論　文

オプション価格と投資の機会費用

——1期または2期の期限付き——

村　田　安　雄

1. 序

企業の設備投資にオプション価格の考え方を取り入れると，投資を何時実施するのが正しい戦略かを明らかにできることが，McDonald-Siegel (1986) によって初めて明らかにされた。しかし連続時間モデルで難解な数学的方法が使用されているために，彼等の論旨は余り理解されていないと思われる。そこで我々は離散時間モデルを用いた簡単なオプション取引を援用して「リスクのないポートフォリオ」(riskless portfolio) の方法で，この問題に初歩的解答を与えることを目指す[1)]。

最初に投資の q 理論のような伝統的理論に欠落した機会費用があることを指摘し（第2節），これをオプション価格の観点から考察する（第4節にて）ための予備的分析を第3節にて行う。さらに投資の期限を1期から2期へ伸ばした場合を第5，第6節において分析し，第7節で価格上昇期待の確率が高くなった時の投資の機会費用の変化を検討する。

2. 伝統的投資理論の欠陥

一企業が設備投資を最適に決定する理論の代表的なものとしての q 理論によ

1）riskless portfolio の方法によるオプション価格については，Cox-Ross-Rubinstein (1979) と横山 (1985) を参考にした。

れば，投資の調整費用 (adjustment costs) の存在を前提に，企業の市場価値 (market value) が資本の再取得費用 (replacement cost) より大きい時に投資されるべきとして，企業の市場価値は現在から将来にわたるすべての純収益の現在価値を指している[2)]。これを限界的に考えると，一単位の投資によって増す企業価値の増加分が，投資に支払われる費用を回収し得る程に大きい時に，その投資が行われるという限界 q 理論になる。これはまた，一単位の投資の限界利得 (marginal benefit) が投資の限界費用 (marginal cost) を超過する時に投資を行うという伝統的理論に，投資の調整費用を考慮したものと言える。投資の限界利得からその限界費用を差し引いた金額の現在価値を，その投資の純現在価値 (net present value, NPV と略記) と呼び，伝統的投資理論は NPV が正値であれば投資を行うべきであるとし，その際に考慮される投資の費用は実際に経費として支出されるものに限られる。

これに対し McDonald-Siegel (1986) は，一企業が設備投資を行うに当って，それに伴う利潤の現在価値と設置のための直接経費の差を算定するのみでは不十分であり，設備投資が行われた後ではそれを解消することは不可能であるという,「非可逆性」(irreversibility) にも配慮しなければならないと主張し，今日投資する価値と，将来投資する現在価値とを比較することが正しい算定であると言う。これを例証するために，まず Pindyck (1990) の2期モデルを用いよう。

いま一企業が或る装置を生産する工場を建設するという非可逆的投資を考え，その建設費を I とする。その工場の操業により1期間に1箇の装置を生産し，操業費用はゼロと想定する。その製品の現在価格を P_0 とし，次期の価格 P_1 は q の確率で$1.5\,P_0$, $1-q$ の確率で$0.5\,P_0$ になり，それ以降は P_1 の水準が保たれると予想する。簡単のためこの工場は永久に操業し続け，減価償却はないと考える。そして将来収益を現在価値へ割引く1期間割引率はリスクなし利子率 r とすると，今期に投資する場合の NPV は次式になる。

2）村田（1990）を参照。

$$\mathrm{NVP}_1 = P_0 + \sum_{t=1}^{\infty} E(P_1)(1+r)^{-t} - I \tag{1}$$

ここに $E(P_1)$ は P_1 の期待値である。つまり

$$E(P_1) = 1.5P_0q + 0.5P_0(1-q) = (q+0.5)P_0$$

次期に P_1 が $0.5P_0$ になれば，当該投資を行わないことにし，P_1 が $1.5P_0$ になれば投資することにすれば，次期投資する場合の NPV は次のように表わされる。

$$\mathrm{NPV}_2 = \left(\sum_{t=1}^{\infty} 1.5P_0(1+r)^{-t} - I(1+r)^{-1}\right)q \tag{2}$$

数値例として $r=0.1$，$q=0.5$ と置くと，

$$\mathrm{NPV}_1 - \mathrm{NPV}_2 = 3.5P_0 - \frac{6}{11}I$$

となり，従って I が $(77/12)P_0$ より大きい時には，NPV_1 よりも NPV_2 の方が大きく，今期投資するよりも 1 期待った方が得策である。いま $P_0=100$, $I=800$と想定すると，$\mathrm{NPV}_1=300$，$\mathrm{NPV}_2=386.3$ となり，この場合に今期投資することは伝統的理論では推奨されるが，それを実施した時には，投資を待つことによって得られるべき利得86.3を失うことになる。

以上の説明をオプション取引として考えれば，投資するコール・オプションの権利を現在行使しないで，次期まで留保する場合の，そのオプション価格が NPV_2 に相等するであろう。このことを説明するために，通常のオプション価格の算定法を次節に示し，それと対応させるのが説得的である。

3.　コール・オプション価格（期限 1）

通常の金融取引での簡単なコール・オプションの例として，或る株の先物の空売りとその株へのコール・オプションの買いを組み合わせたポートフォリオを想定する。株の現在価格を S_0 とし，次期の価格 S_1 は q の確率で$1.5S_0$ となり，$1-q$ の確率で$0.5S_0$ となる場合に，行使価格 K のコール・オプション価格を算定しよう。このオプションの期限を 1 期とすると，次期におけるオプション価格 C_1 は

$$C_1 = \max(0,\ S_1 - K) \tag{3}$$

によって決められる。

まず$K=S_0$の場合について，リスクのないポートフォリオを表1にまとめよう。

表1　ポートフォリオ（A）

		単位	価格	$S_1=1.5S_0$	$S_1=0.5S_0$
買い	S_0 コール・オプション	1	C_0	$C_1=S_1-S_0$	$C_1=0$
売り	株先物	n	S_0	$1.5nS_0$	$0.5nS_0$

ここでは n 単位の株先物を単価 S_0 で空売りし，S_0 コール・オプションの1単位の買いと組み合わされる。このポートフォリオが次期に持つ価値 W_1 は（4）式で定義される。

$$W_1 \equiv C_1 - nS_1 \tag{4}$$

W_1 をリスク無しにするには，$S_1=1.5S_0$ と $S_1=0.5S_0$ のいずれの場合の W_1 も等価にならなければならない。すなわち

$$0.5S_0 - 1.5nS_0 = -0.5nS_0 (= W_1) \tag{5}$$

（5）式から $n=0.5$を得る。これを（4）式へ代入すると，$W_1=-0.25S_0$ となる。ポートフォリオ(A)が今期に持つ価値 W_0 は

$$W_0 \equiv C_0 - nS_0 \tag{6}$$

であって，その1期後のキャピタル・ゲインは次のようになる。

$$W_1 - W_0 = -0.25S_0 + 0.5S_0 - C_0 \tag{7}$$

ところで株を空売りした人は，当初にn株を所有者から借り，後に同じ株数を貸手へ返却する義務があり，さらに空売りポジションが継続している間の利子相当額をも支払わなくてはならない[3]。いま1期間のリスク無し市場利子率 r を0.1としよう。当該株の期待変化率を ρ とすると

$$\rho \equiv (E(S_1) - S_0)/S_0 \tag{8}$$

3）コックス=ルービンシュタイン（1988），p. 5 を参照。

であり，この例では

$$E(S_1)=1.5S_0q+0.5S_0(1-q)=(q+0.5)S_0$$

となるので，$\rho=q-0.5$ となる。前述の空売りポジションは１期間継続するので，その間の利子相当額のうち支払う額は，当該株のキャピタル・ゲインを除いた(９)で示される。

$$(r-\rho)nS_0=(0.6-q)0.5S_0 \tag{9}$$

１期間ポートフォリオ(A)を保持することから得られる収益は，(７)から(９)を差し引いた大きさであり，市場均衡においてはこれが rW_0 に等価でなければならない。すなわち

$$0.25S_0-C_0-(0.6-q)0.5S_0=0.1(C_0-0.5S_0) \tag{10}$$

が成立するように，当該コール・オプション価格 C_0 を算定する。つまり

$$C_0=0.5qS_0/1.1 \tag{11}$$

いま $q=0.5$，$S_0=100$ と置けば，$C_0=22.73$ となる。

つぎに $S_0\fallingdotseq K$ の場合として

$$K/1.5<S_0\leqq K/0.5 \tag{12}$$

の範囲の S_0 について，ポートフォリオを表２のように作り，前述と同じ論理に基づいて C_0 を算定すると，

$$C_0=(1.5S_0-K)q/1.1 \tag{13}$$

となる。ここで $q=0.5$，$K=100$ と置けば，

$$C_0=0.6818S_0-45.45 \tag{13'}$$

が得られる。(11) 式は $K=S_0$ と置いた時の (13) 式であることは自明であろう。

表２　ポートフォリオ (B)

$\frac{K}{1.5}<S_0\leqq\frac{K}{0.5}$		単位	価格	$S_1=1.5S_0$	$S_1=0.5S_0$
買い	Kコール・オプション	1	C_0	$C_1=S_1-K$	$C_1=0$
売り	株 先 物	n	S_0	$1.5nS_0$	$0.5nS_0$

最後にコール・オプションの原理によって

$$C_0=\max(0,\ S_0-100,\ 0.6818S_0-45.45) \tag{14}$$

とならなければならない。(14) を充たす C_0 を描く曲線は図1の折線 OXYZ で示されている。X点の S_0 は66.7で，Y点の S_0 は171.4である。C_0 のうち S_0-100は本源的価値 (intrinsic value) と呼ばれ，$C_0-(S_0-100)$ は時間価値 (time value) と言われる。後者は S_0 が$100(=K)$ から離れるほど小さくなって行く[4]。

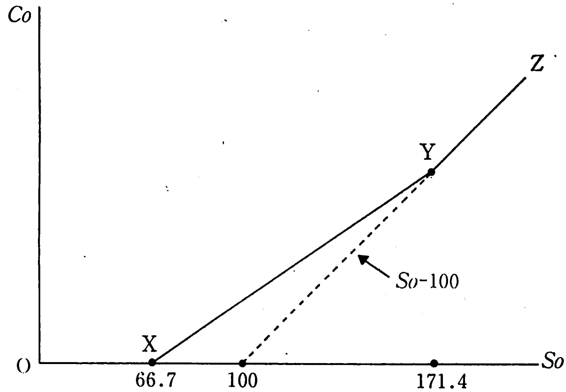

図1　期限1のオプション価格

4.　投資の機会費用（期限1）

前節でのオプション価格の原理を投資の機会費用の算定に適用したのが Pindyck (1990, pp. 8-13) である。ただしこの場合は株先物の代りに，建設予定工場の製品の装置の先物を空売りする。そしてその装置の価格に比例する工

4）本文での C_0 の算定において除かれた領域は $K<0.5S_0$ と $K\geqq1.5S_0$ である。前者の $S_0>K/0.5$ の領域では $C_0=(S_0-K)/1.1$ と計算されるが，これは本源的価値より小さいので，オプション原理によって $C_0=S_0-K$ に変更される。また後者の $S_0\leqq K/1.5$ の領域では $C_0=0$ になる。

場の現在価値 V_0 が，株先物の現在価格 S_0 に代替し，コール・オプションの行使価格としては投資の直接費用 I が用いられる。

第2節の末尾での例示から $\mathrm{NPV}_1<\mathrm{NPV}_2$ の状態において今期投資することは不利になることが分かった。(1) を考慮して言い換えると，それは

$$P_0+E(P_1)r^{-1}<I+\mathrm{NPV}_2 \tag{15}$$

の不等式の成立する時に，今期の投資が不利となることと同じである。(15)式の左辺は，当面の2期モデルにおける V_0 を表わし，右辺は投資の総費用を示し，特に NPV_2 は投資の機会費用であると解釈される。

さて装置先物 n 単位を現在価格 P_0 で空売りし，I コール・オプション1単位を F_0 の価格で買うというポートフォリオ(a)を組み，装置先物の次期での価格 P_1 は q の確率で $1.5P_0$ となり，$1-q$ の確率で $0.5P_0$ となる場合を表3にまとめる。

表3　ポートフォリオ (a)

$\frac{I}{16.5}<P_0\leqq\frac{I}{5.5}$		単位	価格	$P_1=1.5P_0$	$P_1=0.5P_0$
買い	I コール・オプション	1	F_0	$F_1=16.5P_0-I$	$F_1=0$
売り	装置先物	n	P_0	$1.5nP_0$	$0.5nP_0$

このオプションの期限は1期であり，次期のオプション価格 F_1 は

$$F_1=\max(0,\ V_1-I) \tag{16}$$

によって決められ，ここに V_1 は投資対象の工場の次期での価値であって，

$$V_1\equiv P_1\sum_{t=0}^{\infty}(1+r)^{-t}=P_1(1+r^{-1}) \tag{17}$$

に等しい。そして $r=0.1$ と置いて，$P_1=1.5P_0$ のとき $V_1=16.5P_0$ となり，$P_1=0.5P_0$ のとき $V_1=5.5P_0$ となる。従って $I/16.5<P_0\leqq I/5.5$ の範囲内の P_0 についてポートフォリオ (a) での F_1 の値が表3のように決まる。このポートフォリオが次期に持つ価値 Φ_1 は

$$\Phi_1\equiv F_1-nP_1 \tag{18}$$

であり，Φ_1 をリスク無しにするには，P_1 のいずれの値についても Φ_1 を等価

にしなければならない。すなわち

$$16.5P_0-I-1.5nP_0=-0.5nP_0(=\Phi_1) \tag{19}$$

(19)式からヘッジ比率は次のように決まる。

$$n=16.5-I/P_0 \tag{20}$$

これを（19）へ代入して

$$\Phi_1=0.5I-8.25P_0 \tag{21}$$

を得る。ポートフォリオ(a)が今期に持つ価値は

$$\Phi_0\equiv F_0-nP_0=F_0+I-16.5P_0 \tag{22}$$

であり，これらが市場均衡式

$$\Phi_1-\Phi_0-(0.1-\lambda)nP_0=0.1\Phi_0 \tag{23}$$

を充たすように F_0 が決まり，ここに λ は（8）式の S を P で代替した ρ に相当する。つまり

$$\lambda\equiv(E(P_1)-P_0)/P_0=q-0.5 \tag{24}$$

(20)，(21)，(22)，(24) を (23) 式へ代入して整理すると，

$$F_0=(15P_0-I/1.1)q \tag{25}$$

が導出される。

他方，投資対象の現在価値は

$$V_0\equiv P_0+E(P_1)\sum_{t=1}^{\infty}(1+r)^{-t} \tag{26}$$

であって，$r=0.1$ と置けば次のようになる。

$$V_0=(10q+6)P_0 \tag{27}$$

(27) を (25) 式へ考慮すると，

$$F_0=\frac{15q}{10q+6}V_0-\frac{q}{1.1}I \tag{28}$$

と表現でき，$q=0.5$ および $I=800$ と置けば

$$F_0=0.6818V_0-363.64 \tag{28'}$$

になる。最後にコール・オプションの原理によって

$$F_0=\max(0,\ V_0-800,\ 0.6818V_0-363.64) \tag{29}$$

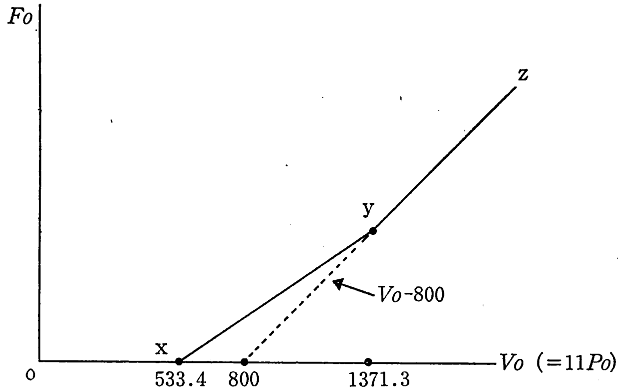

図２　期限１の投資の機会費用

とならなくてはならない。かくして（14）の C_0 と同様に F_0 は V_0 との対応において描かれ，（29）式のそれは図２での折線 ｏｘｙｚ で図示される（ｘ点における V_0 は533.4であり，ｙ点での V_0 は1371.3になる)。このとき $P_0=100$ と置けば F_0 は386.3 になり，これは第２節での NPV_2 に等しく，投資の機会費用を示すことは既に説明された。

図２において V_0 が 533.4〜1371.3の間にある時，F_0 は V_0-800 より大きく，今期投資するよりも次期投資する方が利益は多く，その利益はオプションの時間価値に等しい。その場合の投資の機会費用は本源的価値と時間価値の合計になる。1371.3より大きな V_0 に対応する F_0 は V_0-800 に一致するので，時間価値は無く，従って今期投資する（I コール・オプションを今期行使する）ことは正しい戦略である。

以上の分析において，オプション価格の値は I, q および P_0 に依存しており，このうちの２箇の値を予め与えると，残りの一つとオプション価格の関連を図示できる。このようにして，図３では $q=0.5$，$P_0=100$と置いた時の I との関連が描かれ，また図４では $P_0=100$，$I=800$と置いた時の q との関連が描かれている。これらの図によれば，$F_0>V_0-I$ となる I は 641.6〜1100 の範

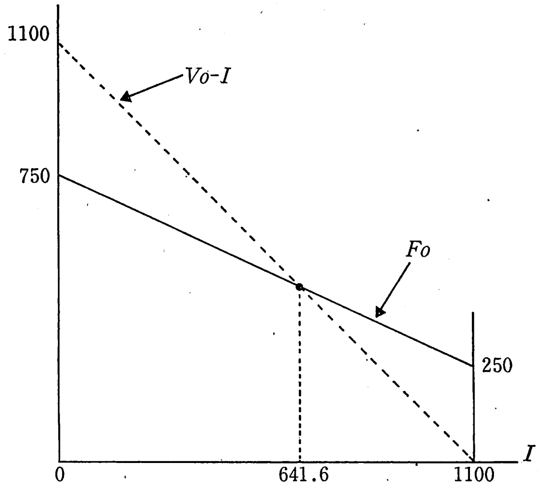

図３　投資の直接費用との関連

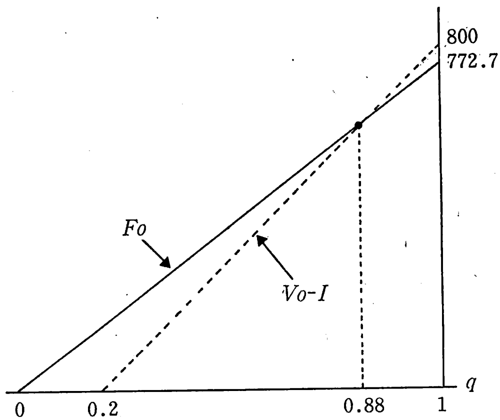

図４　価格上昇確率との関連

囲，q は0〜0.88 の範囲にあって，その範囲内では次期投資するのが正しい戦略である。

ところで投資の期限について，これまでは１期と考えて来たが，これが２期以上になると，投資の機会費用の算定は違ってくる。有利と思われる投資を時

機を失しないように決定するためには，或る期限内に投資決定を最も有利に行う必要があろう。そこで比較のために投資期限が2期の場合についての投資の機会費用を算定したいが，その前にオプション価格について権利の行使期限が2の場合を分析する。

5.　コール・オプション価格（期限2）

簡単化のために $r=0.1$，$q=0.5$，$K=100$ と定めておいて，第3節での期限1のオプション価格モデルを期限2のモデルに拡張すると，株先物価格の変動期待は図5に示され，Ⓐ点は0期点，Ⓑ点とⓒ点は1期の位置を意味する。Ⓑ点でのポートフォリオとして表4の（B-1）と表5の（B-2）の2種の組合せがあり，前者は $100/2.25<S_0\leqq 100/0.75$ の範囲内の S_0 に対して，後者は $100<0.75S_0$ の場合に適合する。これらのポートフォリオでは，1期での株先物 m 単位を $S_1=1.5S_0$ で空売りし，100コール・オプションの1単位の買いに組

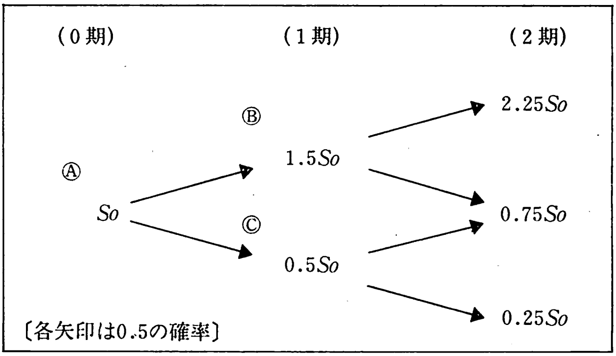

図5　株先物価格の変動期待

表4　ポートフォリオ（B-1）

$\frac{100}{2.25}<S_0\leqq\frac{100}{0.75}$		単位	価格	$S_2=2.25S_0$	$S_2=0.75S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_1	$C_2=S_2-100$	$C_2=0$
売り	株　先　物	m	$1.5S_0$	$2.25mS_0$	$0.75mS_0$

み合わしている。このポートフォリオが2期に持つ価値 W_2 は次のように定義される。

$$W_2 \equiv C_2 - mS_2 \tag{30}$$

表4において W_2 をリスク無しにするには，$S_2=2.25S_0$ と $S_2=0.75S_0$ のいずれの場合にも W_2 は等価にならなければならない。すなわち

$$2.25S_0 - 100 - 2.25mS_0 = -0.75mS_0 (= W_2) \tag{31}$$

(31) 式から，$m=1.5-66.67/S_0$ となるので

$$W_2 = 50 - 1.125S_0 \tag{32}$$

を得る。ポートフォリオ（B-1）が1期に持つ価値は

$$W_1 = C_1 - 1.5mS_0 \tag{33}$$

であるので，市場均衡式

$$W_2 - W_1 - (0.1 - \rho)1.5mS_0 = 0.1W_1 \tag{34}$$

が充たされるように C_1 が決まる。ここに

$$\rho \equiv (E(S_2) - 1.5S_0)/1.5S_0$$

$$E(S_2) = 0.5(2.25 + 0.75)S_0 = 1.5S_0$$

であるので，$\rho=0$ となる。これらをすべて考慮に入れて (34) 式を整理すれば

$$C_1 = 1.0227S_0 - 45.45 \equiv C_{1a} \tag{35a}$$

が得られる。他方，表5についても上述と同じ方法で C_1 を算定すると，次のようになる。

$$C_1 = 1.3636S_0 - 90.91 \equiv C_{1b} \tag{35b}$$

注意すべきは，ポートフォリオ（B-1）は S_0 が 44.44～133.3 の範囲においてのみ妥当し，ポートフォリオ（B-2）は S_0 が 133.3 より大きな範囲におい

表5　ポートフォリオ（B-2）

$100<0.75S_0$		単位	価格	$S_2=2.25S_0$	$S_2=0.75S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_1	$C_2=S_2-100$	$C_2=S_2-100$
売り	株　先　物	m	$1.5S_0$	$2.25mS_0$	$0.75mS_0$

表6　ポートフォリオ　(C)

$\frac{100}{0.75}<S_0\leqq\frac{100}{0.25}$		単位	価格	$S_2=0.75S_0$	$S_2=0.25S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_1	$C_2=S_2-100$	$C_2=0$
売り	株　先　物	m	$0.5S_0$	$0.75mS_0$	$0.25mS_0$

てのみ妥当することである。

つぎに©点で133.3～400の S_0 について適合するポートフォリオ(C)を表6にまとめて，前述と同様にリスクのないポートフォリオを作り，市場均衡を充たすオプション価格 C_1 を算定すると次の結果を得る。

$$C_1=0.3409S_0-45.45\equiv C_{1c} \tag{35c}$$

さらに0期のⒶ点において，S_0 の大きさに応じた3種のポートフォリオを作ることができ，それらを表7，表8，表9にまとめる。表7のポートフォリオ（A-1）は S_0 が44.44～133.3の範囲で適合し，次期にこれが持つ価値 W_1 は，リスク無しの状態では

$$W_1=C_{1a}-1.5nS_0=-0.5nS_0 \tag{36}$$

となり，(35a）を考慮すると，

$$n=1.0227-45.45/S_0 \tag{37}$$

$$W_1=22.73-0.5114S_0 \tag{38}$$

を得る。このポートフォリオが今期に持つ価値は

$$W_0=C_0-nS_0 \tag{39}$$

であり，市場均衡式

$$W_1-W_0-(0.1-\rho)nS_0=0.1W_1 \tag{40}$$

を充たすように C_0 が決まる。$\rho=0$ を考慮し，(37)―(39）を（40）式へ代入

表7　ポートフォリオ（A-1）

$44.44<S_0\leqq133.3$		単位	価格	$S_1=1.5S_0$	$S_1=0.5S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_0	$C_1=C_{1a}$	$C_1=0$
売り	株　先　物	n	S_0	$1.5nS_0$	$0.5nS_0$

表8　ポートフォリオ（A-2）

$133.3<S_0\leqq 200$		単位	価格	$S_1=1.5S_0$	$S_1=0.5S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_0	$C_1=C_{1b}$	$C_1=0$
売り	株　先　物	n	S_0	$1.5nS_0$	$0.5nS_0$

して整理すると

$$C_0=0.4649S_0-20.66\equiv C_{0a} \tag{41}$$

が導出される。

また表8は S_0 が133.3〜200の範囲内にあるときのⒶ点でのポートフォリオをまとめている。上記と同様の算定法によって，この（A-2）のポートフォリオにおけるオプション価格 C_0 は

$$C_0=0.6198S_0-41.32\equiv C_{0b} \tag{42}$$

と求められる。

さらに表9は S_0 が200〜400の範囲内にある時のⒶ点でのポートフォリオを示し，この（A-3）におけるオプション価格 C_0 も，上述と同様にして次のように算定される。

$$C_0=0.7747S_0-61.98\equiv C_{0c} \tag{43}$$

最後にコール・オプション価格の原理によって，S_0 の大きさに応じて C_0 は次のようにならなくてはならない。

(イ)　$44.44<S_0\leqq 133.3$　については

$$C_0=\max(0,\ S_0-100,\ C_{0a}) \tag{41'}$$

(ロ)　$133.3<S_0\leqq 200$　については

$$C_0=\max(0,\ S_0-100,\ C_{0b}) \tag{42'}$$

表9　ポートフォリオ（A-3）

$200<S_0\leqq 400$		単位	価格	$S_1=1.5S_0$	$S_1=0.5S_0$
買い	100コール・オプション	1	C_0	$C_1=C_{1b}$	$C_1=C_{1c}$
売り	株　先　物	n	S_0	$1.5nS_0$	$0.5nS_0$

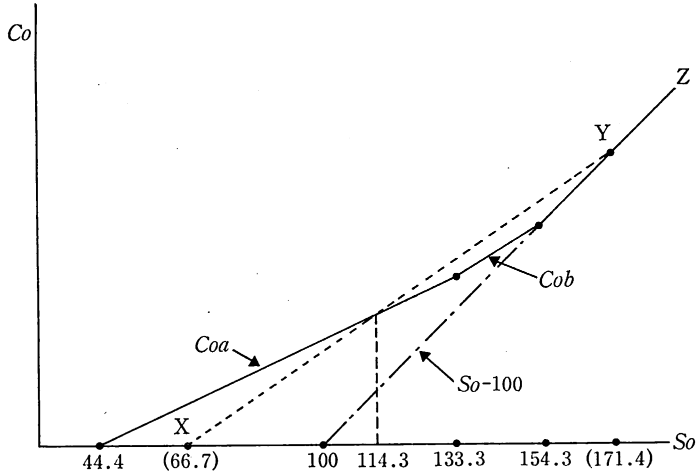

図6　期限2のオプション価格

(ハ)　$200 < S_0 \leqq 400$　については

$$C_0 = \max(0,\ S_0 - 100,\ C_{0c}) \qquad (43')$$

これらを検討した結果は下記の通りである。

(イ)の場合には（41）式が適合する。

(ロ)のうちで，$133.3 < S_0 \leqq 154.3$ については，$C_0 = C_{0b}$ が，

$154.3 < S_0 \leqq 200$ については，$C_0 = S_0 - 100$ が適合する。

(ハ)の場合には　$C_0 = S_0 - 100$ が適合する。

なお S_0 が44.44 以下であれば，$C_0 = 0$ となる。

前述の期限２のオプション価格 C_0 を図に描いたのが図６の実線であり，この上に期限１のそれを破線で重ねた。その結果，S_0 が44.4から114.3までは期限２の C_0 の値が期限１のそれより大きく，その後は逆転していることが分かる。

6.　投資の機会費用（期限２）

第４節では投資の直接費用 I をコール・オプションの行使価格とし，投資実施の期限を１期と想定した場合に，投資を今期行うか，次期まで待つかの判

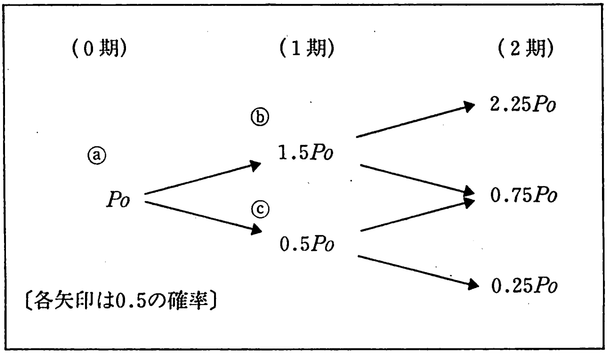

図7　装置先物価格の変動期待

断をするのに，投資の機会費用が重要であることを明らかにした。では投資実施の期限を2期とする時に，投資の機会費用の形状はどのように変化するであろうか。この場合に装置先物価格の変動率は，確率 $q=0.5$ をもって，上下へ毎期±0.5倍であると想定する（図7を参照)。また利子率 $r=0.1$ と置くので，当面の投資対象の現在価値 V_0 は，2期以降では装置先物価格 P_2 の水準が持続するとの想定の下に，次のようになる。

$$V_0 \equiv P_0 + E(P_1)(1.1)^{-1} + E(P_2)\sum_{t=2}^{\infty}(1.1)^{-t} \tag{44}$$

ここに $E(P_1)=0.5(1.5+0.5)P_0=P_0$ であり，また

$$E(P_2)=(0.5)^2(2.25+0.75\times 2+0.25)P_0=P_0$$

となるので，(44) 式の V_0 は $11P_0$ に等しい。

2期における投資対象の価値を V_2 と記すと，$\sum_{t=0}^{\infty}(1.1)^{-t}=11$ を考慮して，

(イ) $P_2=2.25P_0$ の時は $V_2=2.25P_0\times 11=24.75P_0$

(ロ) $P_2=0.75P_0$ の時は $V_2=0.75P_0\times 11=8.25P_0$

(ハ) $P_2=0.25P_0$ の時は $V_2=0.25P_0\times 11=2.75P_0$

と算定される。

さて投資の直接費用 I を800と固定して，1期において800コール・オプションの1単位の買いを，装置先物価格 P_1（$1.5P_0$ または $0.5P_0$）の m 単位の空

表10　ポートフォリオ（b-1）

$\frac{800}{24.75}<P_0\leqq\frac{800}{8.25}$		単位	価格	$P_2=2.25P_0$	$P_2=0.75P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_1	$F_2=24.75P_0-800$	$F_2=0$
売り	装　置　先　物	m	$1.5P_0$	$2.25mP_0$	$0.75mP_0$

表11　ポートフォリオ（b-2）

$\frac{800}{8.25}<P_0$		単位	価格	$P_2=2.25P_0$	$P_2=0.75P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_1	$F_2=24.75P_0-800$	$F_2=8.25P_0-800$
売り	装　置　先　物	m	$1.5P_0$	$2.25mP_0$	$0.75mP_0$

表12　ポートフォリオ　（c）

$\frac{800}{8.25}<P_0\leqq\frac{800}{2.75}$		単位	価格	$P_2=0.75P_0$	$P_2=0.25P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_1	$F_2=8.25P_0-800$	$F_2=0$
売り	装　置　先　物	m	$0.5P_0$	$0.75mP_0$	$0.25mP_0$

売りに組み合わせるポートフォリオを作り，その⑥点におけるものをポートフォリオ（b-1）および（b-2）として表10と表11に，また©点におけるポートフォリオを（c）として表12に，それぞれまとめる。これらの表における F_2 は当面の投資機会の２期での価値を示し，２期のオプション価格と解釈される。従ってそれは

$$F_2=\max(0,\ V_2-800) \tag{45}$$

によって決められる。

表10のポートフォリオ（b-1）は前節での表４のポートフォリオ（B-1）に類似しており，F_1 の算定は後者における C_1 と同様の手順で行われ，$V_0=11P_0$ も考慮して，

$$F_1=0.5(24.75P_0-800)/1.1=1.0227V_0-363.64\equiv F_{1a} \tag{46a}$$

と求められる。また表11は前節での表５に類似しており，前者での F_1 は後者での C_1 と同様の手順で次のように算定される。

$$F_1=[0.5(24.75+8.25)P_0-800]/1.1$$
$$=1.3636V_0-727.27\equiv F_{1b} \tag{46b}$$

さらに表12は前節での表6に対応して，前者の F_1 は後者の C_1 と同様に

$$F_1=0.5(8.25P_0-800)/1.1$$
$$=0.3409V_0-363.64\equiv F_{1c} \tag{46c}$$

と算定される。

つぎにⓐ点におけるポートフォリオを，P_0 の値に応じて，(a-1)，(a-2) および (a-3) の3組作成し，それぞれ表13，表14および表15にまとめると，これらは前節での表7，表8および表9に対応することが分かる。従って F_0 の算定は以前の C_0 と同様の手順によって行われ，それぞれ次のように求められる。

(イ)　$355.56<V_0\leqq 1066.67$　については

$$F_0=\max(0,\ V_0-800,\ 0.5F_{1a}/1.1)$$

表13　ポートフォリオ (a-1)

	$\frac{800}{24.75}<P_0\leqq\frac{800}{8.25}$	単位	価格	$P_1=1.5P_0$	$P_1=0.5P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_0	$F_1=F_{1a}$	$F_1=0$
売り	装　置　先　物	n	P_0	$1.5nP_0$	$0.5nP_0$

表14　ポートフォリオ (a-2)

	$\frac{800}{8.25}<P_0\leqq\frac{800}{5.5}$	単位	価格	$P_1=1.5P_0$	$P_1=0.5P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_0	$F_1=F_{1b}$	$F_1=0$
売り	装　置　先　物	n	P_0	$1.5nP_0$	$0.5nP_0$

表15　ポートフォリオ (a-3)

	$\frac{800}{5.5}<P_0\leqq\frac{800}{2.75}$	単位	価格	$P_1=1.5P_0$	$P_1=0.5P_0$
買い	800コール・オプション	1	F_0	$F_1=F_{1b}$	$F_1=F_{1c}$
売り	装　置　先　物	n	P_0	$1.5nP_0$	$0.5nP_0$

(ロ)　$1066.67 < V_0 \leqq 1600$　については

$F_0 = \max(0,\ V_0 - 800,\ 0.5F_{1b}/1.1)$

(ハ)　$1600 < V_0 \leqq 3200$　については

$F_0 = \max(0,\ V_0 - 800,\ 0.5(F_{1b} + F_{1c})/1.1)$

そして検討の結果，最終的には

(イ)　$355.56 < V_0 \leqq 1066.67$　について

$$F_0 = 0.5F_{1a}/1.1 = 0.4649V_0 - 165.29 \tag{47a}$$

(ロ)　$1066.67 < V_0 \leqq 1234.67$　について

$$F_0 = 0.6198V_0 - 330.58 \tag{47b}$$

(ハ)　$1234.67 < V_0 \leqq 3200$　について

$$F_0 = V_0 - 800 \tag{47c}$$

となる。なお 355.56以下の V_0 について $F_0 = 0$ である。

このようにして得られた F_0 を図に描いたものが，図 8 の実線で示されており，期限 1 の時の F_0 線を破線で重ねた。そこでは期限 2 の投資の機会費用 F_0 は違った形状を成し，V_0 が355.6〜1234.7（つまり P_0 が32.3〜112.2）の範囲にある場合は，投資を 2 期待つ方が，今直ちに投資するよりも利益が大きいと言

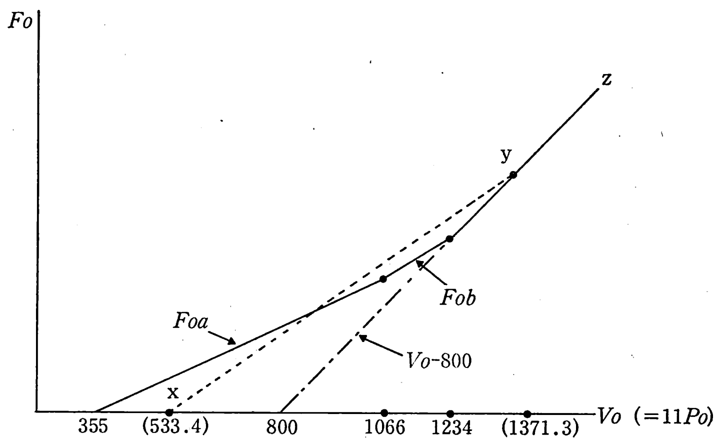

図 8　期限 2 の投資の機会費用（q=0.5）

える。

7.　価格上昇期待の確率と投資の機会費用

これまでの分析では計算の簡単化のため，装置先物価格の上昇の確率 q を0.5と置いたが，もし q が高くなれば投資の実施時期を遅らせることが一層有利になるかどうかについて，従来と同じ $I=800$，$r=0.1$ の数値例で検討しよう。

まず1期の期限付き投資の場合は，(28) と (29) の両式を考慮して，次の関係が得られる。

$$290.9+484.8q<V_0\leqq(960+727.3q-1454.5q^2)(1.2-q)^{-1} \tag{48}$$

の範囲内の V_0 について，

$$F_0=\frac{15q}{10q+6}V_0-727.27q \tag{49}$$

が成立し，(48) 式 左辺の値以下の V_0 については，$F_0=0$，(48) 式 右辺の値以上の V_0 については，$F_0=V_0-800$ が成立する。いま $q=0.6$ と置けば，(48) と (49) はそれぞれ

$$581.8<V_0\leqq1454.6 \tag{48'}$$

$$F_0=0.75V_0-436.4 \tag{49'}$$

となり，図2におけるｘｙ直線よりも (49′) 式の線は急勾配を成し，(48′) 式の左辺と右辺はｘ点とｙ点よりそれぞれ大きいことが分かる。かくして q の値が高くなれば，投資の機会費用は V_0 の中程以下では減少し，中程以上では増大するが，V_0 の大小両極端では不変にとどまると言える。

つぎに2期の期限付き投資の場合について検討するが，(44) 式を考慮すると，

$$\begin{aligned}V_0&=P_0+(q+0.5+10(q^2+q+0.25))(1.1)^{-1}P_0\\&=(9.0909q^2+10q+3.7273)P_0\end{aligned} \tag{50}$$

が得られる。いま (50) 式右辺の括弧内を Q と記せば，$q=0.5$ の時は $Q=11$ であり，$q=0.6$の時は $Q=13$ である。

さて前節における表10と同様のポートフォリオを組むには，24.75の代りに $2.25Q$ を，8.25の代りに $0.75Q$ を入れればよい。その改修を施したポートフォリオ（b-1）から F_1 を算定すると，$355.56<QP_0\leqq1066.67$ について

$$F_1=2.0455qQP_0-727.27q\equiv F_{1a} \tag{51a}$$

を得る。(b-2) と（c）のポートフォリオについても前述と同様の改修を加えて，F_1 を算定すると次の結果を得る。(b-2) においては，$1066.67<QP_0$ について

$$F_1=2.0455qQP_0+0.6818(1-q)QP_0-727.27\equiv F_{1b} \tag{51b}$$

また（c）においては，$1066.67<QP_0\leqq3200$ について

$$F_1=0.6818qQP_0-727.27q\equiv F_{1c} \tag{51c}$$

つぎに F_0 を前節と同様の方法で計算すると，

(イ)　$355.56<V_0\leqq1066.67$　について

$$F_0=\max(0,\ V_0-800,\ qF_{1a}/1.1) \tag{52a}$$

(ロ)　$1066.67<V_0\leqq1600$　について

$$F_0=\max(0,\ V_0-800,\ qF_{1b}/1.1) \tag{52b}$$

(ハ)　$1600<V_0\leqq3200$　について

$$F_0=\max(0,\ V_0-800,\ (qF_{1b}+(1-q)F_{1c})/1.1) \tag{52c}$$

が得られる。いま $q=0.6$ と置いて，(51a)―(51c) を考慮すると，(52a)―(52c)は下記の通りになる。

(イ)　$355.56<V_0\leqq1066.67$　について

$$F_0=0.6694V_0-238.0\equiv F_a$$

(ロ)　$1066.67<V_0\leqq1600$　について

$$F_0=0.8182V_0-396.7\equiv F_b$$

(ハ)　$1600<V_0\leqq3200$　について

$$F_0=0.967V_0-555.4\equiv F_c$$

F_a は355.56の V_0 についてゼロの値をとり，それ以上の V_0 について，F_a, F_b, F_c の各式の描く F_0 の経路は，図8の F_0 の経路よりも上方に位置する。

かくして $q=0.6$ の場合には，V_0 が355.56～3200（言いかえると，P_0 が27.35～246.15）の範囲内に在れば，当面の投資の実施を2期まで待つのが正しい戦略である。

引用文献

[1] Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7(1979), pp. 229-263.

[2] コックス，J./M. ルービンシュタイン(仁科一彦監訳)，『オプション・マーケット』，HBJ 出版局，1988年。

[3] McDonald, R. and D. Siegel, "The Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, 101(1986), pp. 707-727.

[4] 村田安雄，「企業設備投資の q 理論」，関西大学『経済論集』，39（1990），pp. 937-959.

[5] Pindyck, R., "Irreversibility, Uncertainty, and Investment," *NBER Working Paper*, No. 3307 (1990).

[6] 横山直樹，『金融オプション取引』，日本経済新聞社，1985年。