研究ノート

ダグラス・データと生産関数

堀　江　　義

1. はじめに

小論の目的は，P. H. ダグラス（〔3〕）のデータを手がかりとして分配理論における限界生産力命題（MP理論，と記す）を考えることにある。

もともとダグラスが今日言われるところのコブ・ダグラス生産関数（以下では，CD関数と記す）を開発するに至った動機はMP理論を帰納法的に論証することにあった。従って，本論においてわれわれが採用する方法もダグラスと同様に出来るだけ帰納法的であることをめざしている。また，われわれの結果をダグラスの結論と比較するために，用いるデータもダグラスと同じものである。

われわれは，CD関数を出発点として，さらに良い推定結果をもたらすような関数が存在しないかどうかを探して行く。その結果として，MP理論には否定的な結論にたどり着く。

なお，あらかじめ記すならば，CD関数に関しては J. M. クラーク（〔2〕）を初めとして多くの研究がある。筆者はそれらの一つ一つの文献に当たったわけではないが，CD関数の持つ種々の問題点の要約としては L. クライン（〔4〕）のそれが便利であろう。ただし，本論におけるわれわれの関心はそれとは異なる。

2. CD関数

ダグラスは，数学者コブの協力により，1889—1922年間における合衆国製造業のデータを用いて，資本ストック K，労働L，および生生量 Y との間に

（1）　$Y=1.01K^{0.25}L^{0.75}$

という関係が成立することを発見した。このことは広く知られているが，念のために改めてダグラスと同じデータを用いてわれわれも推定を行ってみよう。その結果，

（2）　$\underset{(0.86)}{lny=0.0170}+\underset{(5.99)}{0.2495\,lnk}$

$RR=0.6201$, $RF=0.6000$, $SE=0.0581$, $DW=1.59$, $SZ=24$

がえられる。ただし，上の式において $y=Y/L$, $k=K/L$ である。また，

RR＝決定係数，RF＝自由度修正済み決定係数，SE＝標準誤差，

DW＝ダービン・ワトソン比，SZ＝標本数，そして

係数の下の括弧内の数値＝対応する t 値の絶対値，

である。以下においても推定式を表わす形式は同じである。

確かに（2）を書き直せば（1）が導がれる。しかし，この結果を眺めてみると気が付くことがいくつかある。たとえば，RR の値は予想外に小さいのではなかろうか。また，定数項の t 値もあまりにも小さい，など。こうして，われわれとしてはもう少し結果の信頼度を高める方法はないだろうか，との気持ちに誘われる。

まず試みに，定数項をゼロと仮定して推定しなおしてみよう。そうしてえられたものが（3）式である。

（3）　$lny=\underset{(11.41)}{0.2779}lnk$: $RR=0.6078$, $SE=0.0577$

これを（2）式と比べるならば，係数の t 値が高くなっていること，そして lnk の係数が大きくなっていることが確認できよう。ただし，当然ながら RR は小さくなる。

実は，本論を通じてわれわれが特に注目するのは lnk の係数の値である。いま（1）式にMP理論を適用すれば労働の分配率は0.75になる。この数値は合衆国の1909―1918年における労働分配率＝0.741に極めて近いことをダグラスは注目した（〔3〕p. 7)。われわれの（3）式においては lnk の係数が0.2779であるから，ここにMP理論を適用すれば労働分配率は0.7221でなければならない。わずかながらダグラスの結果よりは現実の分配率との間の差が開いていることに気が付くだろう。

とはいえ，この程度の差は問題とするには当たらないだろう。むしろ，われわれとしては RR の数値を高める方法を考えたい。

3.　ダミー変数の利用

われわれの見るところでは，ダグラスの用いたデータの中で1917―21年のそれは他の期間のデータに比べて異常な値を示していると判断される。恐らく第一次世界大戦の影響であろうが，それはともかく，この期間の取扱いはやはり別個にするのがよいだろう。そう考えれば生産関数は，ダミー変数を加えることにより

（4）　$lny=a_0+a_1d+(b_0+b_1d)lnk+\varepsilon$

第１表　$lny=a_0+a_1d+(b_0+b_1d)lnk$

ケース	RR	SE	a_0	a_1	b_0	b_1
E11	7481	0.0484	0.0020	−0.1081 (3.27)	0.3341 (7.72)	0
E12	7598	0.0473	−0.0021	0	0.3471 (7.91)	−0.1479 (3.50)
E13	7599	0.0484	−0.0022	0.0038 (0.03)	0.3472 (7.66)	−0.1527 (0.99)
E14	7480	0.0473	0	−0.1091 (3.50)	0.3379 (12.84)	0
E15	7597	0.0462	0	0	0.3428 (13.12)	−0.1463 (3.73)
E16	7597	0.0473	0	0.0016 (0.01)	0.3428 (12.82)	−0.1482 (1.01)

注・RR の値は小数点第１位から表示。以下の表においても同様。括弧内の数値は t 値の絶対値。

として特定化してもよいだろう。ここに a_j, b_j ($j=0,1$) は定数，d はダミー変数である。こうして推定した結果が第１表に示されている。これまでの推定に比して RR がかなり高くなっていることが特徴である。第１表においては，1918—1921年における d の値を１とし，他の期間のそれはゼロである。

なお，注釈を付けるなら，1917—1921年における d を１として，その他の期間の d を０とする場合は，結果はわずかながら劣る。また，a_1 も b_1 も共に０でないケースでは有意な結果はえられない。

一例として，第１表から E12 のケースを取り上げてみるならば，推定式は

(E12)　$lny=-0.0021+(0.3471-0.1479\,d)\,lnk$

となる。ここで lnk の係数を b とおけば，1909—18年間における b の平均値は

$$b=\{0.3471\times9+(0.3471-0.1479)\}/10=0.3323$$

である。従って，ＭＰ理論による労働分配率は0.6677（$=1-0.3323$）でなければならない。同じ期間の合衆国の現実値0.741に比べて0.0733，即ち7.33%の差が生じる。これは無視できる範囲とは言い難いのではないだろうか。

あるいは，もう一つ別の推定の仕方もある。ダグラスのデータから1909—18年の期間のみのデータを用いて推定する方法である。ところが，これによればダミー変数なしでは決定係数 $RR=0.1283$，1918年の d のみを１とするダミー変数を用いても $RR=0.4134$ と

なるにすぎない。

4.　ＣＥＳ生産関数

これまでのところ，われわれはＣＤ関数の枠内で推定式の改善を試みてきたが，その限りで決定係数 RR の上限はほぼ0.76程度であった。ここでわれわれはＣＤ関数から離れて，もっと RR を高める方法を探索することにしよう。

すぐさま気が付くことはＣＥＳ生産関数の存在である。ＣＥＳ関数は，その特殊なケースとしてＣＤ関数をも含んでいるという意味でより一般的であるから，当然ながら，推定結果はより良いものが期待される。しかし，これに関しては本論においては特に注意すべき点がある。すなわち，ＣＥＳ関数はＭＰ理論を前提として導かれるということである（アロー等〔１〕)。われわれとして論証すべき命題を前提にするわけにはいかない。その代わりに

（５） $y^{-\rho}=a+bk^{-\rho}+\varepsilon$: a，b＝定数，ε＝誤差項

として ρ に適当な値を指定し，RR が最大となるような ρ を見つけるという方法を採ることにしよう。ここから直ちに次のような疑問が生じるであろう。

RR を最大にするような ρ は唯一であろうか。われわれとしてはこの問題にすぐさま確定的な解答を出すわけにはいかないので，付表－1に示されるように，まず ρ に種々の値を指定することによって RR が最大となるようなρの近傍を探す，という迂回的方法をとる。

ところで，ＣＥＳ関数が推定式としてＣＤ関数よりすぐれている点は，ＣＤ関数の場合は関数の曲率が k のみによって決定されてしまうのに対して，ＣＥＳ関数の場合はそれが k と ρ との２変数によって決まるということである。従って，データの散布状態の如何に対応して RR が大きくなるような ρ を推定者が選ぶことができる。その結果，先に述べたように，ＣＤ関数よりも常に良い推定結果が期待できる。これはわれわれの方法のメリットであろう。ところでアロー等の方法では賃金率と労働生産性との関係から先に ρ の値が決定されてしまうから，上のような推定上のメリットを生かすことは出来ない。従って，必ずしもＣＤ関数よりも良い結果がえられるとは限らない。

ともあれ，われわれの迂回的方法によってえられた結果を付表－1にまとめておこう。そこにおいて代替の弾力性は $\sigma=1/(\rho+1)$ である。あらかじめ予期されたことではあるが，この表において興味あることは，ρ が１に近づくにつれて RR，a，b などがＣＤ関数の場合に近い値をとっていることである。そして，逆に全く予想されなかったことは，

$\rho=11.9$, $\sigma=0.0775$ において RR が最大値をとるということである。いま，この場合の結果を推定式の形で表わすならば，

（6）　$y^{-11.9}=\underset{(4.37)}{0.21895}+\underset{(7.11)}{1.03597}k^{-11.9}$

$RR=0.69653$, $RF=0.68274$, $SE=0.21137$, $DW=2.055$, $SZ=24$

である。さらに上の式を基にして分配率を計算してみよう。

ここで，労働および資本のそれぞれの分配率を θ_L, θ_K で表わそう。この時，もしMP理論を前提にするならば，（5）式から

（7）　$\theta_L=ay^{\rho}$, $\theta_K=bx^{\rho}$, ただし $x=Y/K$

が成立する。そこで，（6）を用いて1899—1922年間における θ_L の平均値を計算するならば2.019という値がえられる。また，

（8）　$\theta_L+\theta_K=ay^{\rho}+bx^{\rho}=1$

であるから，$\theta_K=-1.019$ となり，これは経済の論理からすれば誠に奇妙な結果といわねばならない。しかし，すでに断わっているように，われわれとしては推定式としてより良い結果を求めているわけであるから，奇妙とは言っても，これを切り捨てる理由を持たない。

むしろ，われわれの疑問は別の所にある。すでにCD関数の推定の際に触れたように，1899—1922年の期間を一括して同一構造とすることに無理があるのではないだろうか。もしそうだとすれば，やはりダミー変数を利用する必要がある。その結果を第2表および第3表に示しておこう。

第2表　$y^{-\rho}=a_0+a_1d+bk^{-\rho}$

ケース	ρ & σ		RR	SE	a_0	a_1	b
E21	4×10^{-5}	0.99996	748095	2×10^{-6}	0.6659	0.3310 (7.72)	0.000004 (3.27)
E22	5×10^{-5}	0.99995	748101	2×10^{-6}	0.6659	0.3341 (7.72)	0.000005 (3.27)
E23	6×10^{-5}	0.99994	748099	3×10^{-6}	0.6659	0.3341 (7.72)	0.000006 (3.27)
E24	−0.60	2.5	755893	0.0316	0.7279	0.2787 (7.91)	−0.0775 (3.56)
E25	−0.61	2.564	7558974	0.0321	0.7290	0.2778 (7.91)	−0.0790 (3.56)
E26	−0.62	2.632	7558971	0.0327	0.7302	0.2768 (7.91)	−0.0805 (3.56)

第3表　$y^{-\rho}=a_0+(b_0+b_1d)k^{-\rho}$

ケース	ρ & σ	RR	SE	a_0	b_0	b_1
E31	−0.999999 10^6	7881	0.0525	0.7545 (17.31)	0.2585 (8.64)	−0.0743 (4.33)
E32	-2.5×10^{-7} 1.0000025	7492	10^{-7}	0.6656	0.3344 (7.74)	-3×10^{-7} (3.28)
E33	1.2×10^{-5} 0.99999	7481	7×10^{-7}	0.6659	0.3341 (7.72)	1.2×10^{-6} (3.27)
E34	1.1×10^{-5} 0.99999	7481	5×10^{-7}	0.6659	0.3341 (7.72)	1.1×10^{-6} (3.27)
E35	1.0×10^{-5} 0.99999	7481	6×10^{-7}	0.6659	0.3341 (7.72)	1.4×10^{-6} (3.27)

注：第2列は下段が σ

これらの表から RR が最大となるものを探すならば，E31 のケースがそれに当たる。この場合，（6）式とは対照的に，$\rho=-0.999999$，$\sigma=10^6$ となる。また，ρ をさらに −1 に近づけても，それによる推定結果の変化は無視しうるほどのものである。そしてこれに対応する分配率の計算値は次のようになる。

$\theta_L=0.6755$，$\theta_K=0.3245$

面白いことには，代替の弾力性がほぼ無限大というようにＣＤ関数からは想像されないような数値になっているにもかかわらず，上の θ_L はダグラスの推定分配率0.75とは7％ほどの開きしかない，ということである。なおまた，E25 のケースも E31 のケースに比してそれほど劣るものとも言えない。もしこれを採用するならば，$\rho=-0.61$，$\sigma=2.564$ であるからＣＤ関数にやや接近する。いずれにせよわれわれがここに至って気が付くことは，生産関数としてどのような形を前提とするかによって代替の弾力性の値は0から無限大までの範囲でかなり大きく変化する，という事実である。

今日まで，代替の弾力性の推定に関して数多くの研究がなされていることはわれわれも承知しているが，上に見てきたように，全く同じデータを基にしてもその値は生産関数の如何によって大きく変化する，という意味で極めて不安定である。そうなれば，もはや代替の弾力性を一定と考えること自体に無理があるのではないだろうか。もしこの推論が認められるとすれば，生産関数に関しても理論的な制約条件はもっと緩やかであってもよいはずである。この考えに即した一つの試みを示すことが本論の目的の一つでもあるが，その準備として，次節において資本ストックに関するわれわれの取り扱いについて説明する必要があるだろう。

5.　資本ストック

われわれが普通に資本ストックと言う場合，そこには種々の年数を経た，種々の財が含まれている。それら種々の財を固定価格によって集計したものが資本ストックである。ダグラスの用いた資本のデータについても同様である。

われわれは，現実には異質であるものをやむをえず同質のものと見なして処理しているわけで，そうする以上，ここにも推定上の誤差が生じることは避けられない。従って，もし何等かの工夫によって少しでも現実に近い取り扱いが可能であれば，この種の誤差は小さくすることが出来るはずである。そこで一つの試みとして，「資本の生産力はその資本の設置時期に依存する」と考えてみよう。ただし，これはあくまでも一つの方法であって，最善の方法であることを主張しているわけではない。

いま，ある年の資本Kは年齢の異なる種々の資本：

$$I, K_{-1}, K_{-2}, \cdots, K_{-u}, \cdots$$

から成り立っているものとしよう。ここにIは当期の投資，K_{-u} は u 年前に投資された資本 I_{-u} の当年における存在量である。さらに，資本の年当り除去率をδとすれば

$$K_{-u}=(1-\delta)^{-u}I_{-u}$$

である。従って，

（9）　$K=I+(1-\delta)I_{-1}+(1-\delta)^2I_{-2}+\cdots=I+(1-\delta)K_{-1}$

が成立する。他方，年齢の異なる資本は生産力も異なると仮定して，

$$K_v=vI+v_1(1-\delta)K_{-1}$$

を作るならば，K_v はいわゆる能率単位の資本を表す。vおよび v_1 は定数と見なされている。

ところで，いま K_{-1} の生産性を基準に採ることにすれば $v_1=1$ としてよい。他方で，われわれはダグラスのデータからδの値をうることはできないので，便宜上 $\delta=0$ とおく。これも誤差を生じる原因となるだろうが，いまのところ仕方がない。以上の仮定により，

（10）　$K=I+K_{-1}$，$K_v=vI+K_{-1}$

の関係が成り立ち，同時に

（11）　$dK_v/dK=v$ がえられる。また $g=(K-K_{-1})/K_{-1}$ とおけば，

（12）　$K=(g+1)K_{-1}$，$K_v=(vg+1)K_{-1}$

とも書換えられる。さらに，$k=K/L$ であることは前節までと同じであるが，ここで能率単位の資本集約度を $k_v=K_v/L$ と定義する。この時，

$\eta = vK/K_v = vk/k_v$

とすれば，(12) より

(13)　$\eta = 1 + (v-1)/(vg+1)$

が成り立つ。

以上の準備の上で，われわれは k_v を（5）におけるkと置き換えよう。その結果として

(14)　$y^{-\rho} = a + bk_v^{-\rho}$，あるいは

(15)　$Y^{-\rho} = aL^{-\rho} + bK_v^{-\rho}$

がえられる。われわれが推定すべき式は(14)であるが，この場合に確実に言えることは，(14) は（5）よりも必ず良い推定結果が期待できるということである。なぜなら，(14) において $v=1$ という特殊ケースが（5）式に当たるからである。

注釈：ただし，厳密に言えば，（5）と (14) とではサンプル・サイズが1だけ異なる。従って，(14) と比較されるべき（5）においては，初期時点のデータが除かれたものでなければならない。

6.　代替の弾力性

実際に推定結果を示す前に，今度は代替の弾力性 σ がどのように表わせるかを見ておこう。R. G. D. アレン (*Mathmatical Analysis for Economists*, Macmillan, 1938, p. 341) によれば

(16)　$\sigma = rdk/(kdr)$，ただし $r = -dK/dL = Y_L/Y_K$

である。なお，上式において Y_K および Y_L は Y をKおよび L で偏微分した係数を表わす。

ところで (15) において Y を一定とおけば

(17)　$dK_v/dL = -(a/b)k_v^{1+\rho}$

がえられる。また $dK_v/dL = (dK_v/dK)\cdot(dK/dL)$ であるから，ここに (11) および(19) を代入することにより

(18)　$r = -dK/dL = \gamma k_v^{1+\rho}$，ただし $\gamma = a/(bv)$

が成立する。さらに (11) および (15) より

(19)　$Y_K = bvx_v^{1+\rho}$，$Y_L = ay^{1+\rho}$

も導かれる。ここに $x_v = Y/K_v$ である。

さて，(18) によって $dr = \gamma(1+\rho)k_v^{\rho}dk_v$ がえられるから，ここで $H = k_vdk/(kdk_v)$ とおけば，σ は

(20)　$\sigma=H/(1+\rho)$

と簡単化されるだろう。従ってもし H が定数ならσも定数であるが，われわれの計算では H は定数とはならない。

このことを次に示そう。まず，(17)，(18) および η を用いて

$$H=\frac{k_v(dK/dL-K/L)}{k(dK_v/dL-K_v/L)}=(ak_v{}^{\rho}+b\eta)/\{b\eta(ak_v{}^{\rho}+b)\}$$

と書き換えられるが，(14) によって

(21)　$ak_v{}^{\rho}+b=x_v{}^{-\rho}$，$ay^{\rho}+bx_v{}^{\rho}=1$

が成立するから，これらを用いれば次式がえられる。

(22)　$H=1+\dfrac{1-v}{v(1+g)}ay^{\rho}$

上式によれば，$v=1$ の時に $H=1$ となるから，この場合にのみ代替の弾力性は定数となることがわかるだろう。後に見るように，われわれの推定では $v\neq1$ である。

7. 技術変化

かつて1950年代に R. M. ソローはＣＤ型の生産関数を仮定して技術進歩を測定した

第４表　$y^{-\rho}=a_0+a_1d+bk_v{}^{-\rho}$

	g	0.5	1	1.5	2	2.5
ρ	$1/(1+\rho)$					
−0.99999	10^5	7216	7381	7497	7567	7591
−0.9	10	7239	7392	7502	7563	7579
−0.5	2	7248	7389	7434	7506	7491
−0.1	1.111	7193	7318	7381	7388	7348
−0.01	1.010	7172	7249	7352	7354	7309
−0.001	1.001	7170	7291	7349	7351	7305
−0.00001	1.00001	7170	7292	7349	7351	7305
0	1					
0.00001	0.99999	7169	7291	7348	7350	7304
0.001	0.9990	7169	7291	7348	7350	7304
0.01	0.9901	7167	7288	7345	7346	7300
0.1	0.9091	7142	7261	7314	7310	7260
0.5	0.6667	7007	7115	7153	7131	7063
1	0.5	6802	6902	6924	6885	6798
2	0.3333	6416	6502	6498	6428	
5	0.1667	6147	6162	6057	5865	

注：表中で，点線より下のケースでは a_1 推定値の t 値が2.0未満。

第5表　$y^{-\rho}=a+(b_0+b_1d)k_v^{-\rho}$

	g	0.5	1	1.5	2	2.5
ρ	$1/(1+\rho)$					
−0.9999	10^4	7625	7751	7825	7850	7830
−0.999	10^3		7750	7825	7850	7830
−0.995	200		7749	7823	7848	7827
−0.9	10		7707	7780	7824	7780
−0.5	2	7400	7525	7591	7605	7572
−0.1	1.111	7215	7338	7397	7401	7358
−0.01	1.010	7174	7296	7354	7355	7310
−0.001	1.001		7292	7349	7351	7305
0	1					
0.001	0.9990		7291	7348	7350	7304
0.1	0.9091		7245	7300	7299	7251
0.5	0.6667		7065	7112	7100	7040
1	0.5		6857	6892	6865	
1.5	0.4		6677	6698	6653	
2	0.3333		6530	6536	6473	

注：表中で，点線より下のケースでは b_1 推定値の t 値が2.0未満。

（〔5〕)。その結果，経済成長における技術進歩の貢献度が予想以上に大きなものとして現われた。この原因の一つが，同質ではない資本ストックを同質なものと見なしたことによるものであることは言うまでもないであろう。その後すぐさまソローはいわゆる「ヴィンテージ型の資本」を仮定することによってこの問題の一つの解決を図ったこともよく知られている（〔6〕)。本論の第5節におけるわれわれの考え方は，定式化は異なるものの，そのアイディアはソローのそれに近い。

さて，(14)を推定するためには今度は二つの値を指定してやらなければならない。そこで v と ρ とを適当に指定することによって決定係数がどのような値をとるかの見当をつけることにしよう。そうしてえられた結果は付表—2に示されている。これは参考のための資料である。なぜなら，すでに見たように，われわれが信用できると思われる結果はダミー変数を用いたものであるが，付表—2はまだダミー変数を利用していない結果であるからである。

次に，ダミー変数を用いた結果を第4表と第5表とにおげる。これら二つの表からわれわれは，第5表において $v=2$，$\rho=-0.9999$の近傍において決定係数の最大値がえられ

るものと見当をつけてもよいだろう。こうして求められた結果が次の式である。

$$(23)\quad \underset{(15.91)}{y^{-0.99999}=0.7441}+(\underset{(8.40)}{0.2502}-\underset{(4.27)}{0.0697}d)k_v^{-0.99999}:v=2.02$$

$$RR=0.7850,\ RF=0.7635,\ SE=0.0525,\ DW=2.005,\ SZ=23$$

上式は能率単位を用いてわれわれが推定した結果のうちで最良のものである。ダグラスの推定結果による $RR=0.6201$ に比較して約 0.165 の改善と言えるだろう。また，先の E31 のケースと比較するなら，RR において0.0031の違いしかなく，SE においてほとんど同じである。さらに E31 における DW は 1.99である。数値の上での比較としてはその通りであるが，その経済的含意は全く異なるものであることに注意しなければならない。

まず，形式的にσを $1/(1+\rho)$ によって求めるなら，それはほぼ正の無限大に近い。次に，より重要な事であるが，分配の問題はどうなるかを考えてみよう。もしＭＰ理論が成立するなら θ_L が(7)で与えられることは前と同じであるが，しかし資本に関してはそうはならない。今度は (19) によって

$$\theta_K=\eta bx_v{}^\rho$$

でなければならない。従って

$$\theta_L+\theta_K=ay^\rho+\eta bx_v{}^\rho$$

であるが，$\eta=1$，即ち $v=1$ でない限り上の値は１に等しくならない。われわれの計算では(23)において $v=2.02$ であった。ここに至ってＭＰ理論は破綻せざるをえない。

一つの打開策として，賃金率のみが労働の限界生産力に応じて分配され，残りが資本に分配される，と考えてみよう。そこで (23) によって θ_L を計算すれば 0.5133 がえられる。また，1909—18年に関して計算すればその平均値は0.4709となって，いずれにせよダグラスの数値 0.741と0.20以上の開きが生じることになる。やはりＭＰ理論では説明できないことになる。

8. おわりに

われわれは，ダグラスと同じデータを用いてダグラスと同じ目的でＭＰ理論の帰納法的テストを試みた。その結果，ダグラスとは全く異なる結論に到達しうることが示された。

このような結論に達した理由を考えてみたい。第１は，今日の時点から言えば生産関数は必ずしもＣＤ型である必要はない，ということである。生産関数の型が変われば限界生産力の値が変化することは言うまでもない。しかしわれわれは，ＣＤ関数がその後の生産

関数の実証研究に果たしたパイオニア的役割をいささかも否定するものではない。第2に，資本ストックの取り扱い方にも種々の方法が考えられるが，同質な資本というのはあくまでも単純化であり，そこから直ちにMP理論を実証できるわけではない，ということである。

第3は推論の方法に関係する。ダグラスの場合は完全競争市場を前提にして推論を組立ているが，われわれの推論においては特定の市場構造を前提にしていない。特に，CES関数の推定に際して言えば，もともとCES関数の導出に当たっては①完全競争市場，②MP理論の成立，の二つを前提にした演繹的推論が重要な役割をはたしている。われわれの方法では上のいずれの仮定をも必要としないし，また仮定してはいけない。その意味では帰納法的推論をより徹底させたものである。最後に，本論では触れなかったが，MP理論をテストする際にマクロの生産関数を用いるのが適当か，という問題も残されている。

これらの他に，本論ではデータ利用の制約上，確かめられなかった問題もある。労働時間と稼働率とが生産関数に与える影響である。これらをも考慮するならば生産関数はより技術的関係に近づくはずであり，本論の結論もまた違ったものになるかもしれない。この問題は別のデータを用いることによって確かめるより仕方がない。

いずれにせよ，すでに半世紀以上も前の業績をあえて分析しようという気になったのは，限界生産力理論がどれほど強力な論理的基盤に立脚しているのかを確かめてみたかったからに他ならない。

〔参　考　文　献〕

〔1〕Arrow, K. J. et al (1961), Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *The Review of Economics and Statistics,* Vol. XLIII, No. 3, Aug., 1961.

〔2〕Clark, J. M. (1928), Inductive Evidence on Marginal Productivity, *American Economic Review,* Vol. 18, No. 3, Sept., 1928.

〔3〕Douglas, P. H. (1964), *The Theory of Wages,* Augustus M. Kelley, Bookesller, 1964. (First Published 1934, Reprinted 1957)

〔4〕Klein, L. R. (1962), *An Introduction to Econometrics,* Maruzen Asian Edition, 1962.

〔5〕Solow, R. M. (1957), Technical Change and the Aggrigate Production Function, *The Review of Economics and Statistics,* Vol. XXXIX, No. 3, Aug., 1957.

〔6〕Solow, R. M. (1960), Investment and Technical Progress, in *Mathmatical Methods in the Social Sciences* (ed. by K. J. Arrow et al), Stanford, 1960.

付表—1　$y^{-\rho}=a+bk^{-\rho}$

ρ	σ	RR	SE	a	b
−1	+∞	5987			0.1728
−0.5	2	6112			0.2102
−0.1	1.1111	6186			0.2415
−10-4	1.0001	620136			0.2494
−10-5	1.00001	620206			0.24946
−10-6	1.000001	615506			0.24940
0	1	6201		0.0170	0.2495
10-6	0.999999	615622			0.24972
10-4	0.9999	620138			0.24947
0.1	0.90909	6215			0.2575
1	0.5	6293		0.6635	0.3298
9	0.1	6896		0.2871	0.8706
15	0.0625	6858		0.1692	1.1985
19	0.05	6448		0.1291	1.3933
11.8	0.0781	69653	0.2106	0.2209	1.0305 (7.11)
11.9	0.0775	69654	0.2114	0.2190 (4.37)	1.0360 (7.11)
12.0	0.0769	69653	0.2121	0.2170	1.0414 (7.11)

〔参考〕

−10-6×0.99999	1.000001	6212	0.0000	0.7497	0.2503 (6.01)
−10-6×1.0001	1.000001	6273	5.7×10^{-8}	0.7501	0.2499 (6.08)
−10-6×1.000001	1.000001	6220	0.0000	0.7493	0.2507 (6.02)

付表－2　$y^{-\rho}=a+bk_v^{-\rho}$

ρ	$1/(1+\rho)$	g: 0.5	1	1.5	2	2.5	3
-0.99999	10^5	5678	5773	5824	5888	5911	5921
-0.9	10	5701	5795	5862	5905	5924	5921
-0.5	2	5780	5869	5928	5958	5963	5946
-0.1	1.111	5837	5923	5973	5991	5982	5950
-0.01	1.010	5846	5932	5980	5996	5984	5948
-0.001	1.001	5847	5933	5981	5996	5984	5948
-10^{-5}	1.00001	5849	5933	5981	5997	5984	5947
$-10^{-5}/2$	1.000005	5845	5931	5980	5995	5984	5945
0	1		5904				
10^{-6}	0.999999	5828	5898	5946	5969	5979	5923
$10^{-6}\times 2$	0.999998	5857	5943	5993	6012	5989	5958
10^{-5}	0.99999	5847	5933	5981	5996	5983	5947
0.001	0.9990	5847	5933	5981	5996	5984	5948
0.01	0.9901	5848	5934	5982	5997	5984	5947
0.1	0.9091	5848	5934	5982	5997	5984	5947
0.5	0.6667	5857	5942	5988	6000	5984	5944
1	0.5	5897	5978	6006	5992	5944	5870
2	0.3333	5900	5974	5979	5931	5843	5725
5	0.1667	6104	6119	6019	5833	5581	5276
10	0.0909	6823	6735	6497	6113	5577	4895
20	0.048	7330	7213	6989	6554	5730	4386

注：1）$\rho=0$ の場合は CD 関数になるので，直接 CD 関数として推定。ただし，データは1900-22年の期間。

2）表中で，点線より下のケースでは $b>1$ となる。