=\frac{p}{p+n}e^{nt} \tag{15}$$

3.　Blanchard のライフ・サイクル消費と総消費

s 時に生まれた個人は s 世代に属し，その個人の t 時における消費を $c(s,t)$ と表す。いま全世代の消費を合計して，t 時における全体の消費を求め，それを $C(t)$ と記すと，死亡確率を一定値 p とし，(14) を考慮して，

$$C(t)=\int_{-\infty}^t c(s,\ t)pe^{-p(t-s)}\ ds \tag{16}$$

と求められる。

個人の消費は自己の資産（物的と人的）の状態に依存しながら，生涯の消費効用を最大

にするように決める，ライフ・サイクル消費を想定する。物的資産は貸付けられて金利を生み，人的資産は生涯の全労働所得の現在価値と考える。s 世代の個人の t 時における労働所得を $w(s, t)$，物的資産を $v(s, t)$，人的資産を $h(s, t)$ と記し，$r(t)$ を t 時の瞬間的利子率とする。$z(\geq t)$ 時での労働所得 $w(s, z)$ に，その時の生存確率 $e^{-p(z-t)}$ と，現在への割引率とを乗じたものを，t 時以降の全期間にわたって集計すれば，

$$h(s, t)=\int_t^{\infty} w(s, z)\cdot\exp\left[-p(z-t)-\int_t^z r(\mu)d\mu\right]dz \tag{17}$$

が得られる。また全生涯の消費の現在価値を現在（t 時）の全資産価値に等しくする。つまり

$$\int_t^{\infty} c(s, z)\cdot\exp\left[-p(z-t)-\int_t^z r(\mu)\,d\mu\right]dz=v(s, t)+h(s, t) \tag{18}$$

そして物的資産は各時の利子収入と労働所得から消費を引いた残余だけ変化するので，

$$\frac{dv(s, t)}{dt}=r(t)v(s, t)+w(s, t)-c(s, t) \tag{19}$$

の状態方程式が成立する。なお Blanchard（1985）は物的資産に基づく年金収入を（19）式に追加しているが，（19）はこれを除いている点に注意を喚起しておく。

個人の効用関数を自然対数形と想定するので，t 時以降の期待効用総計の現在価値は

$$\mathrm{E}_t\int_t^{\infty}\log\ c(s, z)e^{-\theta(z-t)}\,dz \qquad (\theta\geq 0) \tag{20}$$

と表される。ここに E_t は t 時での期待値，θ は現在価値への時間選好度を示す。いま不確実性の唯一の源泉を死亡時刻であるとして，死亡確率はすべての人に同じ p であると想定するので，（20）式は（21）のように書き換えられる。$z-t$ 時後の生存確率 $e^{-p(z-t)}$ を考慮して，

$$\int_t^{\infty}\log\ c(s, z)\ e^{(\theta+p)(t-z)}\ dz \tag{21}$$

この（21）の総効用を，（19）の状態方程式が成立するように，c に関して最大化を図れば，個人の最適消費として

$$c(s, z)=c(s, t)\cdot\exp\left[\int_t^z (r(\mu)-\theta-p)\ d\mu\right] \tag{22}$$

が導出される（数学付録B，［問題１］を参照)。（22）を（18）式へ代入すると，次式のように整理される。

$$c(s, t)=(\theta+2p)\{v(s, t)+h(s, t)\} \tag{23}$$

t 時における全体の消費は，（23）を（16）式へ入れると得られる。すなわち

$$C(t)=\int_{-\infty}^t p(\theta+2p)e^{-p(t-s)}\{v(s, t)+h(s, t)\}ds=(\theta+2p)\{V(t)+H(t)\} \tag{24}$$

ここに $V(t)$ と $H(t)$ はそれぞれ t 時において生きている人びと全体の物的と人的の資産を示す。つまり (16) と同様に,

$$V(t)\equiv\int_{-\infty}^{t}v(s,\ t)\ pe^{-p(t-s)}\ ds \tag{25}$$

$$H(t)\equiv\int_{-\infty}^{t}h(s,\ t)\ pe^{-p(t-s)}\ ds \tag{26}$$

また t 時における全体の労働所得 $W(t)$ も,

$$W(t)\equiv\int_{-\infty}^{t}w(s,\ t)\ pe^{-p(t-s)}\ ds \tag{27}$$

と定義される。

ところで, 個人の人的資産は (17) 式で与えられていて, これを (26) の全体の人的資産の式へ代入すると,

$$H(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}w(s,\ z)\ e^{-p(z-t)}\ \exp\left[-\int_{t}^{z}r(\mu)d\mu\right]\ dz\cdot pe^{-p(t-s)}\ ds$$

となり, ここで積分の順序を入れ替えると次式を得る。

$$H(t)=\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}w(s,\ z)\ pe^{-p(z-s)}\ ds\cdot\exp\left[-\int_{t}^{z}r(\mu)d\mu\right]\ dz \tag{28}$$

Blanchard (1985, p. 235) は, 労働所得が年齢と共に逓減して, 個人は老年には退職することを含意する次式を想定した。

$$w(s,\ t)=a\ W(t)\ e^{-\alpha(t-s)}\qquad(\alpha\geq 0) \tag{29}$$

(29) を (27) 式へ代入して整理すれば,

$$a=\frac{p+\alpha}{p} \tag{30}$$

が得られる。そして (29) を (28) 式へ挿入し, (30) を考慮することにより, 次式が導出される。

$$H(t)=\int_{t}^{\infty}W(z)\cdot\exp\left[-\int_{t}^{z}(r(\mu)+p+\alpha)\ d\mu\right]\ dz \tag{31}$$

これは全人的資産がすべての将来労働所得を $r+p+\alpha$ の率で割引いた現在価値に等しいことを意味する。

$H(t)$ の変動を特徴付けるために, (31) 式を時間 t について微分すると,

$$\frac{dH(t)}{dt}=[r(t)+p+\alpha]\ H(t)-W(t) \tag{32}$$

の線形1階微分方程式となり, これが一意の解をもつためには,

$$\lim_{z\to\infty}H(z)\cdot\exp\left[-\int_{t}^{z}(r(\mu)+p+\alpha)\ d\mu\right]=0 \tag{33}$$

の条件が満たされなければならない（数学付録B，［問題2］を参照)。(32) と (33) の2式は (31) 式と同値である。

また全物的資産の変動は，(25) 式を t について微分して，(19) 式を考慮することによって次のように求められる。

$$\frac{dV(t)}{dt}=[r(t)-p]V(t)+W(t)-C(t) \tag{34}$$

(34) 式では $V(t)$ の蓄積率は $r-p$ であるのに対して，(19) 式での $v(t)$ のそれは r である。

最後に全体の消費の変動式を求めよう。(24) 式を t について微分して，(32) と (34) の両式を代入して整理すると，

$$\frac{dC(t)}{dt}=(\theta+2p)\ \{[r(t)+p+\alpha]\ H(t)+[r(t)-p]\ V(t)-C(t)\}$$

となり，これに (24) を考慮して $H(t)$ を消去することにより，次式を得る。

$$\frac{dC(t)}{dt}=[r(t)+\alpha-\theta-p]C(t)-(\theta+2p)(\alpha+2p)V(t) \tag{35}$$

ここで Blanchard (1985) による保険の利用についての下記のような想定を置こう。各個人が自分の遺産を子孫に残すことなく，存命中の期待効用を最大にするには，その死亡時には物的資産 v をすべて保険会社に支払う代わりに，生存期間中は毎時 pv の年金を受け取るという契約を行えば，その保険会社は損得ゼロになる。なぜならば，全ての人がこのような保険に加入すると，保険会社は毎時 $pV(t)$ の収入を得，同額の支出を同時に行うことになる。その場合に対象となるのは正値の資産だけであり，全員がこの保険を契約すると想定しよう。かくして (19) 式右辺に $pv(s,t)$ が追加されるので，(22) 式右辺の指数から $p(t-z)$ が除かれて，(23) 式の代わりに，最適な個人消費として，

$$c(s,t)=(\theta+p)\ \{v(s,t)+h(s,t)\} \tag{23'}$$

が得られ，全体の消費も (24) の代わりに，

$$C(t)=(\theta+p)\ \{V(t)+H(t)\} \tag{24'}$$

となる。また (34) 式と (35) 式もそれぞれ次のように変わる。

$$\frac{dV(t)}{dt}=r(t)V(t)+W(t)-C(t) \tag{34'}$$

$$\frac{dC(t)}{dt}=[r(t)+\alpha-\theta]C(t)-(\theta+p)(\alpha+p)V(t) \tag{35'}$$

今後はこのような年金保険への全員加入を想定した場合について分析を行おう。

なお以上の諸変動式は死亡確率 p を一定の正値と考えた場合の，いわば有限視野での

最適消費行動に基づいている。もし $p=0$ の無限に生きることを想定すれば，当面の人口不変の状態では各個人はつねに同一の労働所得配分を受けるので，α もゼロとなり，そのような無限視野の最消適費に基づく全体の消費の変動式は

$$\frac{dC(t)}{dt}=[r(t)-\theta]C(t) \tag{36}$$

となるが，物的資産の変動式は (34′) と同じである。

4.　資本と消費の変動と定常点

我々のモデルを閉じるためには，生産，労働所得および利子率を決定する技術を特定する必要がある。いま人口を労働人口と同じと想定して，第２節で述べたように，すべてのコーホートの生れた時の大きさを p とすれば，人口は１になる。また物的資産 V は資本 K のみから成るものとし，資本と労働によって生産 Q が一次同次の生産関数 $F(K,1)$ に従って行われ，それを

$$Q=F(K,1)\equiv F(K) \quad (F'>0,\ F''<0) \tag{37}$$

と記し，純生産 Y はこれから資本減耗（減耗率を δ とする）を引いて，

$$Y=F(K)-\delta K\equiv f(K) \tag{38}$$

と表そう（Blanchard-Fischer (1989), p. 122 を参照)。ここでは時間 t を省略している。以下同様。また今後 t についての微分をドット印で示すことにする。生産物の価格を１とし，企業生産の均衡を想定すると，

$$r=f'(K)=F'(K)-\delta \tag{39}$$

となり，F の一次同次性と (39) により

$$F(K)=F'(K)K+W=(r+\delta)K+W \tag{40}$$

が成り立つので，(38) を考慮して，次式が得られる。

$$f(K)=rK+W \tag{40'}$$

最初に無限視野（$p=0$）の場合について考え，(40′) を (34′) 式へ代入して

$$\dot{K}=F(K)-\delta K-C \tag{41}$$

を得，そして (36) 式を

$$\dot{C}=[F'(K)-\delta-\theta]\,C \tag{42}$$

に書き換える。(41) と (42) は K と C の運動を決定する連立微分方程式を成し，多くの新古典派成長モデルに登場する（例えば Chamley (1981) の（３）式と（２）式に対応する）ので，慣例によって両変数についての位相図を描くと（Chamley (1981), Fig. 1

を参照），それは図1のようになる。簡単に描き方を説明しておこう。(42) 式にて $\dot{C}=0$ となるのは，

$$F'(K)=\delta+\theta \tag{43}$$

の時であり，(43) を成立させる K を K^* と記す。また (41) 式にて $\dot{K}=0$ となるのは，

$$C=F(K)-\delta K \tag{44}$$

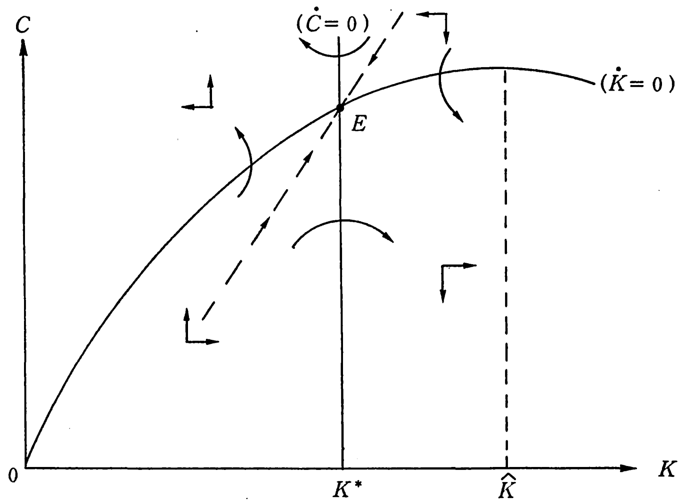
の成立する時で，(44) を描くと原点0から E 点を通り，$F'(K)=\delta$ を満たす $\hat{K}$ の点で頂上となる曲線になる。(42) 式により，$K<(>)K^*$ の時に $F'(K)>(<)\delta+\theta$，従って $\dot{C}>(<)0$ となることが明らかであり，また (41) 式により，$F(K)-\delta K>(<)C$ の時に $\dot{K}>(<)0$ となることも分かる。これらの領域別の運動は図1において矢印で示されている。かくして (41) と (42) の (K, C) の運動の中で E 点を通る最適経路が一つ存在し，それは破線で示されていて，矢印の方向で E 点へ収束する。ただし E 点は鞍点 (saddle point) であって，不安定な定常状態 (steady state) を意味する。なお E 点での利子率は $F'(K^*)-\delta=\theta$ に等しい。

つぎに有限視野のライフ・サイクル消費が行われ，死亡確率 p が一定の正値をとる場合においては，全消費は変動式 (35′) に従うので，(39) を考慮して，

$$\dot{C}=[F'(K)-(\delta+\theta-\alpha)]\,C-(\alpha+p)\,(\theta+p)\,K \tag{45}$$

となる。資本の変動式は (41) と同じであるので，(41) 式と (45) 式より K と C の位相

図1　K と C の位相図（$p=0$ の場合）



図を描くと，図2のように，$\dot{K}=0$ の曲線は図1のそれと同じである。$\dot{C}=0$ が (45) において保持されるのは，次式が成立する状態である。

$$\frac{K}{C}=\frac{F'(K)-(\delta+\theta-\alpha)}{(\alpha+p)(\theta+p)} \tag{46}$$

K/C が正値をとるためには，K は

$$F'(K)=\delta+\theta-\alpha \tag{43'}$$

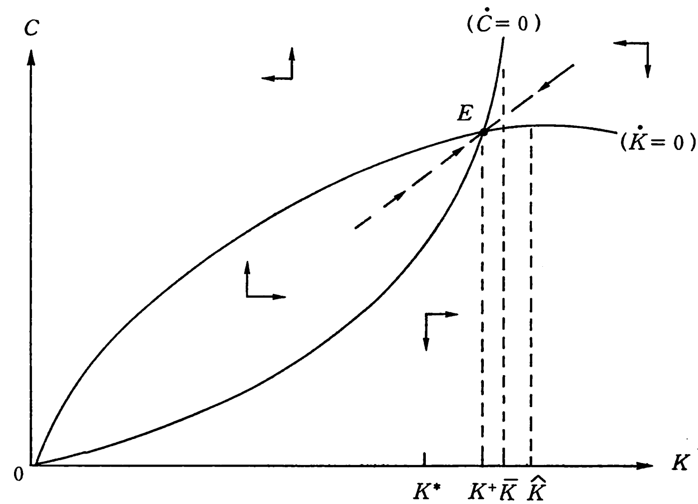
を満たす K の値 ($\overline{K}$) よりも小さくなければならないし，K が $\overline{K}$ に近づく程 K/C はゼロに収束する。また K がゼロに近い程 K/C は $+\infty$ に近づくので，図2における $\dot{C}=0$ の曲線が描かれる。そして $\dot{C}=0$ と $\dot{K}=0$ の両方を満たす定常状態は両曲線の交点 E において成立し，図1の場合と同様の位相関係の中で，E 点は鞍点均衡となっていることが分かる。なお E 点での K の値を K^+ と記し，これが K^* よりも大きいことは明白であるが，K^+ 点での利子率を正値にするためには，K^+ は $\hat{K}$ より小でなければならないので，

$$\alpha<\theta \tag{47}$$

を想定しておく。

以上の分析から定常状態における資本の大きさは，有限視野のライフ・サイクル消費の場合の方が，無限視野の新古典派成長モデルの場合よりも大きいことが分かる。しかしこ

図2　K と C の位相図（$p>0$，w 逓減の場合）



の帰結は労働所得が年齢と共に逓減すると想定したことに依るものであり，次節では逆の想定を行って逆の帰結を導くであろう。

5. 労働所得が逓増する場合

Blanchard (1985) は労働所得が年齢と共に逓減すると想定したが，我々は逆にそれが年齢と共に逓増して，或る年齢に達すると退職するものと想定してみよう。つまり

$$w(s,\ t)=bW(t)e^{\beta(t-s)} \qquad (\beta\geq 0) \tag{48}$$

が就職期間 $I(>0)$ 以下の $t-s$ について妥当し，I より大きな $t-s$ については労働所得がゼロであるものとしよう。このような想定は次節で展開される Summers (1981) の考え方と同じである。この想定を (27) 式へ入れると，

$$W(t)=bW(t)p\int_{t-I}^{t} e^{(\beta-p)(t-s)}\,ds \tag{49}$$

となり，これより

$$b=\frac{p-\beta}{p}[1-e^{(\beta-p)I}]^{-1} \tag{49'}$$

が得られる。(48) を (28) 式へ挿入し，(49′) を考慮すれば，次式が導出される。

$$H(t)=\int_{t}^{\infty} W(z)\cdot\exp\left[-\int_{t}^{z}(r(\mu)+p-\beta)d\mu\right]dz \tag{50}$$

(50) 式は (31) 式における α を $-\beta$ で代替した形を成し，従って $H(t)$ の変動式は

$$\frac{dH(t)}{dt}=[r(t)+p-\beta]H(t)-W(t) \tag{51}$$

となり，これが一意解をもつ条件は

$$\lim_{z\to\infty} H(z)\cdot\exp\left[-\int_{t}^{z}(r(\mu)+p-\beta)d\mu\right]=0 \tag{52}$$

である。また全消費の変動式は下記のようになる。

$$\frac{dC(t)}{dt}=[r(t)-\beta-\theta-p]C(t)-(\theta+2p)(2p-\beta)V(t) \tag{53}$$

そして前述の年金保険への全員加入を想定すると，

$$\frac{dC(t)}{dt}=[r(t)-\beta-\theta]C(t)-(\theta+p)(p-\beta)V(t) \tag{53'}$$

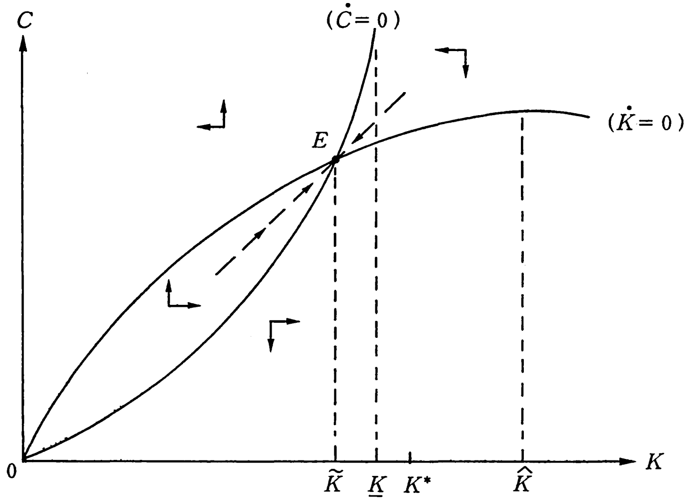
に変わる。

従って (45) 式に対応する式は

$$\dot{C}=[F'(K)-(\delta+\theta+\beta)]\,C-(\theta+p)(p-\beta)K \tag{54}$$

となり，資本の変動式 (41) との連立体系における K と C の位相図は図3 のように描

図3　K と C の位相図（$p>0$, w 逓増の場合）



ける。ここで

$$\beta<p \tag{55}$$

と想定すると，$\dot{K}=0$ と $\dot{C}=0$ が成立する定常状態において K/C が正値をとるためには，K は

$$F'(K)=\delta+\theta+\beta \tag{56}$$

を満たす K の値（$\underline{K}$）よりも小さくなければならない。定常状態の E 点での K を $\tilde{K}$ と記すと，$\tilde{K}$ は明らかに K^* よりも小さく，

$$\tilde{K}<\underline{K}<K^*<\hat{K} \tag{57}$$

の関係がある。故に $\tilde{K}$ における利子率は正値をとる。

6.　Summers ライフ・サイクル消費との関連

Summers（1981）は Blanchard（1985）以前の典型的なライフ・サイクル消費のモデルであり，その概要を説明しよう。Summers は代表的個人が死亡時点 T までの消費を，退職時点 I までの労働所得のすべてを費すように，生存中の全消費効用を最大化するものと考える。その際に貯蓄は一定の利子率 r で利殖するものとすると，例えば離散時間で T を3期，I を2期とし，現在（0期）から3期後の消費 c_3 は

$$c_3=(1+r)\{(1+r)(w_1-c_1)+w_2-c_2\} \tag{58}$$

に等しい筈である。ここに w_t は t 期の労働所得を示す。(58) の両辺に $(1+r)^{-2}$ を掛けると，

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}+\frac{c_3}{(1+r)^2}=w_1+\frac{w_2}{1+r} \tag{58'}$$

となり，これは予算制約式である。一般的には連続時間でこの予算制約を表す式は

$$\int_0^T c_t e^{-rt}\,dt=\int_0^I w_t e^{-rt}\,dt \qquad (T\geq I) \tag{59}$$

となり，これは現在0歳の人が0時点から T 時点までの消費を，0時点から I 時点までの労働所得およびその期間中の利殖によって全部まかなうことを意味する。そして生涯の消費効用

$$\int_0^T e^{-\theta t}\log c_t\,dt \qquad (\theta\geq 0) \tag{60}$$

を，(59) の制約下に最大にする消費を決定するのであるが，ここで賃金上昇率を β として，

$$w_t=w_0\,e^{\beta t} \qquad (\beta\geq 0) \tag{61}$$

と置く。(61) を (59) 式右辺へ代入して，(59) 式を書き換えると，

$$\int_0^T c_t\,e^{-rt}dt=\frac{w_0}{\beta-r}(e^{(\beta-r)I}-1) \tag{59'}$$

を得る。故に (59′) 式の制約の下に (60) を最大化する s 時点の消費 c_s を求めると次のようになる（その導出は数学付録B，［問題３］を参照)。

$$c_s=c_0\,e^{(r-\theta)s} \tag{62}$$

ここに

$$c_0\equiv\frac{\theta(e^{(\beta-r)I}-1)}{(\beta-r)(1-e^{-\theta T})}w_0 \tag{63}$$

この c_s は0時点から s 時後に s 歳の人の消費である。いま各時点では，すべての人が同一賃金で働くものと仮定し，労働所得が (61) のように一定率で上昇しているとすれば，現時（０時）点に s 歳の人の s 時以前の労働所得は $w_0\,e^{-\beta s}$ となり，この人の現時点での消費 $c_0(s)$ は，(63) 式右辺の w_0 を $w_0\,e^{-\beta s}$ で置きかえた時の c_s に等しい。すなわち

$$c_0(s)=c_0\,e^{(r-\theta-\beta)s} \tag{64}$$

である。現時（０時）点における全体の消費 $C(0)$ は，$c_0(s)$ に s 歳のコーホート (L_s) を乗じて，s を0から T まで集計した値である。

$$C(0)=\int_0^T c_0(s)L_s\,ds \tag{65}$$

人口の増加率が n であると，現時（０時）点に生まれたコーホートを L_0 として，s 時

以前に生まれたそれ L_s は $L_0 e^{-ns}$ に等しい。従って現時点の全消費は

$$C(0)=\frac{c_0 L_0}{r-\theta-\beta-n}[e^{(r-\theta-\beta-n)T}-1] \tag{65'}$$

と算定される。

さて以上の Summers のライフ・サイクル消費のモデルは，生存期間を一定と想定し，人的資産のみを予算制約条件に考慮しているのに対して，Blanchard モデルは死亡確率を一定とし，物的資産をも予算制約条件に入れた。これらの点と変動利子率を想定したことで，Blanchard のライフ・サイクル消費は，Summers のそれを理論的な整合性 (consistency) を保つ体系へと高めたものと言える。かくして Blanchard は資本 K を物的資産と置いて，変動利子率を資本の限界生産力に関連づけることにより，そのライフ・サイクル消費のモデルを完全に閉じたのである。Summers は労働所得の一定率での増加と固定的就職期間を仮定したが，これらを考慮して，我々は第5節において Blanchard モデルの修正形を展開したので，図3はいわば Summers ケースの Blanchard モデルと考えられる。最後に，Summers と同様に人口増加率 n を Blanchard モデルに導入するには，(14′) の関係を考えて，(16)，(25)，(26) および (27) の各式の右辺の被積分項に e^{ns} を追加して，以前と同様のプロセスで展開すればよいことを付言しておく。

数学付録 A.　期待余命の算定

ハザード関数 $\lambda(t)$ が一定値 p である場合に，s 時生まれの人の t 時における死亡確率の密度は，本文中の (13) によって

$$f_s(t)=pe^{-p(t-s)} \tag{A1}$$

であり，この人が現時点でもつ期待余命 H_s は次のように算定される。

$$\begin{aligned} H_s&=\int_s^\infty (t-s)f_s(t)dt \\ &=\int_s^\infty tpe^{-p(t-s)}dt-s\int_s^\infty pe^{-p(t-s)}dt \end{aligned} \tag{A2}$$

そして

$$\begin{aligned} \int_s^\infty te^{-pt}dt&=\frac{-1}{p}\Big[te^{-pt}\Big]_s^\infty+\frac{1}{p}\int_s^\infty e^{-pt}dt \\ &=\frac{1}{p}\left(s+\frac{1}{p}\right)e^{-ps} \end{aligned} \tag{A3}$$

$$p\int_s^\infty e^{-p(t-s)}dt=-e^{ps}\Big[e^{-pt}\Big]_s^\infty=1 \tag{A4}$$

となり，(A3) と (A4) を (A2) 式へ代入すると

$$H_s = p\ e^{ps}\frac{1}{p}\left(s+\frac{1}{p}\right)e^{-ps}-s=\frac{1}{p} \tag{A5}$$

が得られる。(A5) 式は非負の s について成立するので，本文中の (11) 式も成り立つ。

コーホートが毎時 n の率で増大している場合に t 時点での人口 P_t を求める（$\lambda(t)=p$ の時）と，

$$\begin{aligned} P_t &= \int_{-\infty}^{t} p e^{ns-p(t-s)} ds \\ &= p e^{-pt}\int_{-\infty}^{t} e^{(p+n)s} ds \\ &= \frac{p}{p+n} e^{-pt} e^{(p+n)t} \\ &= \frac{p}{p+n} e^{nt} \end{aligned} \tag{A6}$$

となる。

数学付録 B.　ライフ・サイクル消費の導出

［問題1］ Blanchard (1985) のライフ・サイクル消費問題。

$$\max_{c}\int_{t}^{\infty}\log\ c(s,\ z)\ e^{(\theta+p)(t-z)}dz \tag{B1}$$

subject to

$$\dot{v}(s,\ t)=r(t)\ v(s,\ t)+w(s,\ t)-c(s,\ t) \tag{B2}$$

この問題1のハミルトニヤンHを

$$\mathrm{H}\equiv\log\ c(s,\ z)+\lambda(z)\left[r(z)\ v(s,\ z)+w(s,\ z)-c(s,\ z)\right]$$

と定義すると，最大化の必要条件は次の ⓐ と ⓑ である。

ⓐ $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial c(s,\ z)}=0$

ⓑ $\dfrac{d[\lambda(z)\ e^{(\theta+p)(t-z)}]}{dz}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial v(s,\ z)}e^{(\theta+p)(t-z)}$

ⓐ より $c(s,\ z)^{-1}=\lambda(z)$ を得て，これを z で微分する。

$$\dot{\lambda}=-\dot{c}/c^2$$

また ⓑ より

$$\dot{\lambda}=(\theta+p-r(z))\lambda$$

これらの関係を用いて

$$\dot{c}/c=r(z)-\theta-p$$

が導出され，この両辺を積分する。すなわち

$$\int_t^z \frac{\dot{c}}{c}\,d\mu=\int_t^z (r(\mu)-\theta-p)d\mu$$

上式の左辺は $\log c(s,\ z)-\log c(s,\ t)$ となるので，結局

$$c(s,\ z)=c(s,\ t)\cdot \exp\left[\int_t^z (r(\mu)-\theta-p)d\mu\right] \tag{B3}$$

が得られる。

［問題2］ 非斉次の線形1階微分方程式

$$\dot{x}(t)-a(t)\,x(t)=N(t) \qquad (N(t)\ \text{は非斉次項}) \tag{B4}$$

が一意解をもつためには次式が成立しなければならない。

$$\lim_{z\to\infty} x(z)\cdot \exp\left[-\int_t^z a(\mu)d\mu\right]=0 \tag{B5}$$

問題2の証明は下記の通りである。(B4) 式の両辺に $\exp\left[\int_t^\infty a(\mu)d\mu\right]$ を乗じると，

$$\frac{d\left(x(t)\cdot \exp\left[\int_t^\infty a(\mu)\ d\mu\right]\right)}{dt}=N(t)\cdot \exp\left[\int_t^\infty a(\mu)d\mu\right]$$

と整理でき，この両辺を t から∞まで積分することによって，

$$x(\infty)-x(t)\cdot \exp\left[\int_t^\infty a(\mu)\ d\mu\right]=\int_t^\infty N(z)\cdot \exp\left[\int_z^\infty a(\mu)d\mu\right]dz$$

を得る。従って (B4) 式の解は

$$x(t)=x(\infty)\cdot \exp\left[-\int_t^\infty a(\mu)\ d\mu\right]-\int_t^\infty N(z)\cdot \exp\left[-\int_t^z a(\mu)d\mu\right]dz$$

となり，これが一意であるためには (B5) 式が成立しなければならないことは自明であり，この時の一意解は

$$x(t)=-\int_t^\infty N(z)\cdot \exp\left[-\int_t^z a(\mu)d\mu\right]dz \tag{B6}$$

である。逆に言えば (B6) 式は (B4) と (B5) の2式が成立することと同値である。

［問題3］ Summers (1981) のライフ・サイクル消費問題。

$$\max_{c_t}\int_0^T U(c_t)e^{-\theta t}\ dt \tag{B7}$$

subject to

$$\int_0^T c_t^{-rt}\ dt=\frac{w_0}{\beta-r}(e^{(\beta-r)I}-1) \tag{B8}$$

問題3において U は効用関数である。いま

$$y_t \equiv \int_0^t c_z e^{-rz} dz \tag{B9}$$

と置くと，

$$y_T = \int_0^T c_z e^{-rz} dz, \quad y_0 = 0 \tag{B9'}$$

となる。(B9) 式を t について微分すると，

$$\dot{y}_t = c_t e^{-rt}$$

となるので (B7) は

$$\max \int_0^T U(\dot{y}_t\ e^{rt}) e^{-\theta t} dt \tag{B10}$$

となり，この時の制約条件は (B9′) である。この最大問題は，(1) 式にオイラー方程式を適用して，

$$\frac{\partial U}{\partial y_t} e^{-\theta t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_t} e^{-\theta t}\right) \tag{B11}$$

を解くことに帰する (Kamien-Schwartz (1981), p. 44 を参照)。(B11) 式の左辺はゼロになり，また

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_t} = U'(c_t) \frac{dc_t}{d\dot{y}_t} = U'(c_t) e^{rt}$$

故に (B11) 式は

$$0 = \frac{d}{dt}\left(U'(c_t)\, e^{(r-\theta)t}\right) \tag{B12}$$

いま効用関数が自然対数形

$$U(c_t) = \log\ c_t$$

である場合には，$U'(c_t) = c_t^{-1}$ であるので，(B12) は次のようになる。

$$0 = \frac{d}{dt}\left(c_t^{-1}\ e^{(r-\theta)t}\right)$$

$$= [(r-\theta) - c_t^{-1}\ \dot{c}_t]\ c_t^{-1}\ e^{(r-\theta)t}$$

かくして

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = r - \theta$$

を得，これを積分すると，

$$c_t = c_0\ e^{(r-\theta)t} \tag{B13}$$

になる。

最後に c_0 を求めるために (B13) を (B8) 式へ代入する。すなわち

$$\int_0^T c_0\ e^{-\theta t}\ dt=\frac{w_0}{\beta-r}\left(e^{(\beta-r)I}-1\right)$$

この式の左辺の積分を求めて，c_0 を算定すると，

$$c_0=\frac{w_0\,\theta\left(e^{(\beta-r)I}-1\right)}{(\beta-r)\left(1-e^{-\theta T}\right)} \tag{B14}$$

が求まる。

参 考 文 献

〔1〕Blanchard, O. J., "Debt, Deficit, and Finite Horizons," *Journal of Political Economy,* 93 (1985), pp. 223〜247.

〔2〕Blanchard, O. J. and S. Fischer, *Lectures on Macroeconomics,* MIT Press, Cambridge MA, 1989.

〔3〕Chamley. C., "The Welfare Cost of Capital Income Taxation in a Growing Economy," *Journal of Political Economy,* 89 (1981), pp. 468〜496.

〔4〕Kalbfleisch, J. D. and R. L. Prentice, *The Statistical Analysis of Failure Time Data,* J. Wiley and Sons, New York, 1980.

〔5〕Kamien, M. I. and N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management,* North Holland, New York, 1981.

〔6〕Summers, L. H., "Capital Taxation and Accumulation in a Life Cycle Growth Model," *American Economic Review,* 71 (1981), pp. 533〜544.