論　文

配当付き株式のコール・オプション価格の導出

村　田　安　雄

1. 序

自由な株式市場を前提として，配当付き株式に対するコール・オプションの価格を正確に導出するのが本稿の目的である。まず，第2節で配当率一定の株式のコール価格について，熱伝導方程式を利用してブラック=ショールズ(Black-Scholes) 式を求める。ついでウィナー過程に関する変換を通して，複合オプションのコール価格を第3節において導出する。第4節では配当額が一定の株式のアメリカン・コール・オプションの価格付けを直接的方法により一応求めるが，第5節において，それに誤りが含まれていることを，複製ポートフォリオの方法によって指摘し，さらに直接的方法を再検討して最終的に正しいコール価格式に到達する。

複合オプションのコール価格の導出について，ゲスキ (Geske) はフーリエ積分を使用したが，本稿では初等統計理論で理解し得る手順に従った。また一定配当額の場合のコール価格も，その手順に若干の改変を加えて導出されている。

2. 一定配当率付き株式のヨーロピアン・コール価格

完全に競争的な債券市場において，投資家が自由に何の制約もなしに，債券とそれを対象とするオプションの売買を行うことが出来るものと想定しよう。取引は連続時間において行われ，債券価格は短期的にランダム・ウォークして，伊藤型確率微分方程式の形で変動するものと考え，その場合に一つの確定的な短期金利を持つリスク無しの安全資産が自由に貸借できることを前提しておこう。

さて，原債券が一定率のキャシュ・フロー（以下では配当）付き危険資産（以下では株式）であるものとし，その価格 $S=S(t)$ は時間 t の変化 dt と共に

$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma dz(t) \qquad (S(0)=\text{定数}) \tag{1}$$

に従って変動すると想定しよう。ここに μ は S の瞬時的期待変動率を，σ はその標準偏差を示し，z は標準ウィナー過程（標準ブラウン運動過程）に従う確率変数である。この原債券を対象とするヨーロピアン・コール・オプションの価格 c は S と t の関数であって

$$c=c(S,\ t) \tag{2}$$

と表され，c は S について2回連続，t について1回，それぞれ微分可能であると想定される。伊藤の公式により

$$dc=(c_t+\mu Sc_s+\frac{1}{2}\sigma^2S^2c_{ss})dt+\sigma Sc_sdz \tag{3}$$

となる。c_t，c_s，c_{ss} は c の偏微分係数である。

他方，c も S の関数であるので，c 自身も（1）と同様の変動に従う。すなわち

$$\frac{dc}{c}=\mu_cdt+\sigma_cdz_c \tag{4}$$

ここに μ_c，σ_c，z_c は(1)式での μ，σ，z にそれぞれ対応する。(3)式と(4)式の各項の対応によって

$$\mu_c c = c_t + \mu S c_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{ss} \tag{5}$$

$$\sigma_c c = \sigma S c_s \tag{6}$$

$$dz_c = dz \tag{7}$$

関係が成立する。(7)の関係は c と S が完全相関することを意味する。

いまマートン (Merton)(1974) にならって，投資家が資金を確定短期金利 r で借り入れ，(価格 S に対して一定比率の) 配当率 δ 付き危険資産と，それを対象とするコール・オプションへ全額投資するポートフォリオを組むとしよう。w_1 と w_2 をそれぞれ危険資産とオプションへの投資額とすると，この純投資ゼロのポートフォリオの価値 W の瞬時的収益 dW は，(1)と(4)の変動式と(7)を考慮して，下記のようになる。

$$\begin{aligned} dW &= -(w_1+w_2)rdt + w_1\left(\frac{dS+\delta Sdt}{S}\right) + w_2\left(\frac{dc}{c}\right) \\ &= [w_1(\mu+\delta-r) + w_2(\mu_c - r)]dt + (w_1\sigma + w_2\sigma_c)dz \end{aligned} \tag{8}$$

(8)式の右辺第1項は W の瞬時的期待収益を，第2項は dW の確率的変動を示す。いま確定的な (リスクのない) 瞬時的裁定収益をゼロとするような，リスクのないポートフォリオを得るには，

$$w_1(\mu+\delta-r) + w_2(\mu_c - r) = 0 \tag{9a}$$

$$w_1\sigma + w_2\sigma_c = 0 \tag{9b}$$

が成立するように w_1 と w_2 を選択しなければならない。w_1 と w_2 が共にゼロとなることはないので，(9a)と(9b)が同時に成立するためには，

$$\frac{\mu+\delta-r}{\sigma} = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} \tag{10}$$

が必要十分である[1)]。(10) 式は無裁定(no-arbitrage)の均衡条件と呼ばれ，S と c の危険1単位当たりの危険プレミアムが，この均衡の下では等しくなることを示している。

---

1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が非ゼロの (w_1, w_2) をもつための必要十分条件は $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ である (Murata (1977), p. 47 を参照)。

(10)式右辺の分母と分子に c を掛けて，（5）と（6）の関係を考慮すると，

$$\frac{c_t+\mu Sc_s+\frac{1}{2}\sigma^2S^2c_{ss}-rc}{\sigma Sc_s} \tag{11}$$

なり，また(10)式左辺の分母と分子に Sc_s を掛けると，

$$\frac{\mu Sc_s+(\delta-r)Sc_s}{\sigma Sc_s} \tag{12}$$

となる。(11) と (12) は等しいので，結局において，つぎの偏微分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2c_{ss}+(r-\delta)Sc_s-rc+c_t=0 \tag{13}$$

さて，コール・オプションの行使価格を K とすれば，満期日 T における c が

$$c(S^*, T)=\max[0,\ S^*-K] \tag{14}$$

となることは明らかである。ただし，S^* は S の満期日での値を示す。(14)の境界条件の下で(13)の偏微分方程式を解こう[2)]。

そのために c, u, h をつぎの通りに定めよう。

$$c(S,\ t)\equiv e^{r(t-T)}y(u,\ h) \tag{15}$$

$$u\equiv\log(S/K)-(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-T) \tag{16}$$

$$h\equiv\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \tag{17}$$

ここに y は u と h の関数で，これの形を後に求める。また log は自然対数を示し，t は T 以前の時間を指すものとする。(16)と(17)の定義から

$$u_s=S^{-1},\ \ u_{ss}=-S^{-2}$$

$$u_t=-(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$h_t=\frac{1}{2}\sigma^2$$

が得られるので，(15) 式の c を偏微分してつぎの関係が求められる。

2）大村（1988)，pp. 82〜84 を参照。ただし大村にはミスプリが4箇所ある上，当該のページでは配当のない場合が扱われている。なお村田（1991)，§2は別の方法によって解いている。

$$c_s = e^{r(t-T)} S^{-1} y_u \tag{18}$$

$$c_{ss} = e^{r(t-T)} S^{-2} (y_{uu} - y_u) \tag{19}$$

$$c_t = e^{r(t-T)} [ry - (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) y_u - \frac{1}{2}\sigma^2 y_h] \tag{20}$$

(15)，(18)，(19)および(20)を(13)式へ代入して整理すると，

$$e^{r(t-T)} \frac{1}{2}\sigma^2 (y_{uu} - y_h) = 0$$

となり，$e^{r(t-T)} \fallingdotseq 0$ であるので，

$$y_{uu} - y_h = 0 \qquad (h \geqq 0,\ -\infty < u < \infty) \tag{21}$$

の偏微分方程式が導出される。

また(16)より

$$S/K = \exp\{u + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - T)\} \tag{16'}$$

を得るので，$t = T$ の時には，

$$S^* - K = K(e^u - 1) \tag{16''}$$

となる。これを(14)式へ代入すると，(15)と(17)を考慮に入れて，

$$y(u,\ 0) = \max[0,\ K(e^u - 1)] \equiv f(e^u) \tag{22}$$

が(14)の条件に代わることがわかる。かくして，(22)の境界条件の下に(21)の偏微分方程式を解くことになる。

(21)は熱伝導方程式であり，u が有界な範囲では，

$$y(u,\ h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\theta) \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{\theta - u}{\sqrt{2h}}\right)^2\right\} d\theta \tag{23}$$

の解をもつことが知られている[3]。この積分形を見れば，$y(u,\ h)$ が，θ を平均 u，分散 $2h$ の正規分布に従う確率変数とする時の $f(e^\theta)$ の期待値であることは明らかである。いま

$$q \equiv \frac{\theta - u}{\sqrt{2h}} \tag{24}$$

の変数変換を行うと，

3）三浦（1989），p. 110 を参照。

$$\theta=u+q\sqrt{2h},\qquad q\geqq\frac{-u}{\sqrt{2h}}\quad(\theta\geqq 0\text{の時}),\qquad d\theta=\sqrt{2h}\cdot dq$$

なり，これらと(22)を(23)式へ代入すると，

$$y(u,\ h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}K(e^{\theta}-1)\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{\theta-u}{\sqrt{2h}}\right)^2\right\}\frac{1}{\sqrt{2h}}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-u}{\sqrt{2h}}}^{\infty}K\left[\exp\left\{\frac{-1}{2}q^2+q\sqrt{2h}+u\right\}-\exp\left\{\frac{-1}{2}q^2\right\}\right]dq \qquad (25)$$

となる。さらに(16′)より得られる関係

$$Ke^{u}=S\cdot\exp\{-h+(\delta-r)(t-T)\}$$

を(25)式へ代入し，また

$$h+\frac{1}{2}q^2-q\sqrt{2h}=\frac{1}{2}(q-\sqrt{2h})^2$$

を利用すると，下記の(26)式が導出される。

$$y(u,\ h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-u}{\sqrt{2h}}}^{\infty}\left[S\cdot\exp\{(\delta-r)(t-T)-\frac{1}{2}(q-\sqrt{2h})^2\}-K\cdot\exp\left\{\frac{-q^2}{2}\right\}\right]dq$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[Se^{(\delta-r)(t-T)}\int_{\frac{-u}{\sqrt{2h}}-\sqrt{2h}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{p^2}{2}\right\}dp-K\int_{\frac{-u}{\sqrt{2h}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q^2}{2}\right\}dq\right] \qquad (26)$$

ただし，ここに

$$p\equiv q-\sqrt{2h}$$

と置かれている。

最後に，平均がゼロで，分数が1の標準正規分布関数を

$$N(x)\equiv\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{w^2}{2}\right\}dw\qquad(-\infty<x<\infty) \qquad (27)$$

と表すと，

$$1-N(x)=N(-x)$$

の関係があるので，(26)式はつぎのように書き換えられる。

$$y(u,\ h)=Se^{(r-\delta)(T-t)}N(d_1)-KN(d_2) \qquad (28)$$

ここに

$$d_1 \equiv \frac{u}{\sqrt{2h}} + \sqrt{2h} = \frac{\log(S/K) + (r-\delta+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{29a}$$

$$d_2 \equiv \frac{u}{\sqrt{2h}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{29b}$$

と置かれている。ここの log は自然対数を示し，以下でも同様である。そして(15)の関係を考慮すると，(28)式は

$$c(t) = Se^{-\delta(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{30}$$

となる。これが一定配当率 δ の付いた株式に対するヨーロピアン・コール・オプション価格の Black-Scholes 式である。(29)，(30) における S が $S(t)$ であることを覚えておこう。

ところでギルサノフ (Girsanov) の定理によって，

$$\tilde{z}(t) \equiv z(t) - \int_0^t \frac{r-\mu(\tau)}{\sigma} d\tau \tag{31}$$

と定義された $\tilde{z}$ は標準ウィナー過程に従う確率変数である[4]。この変分

$$d\tilde{z}(t) = dz(t) - \frac{r-\mu(t)}{\sigma} dt$$

を(1)式へ考慮して，

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma d\tilde{z}(t) \tag{32}$$

を得る。(32)式を充たす解 $S(t)$ を求めるため，

$$X(t) \equiv (r-\sigma^2/2)t + \sigma\tilde{z}(t) \tag{33}$$

と置くことにより，

$$S(t) = S(0)e^{X(t)} \tag{34}$$

が得られることは明らかである[5]。なお(33)の $X(t)$ は期待値が $(r-\sigma^2/2)t$，分散が $\sigma^2 t$ の正規分布に従う[6]。いま(29)，(30)において，$\delta=0$ と置き，(34)の $S(t)$ を代入すると，Black-Scholes 式はつぎのように変形される。

$$c(t) = S(0)e^{X(t)}N(k_1) - Ke^{-r(T-t)}N(k_2) \tag{35}$$

4）森村・木島（1991），pp. 130〜136，と国田（1976），p. 168 を参照。

5）村田・里麻（1992），p. 129 を参照。

6）森村・木島（1991），p. 136 を参照。

ここに

$$k_1 \equiv \frac{\log(S(0)/K)+X(t)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{36a}$$

$$k_2 \equiv k_1-\sigma\sqrt{T-t} \tag{36b}$$

注意すべきは，(35)と(36)に確率変数 $X(t)$ が入っていることで，$c(t)$ を確定的にするたには，$E(X(t))=(r-\sigma^2/2)t$ を，$X(t)$ の代わりに用いなければならないであろう。(35)式は次節において，複合オプションのコール価格の導出に際して，有用である。

3.　複合オプションのヨーロピアン・コール価格

前節では一定配当率の付いた株式を対象とするヨーロピアン・コール・オプション価格を(30)式に提示した後，さらにこのコール価格が原株の価格変動に伴って変化する仕方を(35)式に示した。ところが(35)式のコールを対象とするヨーロピアン・コール・オプションの価格は如何に決定されるのかと言う，複合オプション (compound options)の価格付けを考える必要があり，これはゲスキ (Geske)(1979a) によって一応の答えが得られている。本節においては森村・木島 (1991) の方法に沿ってこの問題を解くことによって，Geske の定式をより明確にしたい。

いま前節における状態の中で，δ はゼロである場合を想定しよう。つまり原株は配当がなく，その株価は(1)式に従って変動しているとすると，それに対する，時点 T で満期となるコール・オプション (権利行使価格は K) の t 時点での価格 $c(t)$ は(35)式によって決まることが分かっている。このコール・オプションの上に書かれた，いわゆる複合オプションのコール価格 $\tilde{c}$ を考え，後者の満期が $t(<T)$，権利行使価格が L であるものと想定しよう。現時点0における $\tilde{c}=\tilde{c}(c(0),\ t,\ L)$ を $\tilde{c}(0)$と記して，

$$\tilde{c}(0)=e^{-rt}E[\max(0,\ c(t)-L)] \tag{37}$$

7）森村・木島（1991），pp. 198〜200 を参照。ここでの考え方は村田（1991），§2における方法と基本的には同じで，2変量の分布関数を用いる点が違っている。

を評価すればよい[8]。そのために，まず

$$S^*N(d^*)-Ke^{-r(T-t)}N(d^*-\sigma\sqrt{T-t})=L \tag{38}$$

$$d^*=\frac{\log(S^*/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を満たす S^* を求める。ところで，Black-Scholes 式（30)の $c(t)$ は S に関して狭義の増加関数である[9]。従って(38)式を満たす S^* は一意で，また(35)式と比較して明らかなように，$c(t)\geqq L$ になることは $X(t)\geqq\log(S^*/S(0))$ になることに，不等号(または等号)同志で対応する。故に(35)式と(37)式より，

$$\tilde{c}(0)=S(0)e^{-rt}\int_a^\infty e^x N(k)g(x)dx-Ke^{-rT}\int_a^\infty N(k-\sigma\sqrt{T-t})g(x)dx$$
$$-Le^{-rt}\int_a^\infty g(x)dx \tag{39}$$

を得る。ただし，ここに

$$a\equiv\log(S^*/S(0)) \tag{40}$$

と置き，また $g(x)$ は平均が $(r-\sigma^2/2)t$，分散が $\sigma^2 t$ の正規分布の密度関数であり，そして

$$k\equiv\frac{\log(S(0)/K)+x+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{41}$$

と置く。

まず(39)式右辺の第3項を算定しよう。定義により，

$$g(x)\equiv\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\} \tag{42}$$

であるので，

$$w\equiv\frac{x-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{43}$$

と変数変換して，

8）村田（1991)，（7）式と（31）式を参照。

9）$\delta=0$ の場合には，$\tau=T-t$ と置いて，$c=c(t)$ の S に関する偏微分は，

$$\partial c/\partial S=N(d_1)+(\sigma\sqrt{2\pi\tau})^{-1}\exp\{-d_1{}^2/2\}\cdot[1-(K/S)\exp\{\sigma d_1\sqrt{\tau}-(r+\sigma^2/2)\tau\}]$$
$$=N(d_1)>0\quad(d_1>-\infty)$$

$$\int_a^\infty g(x)dx=\int_{w_a}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2}\right\}dw=N(-w_a) \tag{44}$$

を得る。ただしここに

$$w_a \equiv \frac{a-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{43'}$$

と置いている。(44)式の最右辺は$-\infty$から$-w_a$までの標準正規分布関数((27)式に定義されている)を示す。かくして(39)式右辺の第3項は，(40)と(43')を考慮して，

$$-Le^{-rt}N(\alpha-\sigma\sqrt{t}) \tag{45}$$

となる。ここに

$$\alpha \equiv \frac{\log(S(0)/S^*)+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{46}$$

と置く。

つぎに(39)式右辺の第2項を算定しよう。(41)を考慮して($\tau \equiv T-t$)，

$$q \equiv -k+\sigma\sqrt{\tau}=\frac{b-x-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{47}$$

$$b \equiv \log(K/S(0)) \tag{48}$$

と置く。(44)と同様の関係を逆順に考えると，

$$N(-q)=\int_q^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du$$

$$=\int_{b-x}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}dy \tag{49}$$

となるので，

$$\int_a^\infty N(-q)g(x)dx=\int_a^\infty g(x)\int_{b-x}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}dydx \tag{50}$$

を得る。ここで $g(x)$ に(42)の定義を代入する。いま

$$\mu_x \equiv (r-\sigma^2/2)t,\quad \mu_y \equiv (r-\sigma^2/2)T,\quad \rho \equiv \sqrt{t/T},\quad {\sigma_x}^2 \equiv \sigma^2 t,\quad {\sigma_y}^2 \equiv \sigma^2 T \tag{51}$$

と定義すると，

$$y-(r-\sigma^2/2)\tau=y+x-\mu_y-\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-\mu_x)$$

$$\sigma\sqrt{\tau}=\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$$

となるので，

$$A(x)\equiv\mu_y+\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-\mu_x)$$

と記せば，(50)式右辺は次のように書き換えられる。

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}\int_b^{\infty}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-A(x))^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right\}dydx \quad (50')$$

さらに(50′)は，２変量正規分布の理論によって

$$\int_a^{\infty}g(x)\int_b^{\infty}g(y|x)dydx \quad (52)$$

と書き換えられる[10)]。ここに x と y は ρ の相関係数をもち，それぞれが正規分布に従う確率変数で，x は平均 μ_x，分散 $\sigma_x{}^2$ をもち，y は平均 μ_y，分散 $\sigma_y{}^2$ をもつ。(52)における $g(x)$ は x の周辺分布の密度関数，$g(y|x)$ は x が与えられた時の y の条件付き分布の密度関数を意味する[11)]。(52) の $g(x)$ と $g(y|x)$ の積を $g(x,\ y)$ と表すと，

$$g(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\} \quad (53)$$

となり，これは x と y の同時分布の密度関数であることが分かる[12)]。かくして(52)は

$$\int_a^{\infty}\int_b^{\infty}g(x,\ y)dydx \quad (52')$$

となるが，

$$u\equiv(x-\mu_x)/\sigma_x,\quad v\equiv(y-\mu_y)/\sigma_y \quad (54)$$

と変数変換すると，(52′)は $dx=\sigma_x du$，$dy=\sigma_y dv$ を考慮して，つぎのようになる。

10）２変量正規分布については，例えば Hoel(1954)，pp. 144～153 を参照。

11）$g(y|x)$ の y は平均が $A(x)$，分散が $\sigma_y{}^2(1-\rho^2)$ の正規分布をする。

12）注意すべき点として，もし(51)の中の ρ を $-\sqrt{t/T}$ とおけば，(53)式の指数関数のベキにおける -2ρ が $+2\rho$ に変わり，x と y の２変量正規分布の密度関数とはならない。

$$\int_{\frac{a-\mu_x}{\sigma_x}}^{\infty}\int_{\frac{b-\mu_y}{\sigma_y}}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dvdu \tag{55}$$

ここで(40)，(48)，(51)を考慮して

$$(-a+\mu_x)/\sigma_x=[\log(S(0)/S^*)+(r-\sigma^2/2)t]/\sigma\sqrt{t} \tag{56a}$$

$$(-b+\mu_y)/\sigma_y=[\log(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T} \tag{56b}$$

を得る。さらに(46)で定義された α と，

$$\beta\equiv\frac{\log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{46'}$$

とを用いて，(56a) と (56b) はそれぞれ $\alpha-\sigma\sqrt{t}$ と $\beta-\sigma\sqrt{T}$ になり，ρ を $\sqrt{t/T}$ と書くと，(55)の分布関数は

$$N_2(\alpha-\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T})\equiv\int_{-\infty}^{\alpha-\sigma\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\beta-\sigma\sqrt{T}}g(u,\ v)dvdu \tag{55'}$$

と表現される。ここでの $g(u,\ v)$ は(55)式の中の密度関数を示す。かくして(39)式右辺の第2項は

$$-Ke^{-rT}N_2(\alpha-\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T}) \tag{57}$$

になる。

最後に(39)式右辺の第1項を算定しよう。(42)の $g(x)$ を用いて

$$e^{x-rt}g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\} \tag{58}$$

を得る。

他方，(49)式と同様に考えて($\tau\equiv T-t$ と置く)，

$$N(k)=\int_{-k}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du=\int_{b-x}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{y-(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}dy \tag{59}$$

となるので，

$$m_x\equiv(r+\sigma^2/2)t,\ m_y\equiv(r+\sigma^2/2)T,\ \sigma_x{}^2\equiv\sigma^2t,\ \sigma_y{}^2\equiv\sigma^2T,\ \rho\equiv\sqrt{t/T} \tag{60}$$

$$B(x)\equiv m_y+\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-m_x)$$

と置けば，(50′)式と同様の次式が導出される。

$$\int_a^\infty e^{x-rt}g(x)N(k)dx=\int_a^\infty \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$
$$\times\int_b^\infty \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{(y-B(x))^2}{\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right\}dydx \quad (61)$$

そして(52)〜(56)の展開と同じ手順に従って，(61)式右辺は

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\beta}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\xi^2-2\rho\xi\eta+\eta^2}{2(1-\rho^2)}\right\}d\eta d\xi \quad (62)$$

に書き換えられる。ここに

$$\xi\equiv(x-m_x)/\sigma_x,\quad \eta\equiv(y-m_y)/\sigma_y$$

と置く。かくして(39)式右辺の第１項は

$$S(0)N_2(\alpha,\ \beta,\ \sqrt{t/T}) \quad (63)$$

になる。

故に(45)，(57)，および(63)によって，複合オプションの現時点におけるコール価格は

$$\tilde{c}(0)=S(0)N_2(\alpha,\ \beta,\ \sqrt{t/T})-Ke^{-rT}N_2(\alpha-\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T})$$
$$-Le^{-rt}N(\alpha-\sigma\sqrt{t}) \quad (64)$$

と決定される。ここでの諸記号の意味をまとめると，

$$\alpha\equiv\frac{\log(S(0)/S^*)+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\beta\equiv\frac{\log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$N(\alpha-\sigma\sqrt{t})\equiv\int_{-\infty}^{\alpha-\sigma\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2}\right\}dw$$

であり，$N_2(\alpha,\ \beta,\ \rho)$ は(62)の２変量の標準正規分布関数を示す。そして S^* は(38)式を満たす一意の解である。

4.　一定配当額付き株式のアメリカン・コール価格

配当ゼロの株式のアメリカン・コール(満期前に権利行使可能な）は，決して満

期以前に権利行使されないことを先づ明らかにしておこう[13]。いま K を権利行使価格，S を株価，満期までの時間を T，安全資産のリスク無し利子率を r とすれば，現在のアメリカン・コール価格 C は

$$C \geqq \max(0,\ S-Ke^{-rT}) \tag{65}$$

である[14]。もしいま権利を行使すれば，

$$C=\max(0,\ S-K) \tag{66}$$

つまり $C=0$ または $C=S-K(>0)$ である。ところが権利行使しないで「生きている」ままの状態では，$C \geqq 0$ または

$$C \geqq S-Ke^{-rT} > S-K(>0) \quad (T>0 \text{ のとき}) \tag{67}$$

となる。これらは満期前の任意の時点で成立する関係であるので，当面のコール・オプションを満期前に権利行使することは損失となる。かくして満期以前に配当が無い株式のアメリカン・コールは，ヨーロピアン・コールと同等の価値をもつ。

一般に現金配当の権利落ちの前と後では，株価に差が生じ，それがオプション価値に直ちに影響する。もし現金配当に対してオプション価値が変化しないように，契約条項が調整されているならば，そのオプションは配当プロテクト (payout-protected) であり，そうでない場合のオプションはアンプロテクトであると言われている。我々は後者の場合を取扱うが，特に一定配当がオプションの満期日以前に支払われることの確実な株式を対象とするアメリカン・コールの価格について考える。当然に配当権利落ち日より以前の時点では，そのコールの価値はそれ以後よりも高い可能性があるので，そのアメリカン・コール・オプションは満期日の相当以前の時点でも権利行使され得る。この問題を最初に理論的に論じたロール (Roll)(1977) に従って記号をつぎのように約束する。

D＝確実に支払われる既知の配当額。

---

13) Merton (1973), p. 144 を参照。

14) 村田・里麻 (1992), p. 154 を参照。

t ＝配当権利落ち日までの時間。

α ＝配当権利落ちの直後に下落する株価変化額のDに対する割合。

配当付き株式の市場価値を P_τ と記すと，t 時以前における P_τ は，配当なしの株価 S_τ に，D に基づく追加的価値を加算した大きさとなり，t 時以降の τ についての P_τ は S_τ に等しいと考えられる。そして S は(1)式の伊藤型の微分方程式に従い，$\tau(<t)$ 時での D に基づく追加的価値は $\alpha De^{-r(t-\tau)}$ に等しい筈である。後者は配当権利落ち直前において αD となり，その時点より早い時点ほど，r の率で割引かれた一層小さい正値をとる。

当面の株式を対象とするアメリカン・コール・オプションが生きたまま保有される時，配当権利落ちの直後におけるそのオプションの価値は，上述のようにヨーロピアン・コール価格 $c(S(t),\ T-t,\ K)$ に等しくなってしまう。それは t 時点以降では満期日までに配当が無いからである。しかしもしそのオプションが，配当権利落ちの直前に行使されるならば，$S(t)+\alpha D-K$ の収入を得るであろう。ちょうど t 時点において

$$c(S^\dagger,\ T-t,\ K)=S^\dagger+\alpha D-K \tag{68}$$

を成立させるような $S^\dagger$ が算定されるであろう。(68)式の左辺は(30)のBlack-Scholes 式（ただし $\delta=0$ の場合）によって与えられる。故に(68)式はつぎのように書き換えられる。

$$S^\dagger N(d^\dagger)-Ke^{-r(T-t)}N(d^\dagger-\sigma\sqrt{T-t})=S^\dagger+\alpha D-K \tag{68'}$$

ここに

$$d^\dagger\equiv\frac{\log(S^\dagger/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

配当権利落ち日におけるアメリカン・コール・オプションの価値は $S(t)+\alpha D-K(>0)$ であるので，もし $S(t)$ が $S^\dagger$ より大きければ，その時点でアメリカン・コール・オプションは権利行使され，逆に $S(t)\leqq S^\dagger$ であれば，行使されずに満期までヨーロピアン・コールと同じ価値をもつ。故に t 時点において，そのコール価格 $C(t)$ は

$$C(t)=S(t)+\alpha D-K \qquad (S(t)>S^{\dagger}) \tag{69a}$$

$$C(t)=c(S(t),\ T-t,\ K)\equiv c(t) \qquad (S(t)\leqq S^{\dagger}) \tag{69b}$$

の値をとる。これを境界条件として，現時点0における当該アメリカン・コールの価値 $C(0)$ は次式を満たすものとして決まる。

$$C(0)=e^{-rt}E[\max(c(t),\ S(t)+\alpha D-K)] \tag{70}$$

ここで $c(t)$ は(35)によって与えられている。従って(70)の $C(0)$ の一部は前節の複合オプションのコール価格になり，Geske(1979b) はこれを直接計算する。以下で我々は，前節での方法によって(70)式を(69)の条件下に算定する。

(34)，(35)を考慮に入れ，(39)式の導出と同様にして，

$$C(0)=S(0)e^{-rt}\int_{-\infty}^{h}e^{x}N(k)g(x)dx-Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{h}N(k-\sigma\sqrt{T-t})g(x)dx$$
$$+S(0)e^{-rt}\int_{h}^{\infty}e^{x}g(x)dx+(\alpha D-K)e^{-rt}\int_{h}^{\infty}g(x)dx \tag{71}$$

を得る。ここに

$$h\equiv\log(S^{\dagger}/S(0)) \tag{72}$$

k は(41)に定義されたもの，そして $g(x)$ は平均が $(r-\sigma^2/2)t$，分散が $\sigma^2 t$ の正規分布の密度関数である。

(71)式右辺の第4項は，(39)式右辺の第3項と同じようにして，

$$(\alpha D-K)e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t}) \tag{73}$$

と評価される。ここに

$$\gamma\equiv\frac{\log(S(0)/S^{\dagger})+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{74}$$

である。

つぎに(71)式右辺の第3項の評価に移る。(58)式を利用すると，

$$\int_{h}^{\infty}e^{x-rt}g(x)\,dx=\int_{-\gamma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-p^2}{2}\right\}dp\equiv N(\gamma) \tag{75}$$

となる。ただし

$$p\equiv\frac{x-(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{76}$$

と置いている。かくして(71)式右辺の第３項は

$$S(0)N(\gamma) \tag{77}$$

になる。

さらに(71)式右辺の第２項を計算しよう。その中の積分は，(49)式を考慮すると，

$$\int_{-h}^{\infty}N(k-\sigma\sqrt{\tau})\,g(x)dx=\int_{-h}^{\infty}g(x)\int_{b-x}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}dydx \tag{78}$$

を得る。これは(50)式における a を $-h$ で代替したものであるので，(51)～(55)と同様の展開を行うことができる[15]。かくして

$$\frac{h-\mu_x}{\sigma_x}=\frac{\log(S^{\dagger}/S(0))-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}=-\gamma+\sigma\sqrt{t} \tag{79}$$

に注意して，(71)式右辺の第２項はつぎのようになる。

$$-Ke^{-rT}N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T}) \tag{80}$$

最後に(71)式右辺の第１項は，a を $-h$ で代替した(61)式に $S(0)$ を乗じたものとなるので，結局において

$$S(0)N_2(-\gamma,\ \beta,\ \sqrt{t/T}) \tag{81}$$

に等しい。

かくして(71)式全体は下記のように評価される。

$$\begin{aligned}C(0)=&S(0)[N(\gamma)+N_2(-\gamma,\ \beta,\ \sqrt{t/T})]+\alpha De^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})\\&-K[e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})+e^{-rT}N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T})]\end{aligned} \tag{82}$$

ここに β と γ はつぎのように置かれている。

$$\beta\equiv\frac{\log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\quad \gamma\equiv\frac{\log(S(0)/S^{\dagger})+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

(82)式は Geske (1979b)の結果と完全に一致する。

なお

$$N_2(a,\ b,\ \rho)=N(a)-N_2(a,\ -b,\ -\rho) \tag{83}$$

---

15) 脚注12）と同じ注意があてはまる。

の恒等関係がある[16)]。これを(82)式へ考慮すると，それはつぎのように書き換えられる。

$$C(0)=S(0)[1-N_2(-\gamma,\ -\beta,\ -\sqrt{t/T})]+(\alpha D-K)e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})$$
$$-Ke^{-rT}[N(-\gamma+\sigma\sqrt{t})-N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ -\beta+\sigma\sqrt{T},\ -\sqrt{t/T})] \quad (84)$$

5.　複製ポートフォリオの方法によるコール価格

前節での配当付き株式のコール・オプション価値の導出は直接的方法によるが，これを間接的に求める方法を本節で考えよう。当面のアメリカン・コール・オプションの価値が，つぎの三つのヨーロピアン・コール・オプションの価値の合計に等しくなるように，複製(duplication)ポートフォリオを組むことをホエイリー(Whaley)(1981)は提唱する[17)]。すなわち

(a)　行使価格 K，満期が T のヨーロピアン・コール・オプションを1単位買い越す。

(b)　行使価格 $S^\dagger$，満期が $t-\varepsilon$ (ε は任意の微小正値) のヨーロピアン・コール・オプションを1単位買い越す。そして

(c)　行使価格が $S^\dagger+\alpha D-K$，満期が $t-\varepsilon$ の1単位のヨーロピアン・コール・オプションを(a)のコール・オプションの上に書いて，売り越す。

ここにおける $t-\varepsilon$ とは配当権利落ち直前を意味する。いま上述の(a)，(b)，(c)のコール・オプションの現時点0における価格を，それぞれ c_a，c_b，c_c と記すと，(30)式と(64)式を考えて，それらはつぎのように決まる。

$$c_a=S(0)N(\beta)-Ke^{-rT}N(\beta-\sigma\sqrt{T}) \quad (85a)$$

$$c_b=S(0)N(\gamma)-S^\dagger e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t}) \quad (85b)$$

$$c_c=S(0)N_2(\gamma,\ \beta,\ \sqrt{t/T})-Ke^{-rT}N_2(\gamma-\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{t/T})$$
$$-(S^\dagger+\alpha D-K)e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t}) \quad (85c)$$

---

16) Whaley (1981), p. 208 を参照。なお (84) の導出では $1-N(a)=N(-a)$ も考慮する。

17) Roll (1977) の複製とは(b)おいて差異がある。

ここに

$$\beta \equiv \frac{\log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\gamma \equiv \frac{\log(S(0)/S^{\dagger})+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

そして $S^{\dagger}$ は(68′)式を満たすように決まっている。

Whaley のポートフォリオを C_w と記すと，

$$C_w = c_a - c_b - c_c$$
$$= S(0)[N(\beta)+N(\gamma)-N_2(\gamma,\ \beta,\ \sqrt{t/T})]+\alpha De^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})$$
$$-K[e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})+e^{-rT}\{N(\beta-\sigma\sqrt{T})-N_2(\gamma-\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T}, \sqrt{t/T})\}]$$

となる。ところで(83)の恒等関係の対として

$$N_2(a,\ b,\ \rho)=N(b)-N_2(-a,\ b,\ -\rho) \tag{83′}$$

が成立するので，C_w はつぎのように整理される。

$$C_w = S(0)[N(\gamma)+N_2(-\gamma,\ \beta,\ -\sqrt{t/T})]+\alpha De^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})$$
$$-K[e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t})+e^{-rT}N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ -\sqrt{t/T})] \tag{86}$$

これを(82)と比較すると，相関係数 ρ の符号が逆になっている。Geske (1981)は(82)における $\rho=\sqrt{t/T}$ は誤りであることを認めたが，彼は単に誤植(typographical error) と弁解しているに過ぎない。

(86)と同じ結果を前節の Geske (1979b)の直接的方法によって得るために，(71)式右辺の第 1 項と第 2 項の算定を再検討しよう。その第 2 項の積分は ($\tau \equiv T-t$ と置いて)，

$$\int_{-h}^{\infty} g(x)\int_{b-x}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}dydx \tag{87}$$

となることは既に(78)において示された。いま

$$z\equiv -y,\ \mu_z\equiv -(r-\sigma^2/2)T,\ \sigma_z{}^2\equiv\sigma^2T,\ \rho\equiv -\sqrt{t/T},$$
$$\mu_x\equiv(r-\sigma^2/2)t,\ \sigma_x{}^2\equiv\sigma^2 t \tag{88}$$

と定義すると，$\sigma\sqrt{T-t}=\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}$，そして

$$-y+(r-\sigma^2/2)(T-t)=z-x-H(x) \tag{89}$$

となり，ここに

$$H(x)\equiv\mu_z+\rho(\sigma_z/\sigma_x)(x-\mu_x)$$

と置く。故に(87)はつぎのように書ける[18]。

$$\int_{-h}^{\infty}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$

$$\times\int_{-\infty}^{-b}\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(z-H(x))^2}{\sigma_z{}^2(1-\rho^2)}\right\}dzdx \tag{87′}$$

これを計算して整理すると，

$$\int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{-b}\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_x)(z-\mu_z)}{\sigma_x\sigma_z}+\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\} \tag{90}$$

になり，ここで

$$u\equiv(x-\mu_x)/\sigma_x,\quad w\equiv(z-\mu_z)/\sigma_z \tag{91}$$

と置くと，(90)は次のように変形する。

$$\int_{-\infty}^{\frac{h-\mu_x}{\sigma_x}}\int_{-\infty}^{\frac{-b-\mu_z}{\sigma_z}}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uw+w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dwdu \tag{92}$$

ここで，注意すべきは，w についての積分の上限値が $-(b-\mu_z)/\sigma_z$ でなく，$(-b-\mu_z)/\sigma_z$ となることである。そして

$$(h-\mu_x)/\sigma_x=[\log(S^{\dagger}/S(0))-(r-\sigma^2/2)t]/\sigma\sqrt{t}=-\gamma+\sigma\sqrt{t}$$

$$(-b-\mu_z)/\sigma_z=[\log(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}=\beta-\sigma\sqrt{T}$$

を考慮すると，(92)は，

$$N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ -\sqrt{t/T}) \tag{92′}$$

と表現される。

つぎに(71)式の第1項について上述と同じ手順で再計算する。(58)と(59)を考慮して($\tau\equiv T-t$ と置く)，

---

18) $z\equiv-y$ と置くことにより，z に関する積分の範囲は $-\infty$ から $x-b$ まで変わる。(89) 式右辺は，z へ $x-b$ を入れると，$z-H(x)$ に帰するので，その積分の範囲は $-\infty$ から$-b$ までになる。

$$\int_{-h}^{\infty} e^{x-rt} g(x)\,N(k)\,dx = \int_{-h}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\}$$

$$\times \int_{b-x}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dy dx \qquad (93)$$

を得る。いま(88)と同様に，$\sigma_z{}^2 \equiv \sigma^2 T$，$\sigma_x{}^2 \equiv \sigma^2 t$，$z \equiv -y$，$m_z \equiv -(r+\sigma^2/2)T$，$\rho \equiv -\sqrt{t/T}$，$m_x \equiv (r+\sigma^2/2)t$

と定義すると，$\sigma\sqrt{T-t} = \sigma_z\sqrt{1-\rho^2}$，そして

$$-y+(r+\sigma^2/2)(T-t) = z-x-F(x) \qquad (89')$$

となり，ここに

$$F(x) \equiv m_z + \rho(\sigma_z/\sigma_x)(x-m_x)$$

と置く。故に(93)式右辺は(87′)と同様になり，それは次のように整理される。

$$\int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-m_x)(z-m_z)}{\sigma_x\sigma_z} + \left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\} \qquad (94)$$

ついで(91)と同様の変数変換を(94)に施すと，積分の上限値がそれぞれ

$$(h-m_x)/\sigma_x = [\log(S^{\dagger}/S(0)) - (r+\sigma^2/2)t]/\sigma\sqrt{t} = -\gamma$$

$$(-b-m_z)/\sigma_z = [\log(S(0)/K) + (r+\sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T} = \beta$$

となるので，(94)は次のように表現される。

$$N_2(-\gamma,\ \beta,\ -\sqrt{t/T}) \qquad (94')$$

かくして(71)式右辺の第１項と第２項は，その積分部分が(94′)と(92′)となることが分かったので，前節での(82)式は次のように修正されなければならない。

$$C(0) = S(0)[N(\gamma) + N_2(-\gamma,\ \beta,\ -\sqrt{t/T})] + \alpha D e^{-rt} N(\gamma - \sigma\sqrt{t})$$

$$-K[e^{-rt}N(\gamma-\sigma\sqrt{t}) + e^{-rT}N_2(-\gamma+\sigma\sqrt{t},\ \beta-\sigma\sqrt{T},\ -\sqrt{t/T})] \qquad (95)$$

(95)式は Whaley の(86)式に一致する。問題は Geske(1981) も言っているように，複製ポートフォリオの方法は多種類あり，そのうちで最も簡単なものが Geske(1979b) の直接的方法で導出されたコール価格である。その際に相関

係数を正値とするか負値にするかで，(82)式か(95)式かの答になるけれども，Whaley (1981) は数値例によって(95)式の現実適用可性を確認した。

〔付記〕本論文は1991年度関西大学学部共同研究費による研究成果の一部である。

参考文献

[1] Geske, R., "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics,* 7(1979a), pp. 63〜81.

[2] Geske, R., "A Note on an Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends," *Journal of Financial Economics,* 7(1979b), pp. 375〜380.

[3] Geske, R., "Comments on Whaley's Note," *Journal of Financial Economics,* 9(1981), pp. 213〜215.

[4] Hoel, P. G., *Introduction to Mathematical Statistics,* 2nd ed., John Wiley & Sons, 1954. [初版の邦訳，田口訳，『数理統計学入門』，科学新興社，1951年。]

[5] 国田寛，『確率過程の推定』，産業図書，1976年。

[6] Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4(1973), pp. 141〜183.

[7] Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance,* 29(1974), pp. 449〜470.

[8] 三浦良造，『モダン・ポートフォリオの基礎』，同文舘，1989年。

[9] 森村英典・木島正明，『ファイナンスのための確率過程』，日科技連，1991年。

[10] Murata, Y., *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems,* Academic Press, 1977.

[11] 村田安雄，「生産プロジェクトの価値とBlack-Scholes式」，関西大学『経済論集』第41巻（1991年），pp. 815〜828.

[12] 村田安雄・里麻克彦，『金融・為替と価格・投資』，多賀出版，1992年。

[13] 大村敬一，『オプション理論と応用』，東洋経済新報社，1988年。

[14] Roll, R., "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends," *Journal of Financial Economics,* 5(1977), pp. 251〜258.

[15] Whaley, R. E., "On the Valuation of Americal Call Options on Stocks with Known Dividends," *Journal of Financial Economis,* 9(1981), pp. 207〜211.