論　文

貨幣の効用と消費者余剰

――1つの試論――

堀　江　　　義

1. はじめに

言うまでもなく，消費者余剰に関する論文はおびただしい数に上る。そういう状況にあって，本論はこの分野の展望を試みることを目指すものでは全くなく，そのような目的のためには，たとえば Currie et al〔1〕あるいは鈴村〔11〕がすぐれた業績を残している。それにもかかわらず同様のテーマを掲げるには，主として次のような2つの理由による。

私見によれば，今日までの消費者余剰に関する諸論は，簡単に言えばヒックスの一連の業績によってもほぼその骨格は与えられている。「補償変分」と「等価変分」という概念がそれである。しかるに，ヒックスが求めなかった，もっと直接に消費者余剰の概念を表す指標が1つあるのではないか。本論は，その「もう1つの概念」を提示することが第1の目的である。

第2は，貨幣についての考え方に関連する。ヒックスにおいては，貨幣というのは，時に「合成財」であり，時に「価格を1としうる財」である。この仮定は，消費者余剰の適用範囲を著しく限定するものではないか。物価が変動する時，貨幣の購買力は変化する。このことは我々の日常生活の常識のようなものであるが，ヒックス流の消費者余剰はこのような状況に対しても適用可能なのか。こういう素朴な疑問がある。

本論の動機は，主に以上のようなものであるが，遺憾にして本論は第2の疑問には正面から取り上げていない。内容としては，まずヒックスのマーシャル

解釈について触れよう。次に「補償変分」の説明をする。その後に，我々の消費者余剰概念を提示する。我々のそれは，ヒックスとは概念において異なると同時に，計算方法においても一２次近似の仕方において一若干異なる。最後に我々の概念と既成の諸概念との関係について検討する。

2.　ヒックスの消費者余剰（HCS）

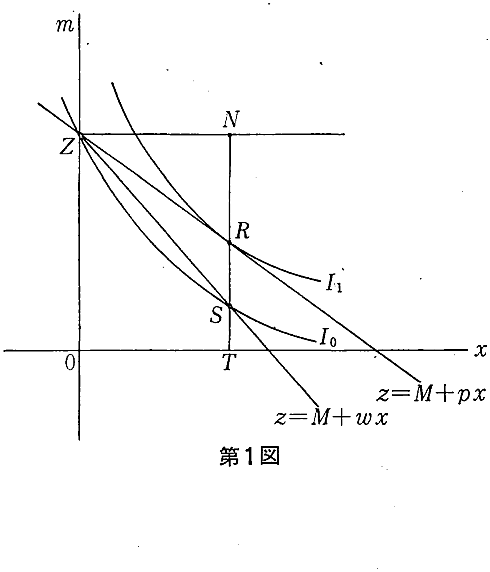
ヒックスは，よく知られているように，〔1〕(安井琢磨，熊谷尚夫訳「価値と資本」Ⅰ，岩波書店，1967年，p. 52）において，「完全に一般的な」即ち「貨幣の限界効用に関するいかなる仮定とも無関係」な消費者余剰を定義した。第１図における RS の長さがそれである。

第１図において，横軸にはある財 X の数量 x，縦軸には「貨幣量」m が測られている。I_0 および I_1 は無差別曲線であるが，ここでは，ある消費者が

(1)　$U=u(x, m)$

という形の効用関数を持っているものと考えられている。U は効用，u は関数である。ある期間において，この人の所得が z に与えられているとすれば，この人の予算制約式は

(2)　$z=M+px$



第1図

で表される。M は貨幣額，p は X 財の価格である。そして，図における直線 ZR が(2)式に対応する。

ここで M と m との区別について触れておこう。当初，ヒックスは X 財以外の「他の財」を一括して「貨幣」とした。従って，「他の財」にも価格があるはずで，それを q で表すなら，$M=qm$ である。しかるにヒックスは後に，〔8〕(p. 115) において，「その価格が1として取り扱われるような財」を貨幣としている。その限りでは，$q=1$ としてよいわけで，我々もこの節においては q を1としておこう。

さて，この消費者は初めに Z 点の状態にある。効用極大化行動の結果として彼(女)は R 点へ移動し，支払われる貨幣量は NR である。もし彼が X 財を無しで済ますなら彼は I_0 の効用水準に留まる。あるいはまた，X 財の $0T$ 量を購入するために NS 支払うならば，やはり I_0 の水準に留まる。従って，彼はX財を無しで済ますくらいなら（高々）NS の貨幣を支払って $0T$ の X 財を購入しても悪くはならない。このように，交換前に比べて交換後の状態が悪くはならないような貨幣の最大支払い量が，ヒックスの意味での「支払ってもよい価額」であり，それは NS で示される。

実際に支払われる価額は NR であったから，ヒックスの消費者余剰（HCS で表す）は，$NS-NR=RS$ となる。ところで，ヒックスの「支払ってもよい価格」を $w(x)$ で表すなら，$w(x)x=$「支払ってもよい価額」であるが，この $w(x)$ を用いれば HCS は代数的には次のように表せる。即ち，与えられた価格 p に対して

(3)　$HCS=(w(x)-p)x$

さて，Z 点と S 点とは同じ効用水準にあったから，$u(0,\ Z)=u(0T,\ TS)$，あるいは

(4)　$u(0,\ Z)=u(x,\ z-wx)$

を満たしていなければならない。上式を満たす w は，第1図の直線 ZS の傾きに対応する。他方，p についても効用極大化の結果として

(5)　$u_x(x, m)=pu_m(x, m)$

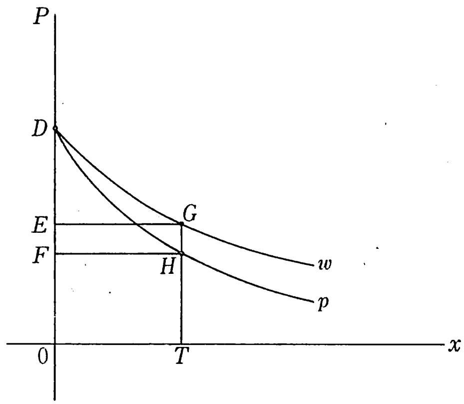
が成立している。ただし，$u_j=\partial u/\partial j$（$j=x, m$）である。上式を満たす点が第1図の R である。さらに，$p\cdot 0T+TR=z$, $w(0T)\cdot 0T+TS=z$ が成立するから，$RS=TR-TS=(w(0T)-p)\cdot 0T$ となっていることも確認できる。

第2図において HCS を（x, p）平面に表す方法を考えよう。図において曲線 p は通常の「マーシャルの需要曲線」であり，それは(5)式を満たしている。曲線 w は(4)式を満たしている。w が p の上方に位置することは第1図から明らかであろう。

ここで，一般に領域 r の面積を $A(r)$ で表すことにすれば，(3)によって，$HCS=A(EFGH)$ となることは明らかである。ついでながら，次節において述べるマーシャルの消費者余剰は同図の $A(DFH)$ であるから，一般にはこれと $A(EFGH)$ とは等しくはならない。

ここで注釈を2つ加える。第1に，ヒックスはマーシャルと同じように「支払ってもよい価格」という用語を用いているが，両者の意味は区別しておかねばならない。次に，「貨幣」を「その他の財」と見なした場合には「その他の財」の価格が問題となるが，この場合は

(6)　$HCS=[(w-p)/q]x$



第2図

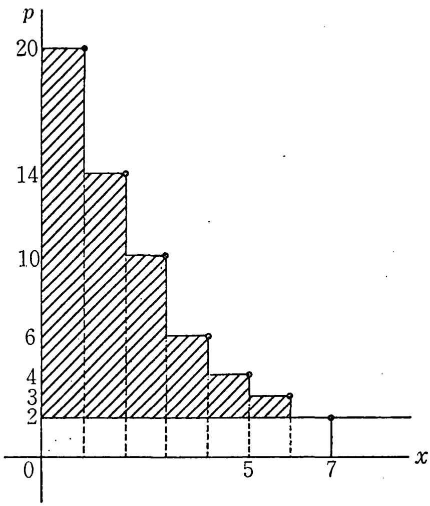
としなければならない。

3.　マーシャルの消費者余剰（*MCS*）

今日の時点から見れば，前節の *HCS* はヒックスにとってはあまり重要な意味を持たないかもしれない。と言うのは，ヒックスは改めて後に「補償変分」の概念を導入しているからである。しかし，たとえそうであるにしてもヒックスのマーシャル解釈の問題は残されている。それ故，この節ではマーシャルの消費者余剰（これを *MCS* で表す）について見ておこう。

MCS は前節の $A(DFH)$ であるが，結論としてはその通りであるとして，マーシャルはそれを説明するに当たり具体例から始めている。*MCS* を理解するには，やはりここから出発するのが便利であろう。

第3図はマーシャルの例そのものである。図における右下がりの点列が通常の需要「曲線」である。この点列は次のように読まれる。もし価格が20シリングなら，当該消費者は1ポンドの茶を購入する，価格が14シリングなら2ポンド，………といった具合に。これはまたマーシャルに従って次のようにも読め



第3図

る。彼（消費者）は，もし茶を1ポンド買うのであれば20シリングを支払ってもよい，と思っている。もし2ポンド買うのであれば追加の1ポンドには14シリング払ってもよい。3ポンド，4ポンド，………と購入を増加させる場合も同様にして「支払ってもよい価格」をグラフから読みとることができる。

今，現実の価格（実際に支払う価格）は2シリングである。すると彼は，もし1ポンドだけ茶を購入するならば，20シリング支払ってもよい財を2シリングで手に入れるわけだから，20－2＝18 シリング相当の余剰を得る。同様にして，購入量を増加させることにより，

(20－2)＋(14－2)＋………

のように余剰は増加し，結局7ポンドの購入により総余剰45を得る。これが MCS である。

以上の説明から要点をまとめよう。第1に，$MCS=45$ は第3図の斜線部面積である。このことから，需要曲線が連続関数の場合の MCS を次のように定義してよい。

(7)　$MCS=\int_0^a [f(x)-f(a)]dx$

ここに a は X 財（上の例では，茶）の購入量，そして

(8)　$p=f(x)$

は需要関数である（マーシャル〔9〕，p. 128，脚注を参照）。

第2に，上の面積を計算するに当たって，貨幣の限界効用一定，という仮定は用いられていないし，また必要でもない（マーシャル自身は仮定していたにしても）。もしここで，上の45シリングを何単位かの効用増分に対応せしめようとするならば，その場合には貨幣の限界効用について何らかの仮定が必要ではあるが。

第3に，マーシャルにおいて「支払ってもよい価格」というのは，すでに見たように，需要曲線上の各 x に対応する価格 $f(x)$ である。同じ用語をマーシャルは $\int_0^a f(x)dx$ の意味でも用いているが，両者を区別するために，ここでは後者を「支払ってもよい価額」と言い換えておく。そうすると，MCS は，支

払ってもよい価額と実際に支払う価額($af(a)$)との差として定義される（〔9〕, p. 124, 馬場啓之助訳「経済学原理」II，東洋経済新報社，1966年)。

ここまで来ればHCSとMCSとの違いははっきりしてくる。もし貨幣の限界効用を一定と仮定すれば両者は一致する。これはヒックスによって指摘されていることである。我々の注目するところはもっと別のところにある。前節におけるヒックスの消費者は，X財を$0T$単位購入するか，さもなければ全く購入しないか，の選択をせまられている状況にあるわけで，その意味でこれは“all or none”（ヘンダーソン〔2〕）の選択であった。しかるにマーシャルにおいては，消費者は望むならば1単位，あるいは2単位，………というように何単位の財を購入することも可能な状況が想定されている。このように両者の想定する状況が異なるということが，結果として，両者の「支払ってもよい価額」の違いをもたらしているわけである。この点で，ヒックスはマーシャルを忠実に解釈したとは言いがたい。

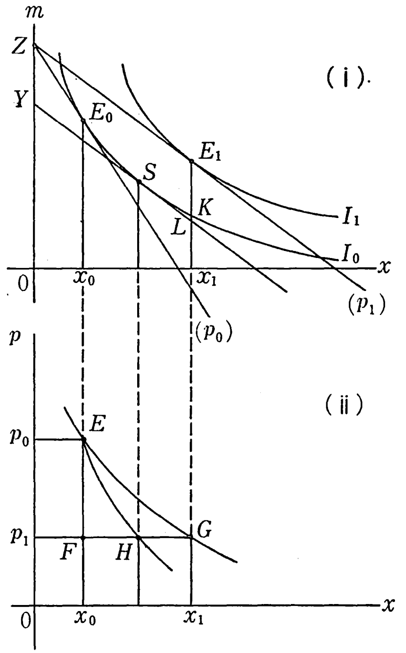
4. 所得の補償変分（HCV）

ヒックスのHCSについては第2節において述べられたが，彼は〔6〕において改めて消費者余剰を定義しなおしている。そこでは消費者余剰を表すものとして4つの指標が提示されているが，我々が直接に取り上げるのはそれらのうちの1つ，「補償変分」(Compensating Variation)である。以後，これをHCVと記す。

第4図(i)は第1図を基にして描かれている。ただし，今度は消費者の初期状態はE_0である。現在価格p_0において，この人は最適状態E_0にあり，効用水準はI_0である。

ここで価格が変化してp_1になったとしよう($p_1 < p_0$)。この人はE_1へ移動し，X財の需要はx_0からx_1へ変化する。同じことを(ii)図で言えば，E点からG点に移動する。曲線EGがマーシャルの需要曲線である。

次に，(i)図において直線ZE_1に平行かつI_0に接する直線を引く。これと



第4図

I_0 との接点を S，これと m 軸との交点を Y とする。また，この直線と E_1 を通る垂線との交点を L とする。この時，HCV は次式で与えられる。

(9)　$HCV = YZ = LE_1$

周知のように，E_0 から S への変化はスルツキー方程式の「代替効果」に対応し，S から E_1 への変化は「所得効果」に対応する。

初めに E_0 にあった消費者は，価格変化に反応して E_1 に移動した結果，効用水準において I_0 から I_1 へ上昇した。この場合，もし消費者が価格変化の後においても価格変化前と同じ効用水準に留まるように所得 (z) の調整がなされたとすれば，彼は S 点を選ぶだろう。従って，E_1 点と比較されるべきは基準点は，E_0 ではなく S である，とするのがヒックスの考えでる。

同じことは(ii)図によっても説明されうる。所得の補償変分を伴った場合の X 財需要は E から H を通る曲線によって示される。これがヒックスの需要曲

線である。そうすると HCV はまた次のようにも表しうる（[6] p. 34, Fig. 3）。

(10)　$HCV=A(p_0EHp_1)$

さて我々は，再び MCS との関係を問わねばならない。ヒックスによれば，p_0 から p_1 への価格変化による MCS の変化は，（i）図においては $\Delta MCS=KE_1$ である（[5] p. 127)。他方，(9)により $HCV=LE_1$ であるから，ここでは $HCV>\Delta MCS$ が成立する。次に(ii)図を見よう。価格変化による MCS の変化は，$\Delta MCS=A(p_0EGp_1)$ である。従って，同図からは $HCV<\Delta MCS$ が得られる。これは矛盾である。

マーシャル自身は（i）図のような無差別曲線を用いているわけではない。KE_1 を ΔMCS とするのはヒックスの解釈によるものであって，この点でもヒックスのマーシャル解釈には誤りがある，と言えよう。

5.　支払ってもよい価格

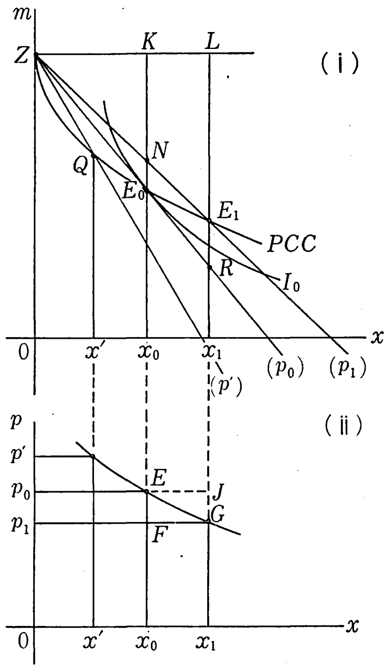
すでに述べたように，ヒックスの「支払ってもよい価格」はマーシャルの意味するところとは違ったものであった。そこで我々は，改めて (x, m) 平面にマーシャルの意味での「支払ってもよい価格」を表す方法を考えてみよう。

まず(2)および(5)より p を消去すれば

(11)　$u_x(x, m)=(z-m)u_m(x, m)/x$

がえられる。これが所謂「価格一消費曲線」であるが，第5図(i)の PCC がそれである。消費者は，価格が p_0 の時は E_0 点を，p_1 の時は E_1 を選ぶ。つまり第4図の場合と同じである。

今，価格は p_0 であるとしよう。その時，需要量は x_0 である。この場合，消費者が第 x_0 番目の1単位に支払ってもよいと考えている価格もまた p_0 である。すでに見たようにマーシャルの場合は，購入する財が何単位目のものかによって「支払ってもよい価格」は異なる。今の場合，もし第 $x'(<x_0)$ 番目の1単位に対応する「支払ってもよい価格」を求めるにはどうすればよいか。x' 点上に x 軸と垂直な直線を引き，PCC 曲線との交点を Q とする。Z より



第5図

Q を通る直線を引けば，その傾き p' が「支払ってもよい価格」である。

さて，ここまで来ると同じ図によって MCS を表現することもできる。価格が p_0 から p_1 に下落した時，MCS がどこに現れるかを考えよう。

価格変化前には x_0 の購入に $p_0x_0=E_0K$ 支払っていた。変化後，彼は同じ x_0 を購入するために $p_1x_0=KN$ を支払えばよい。つまり，この価格変化により $\Delta MCS=E_0K-NK=E_0N$ の消費者余剰が新に生じたことになる。これはまた（ii）図における $A(p_0EFp_1)$ に等しい。

あるいは次のようにも考えられる。価格 p_0 において最後の1単位に対する「支払ってもよい価格」は p_0 であった。もし彼が第 x_1 番目の1単位をこの同じ価格で購入してもよいと考えれば，支払ってもよい価額は $p_0x_1=RL$，しかるに実際に支払う価額は E_1L であるから，$\Delta MCS=RL-E_1L=RE_1$。これを（ii）と対応させれば，$\Delta MCS=A(p_0JGp_1)$ となる。

以上，２つの $\varDelta MCS$ の間には $A(EJGF)$ の差がある。しかし，この差はリーマン積分における上積分と下積分との差に当たるものであって，本来は問題とするに当たらない。もし問題にせざるをえないとするならば，それは価格変化が大きい場合であるが，その場合は区間〔p_1, p_0〕をさらに分割すればよい。ただし，ヒックスの場合の消費者は all or none の選択をしているから，このような分割は不可能である。かくて我々は，$\varDelta MCS$ の幾何学的表現としては E_0N あるいは RE_1 として何ら差し支えない。

以上，ヒックスのマーシャル解釈の問題とからめて消費者余剰の性格を論じてきた。次節以降においては，改めて，より詳しく消費者余剰の概念そのものの検討を行いたい。

6.　間接効用関数

我々がこれまでに行った分析の基本的枠組みは，(2)および(5)である。そこで後の考察の便宜上，それらを次式の形にまとめておこう。

(12)　$z=m+px$, $u_x(x,\ m)-\lambda p=0$, $u_m(x,\ m)-\lambda=0$.

上式においては相変わらず $q=1$ とされているので $M=m$ である。また λ はラグランジュ未定乗数を表す。このモデルは，z および p をパラメーターとして，λ, x, m を未知数として解く形になっているので，解を次のように表しておこう。

(13)　$\lambda=\lambda(p,\ z)$, $x=x(p,\ z)$, $m=m(p,\ z)$

次に，$\partial^2 u/\partial i\partial j=u_{ij}(i,\ j=x,\ m)$ として

$$[H]=\begin{pmatrix} 0 & u_x & u_m \\ u_x & u_{xx} & u_{xm} \\ u_m & u_{mx} & u_{mm} \end{pmatrix}$$

を作り，〔H〕の行列式を H で表す。以下においては，$H>0$ と仮定し，さらに次の記号を定める。

H_0 ：H における要素 0 の余因子

H_j ：同じく，要素 u_j の余因子

H_{ij}：同じく，要素 u_{ij} の余因子

そうすると⒀の全微分により

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda_z=-\lambda^2H_0/H, & \lambda_p=-\lambda^2(H_x-xH_0)/H, \\ x_z=\ \lambda H_x/H, & x_p=\ \lambda(H_{xx}-xH_x)/H, \\ m_z=\ \lambda H_m/H, & m_p=\ \lambda(H_{xm}-xH_m)/H \end{cases}$$

がえられる。ただし，$a_j=\partial a/\partial j(a=\lambda,\ x,\ m\ ;\ j=p,\ z)$ である。後の便宜上，ここで次の仮定を加える。

⒂　$u_{mm}\leqq 0,\ H_x\geqq 0.$

上式のうち第1の仮定は，貨幣の限界効用が逓増することはない，という意味であり，第2の不等式は，劣等財の排除を意味する。

ところで，⑴によって与えられた効用関数は，そこへ⒀を代入することにより

⒃　$U=u(x,\ m)=v(p,\ z)$

と書ける。v は関数記号であるが，「間接効用関数」と呼ばれる。

7.　効用の近似値

ここで表現の簡単化のために，$(x,m)'=r,\ (p,\ z)'=s$ とおけば，⒃は

⒃　$U=u(r)=v(s)$

としてよい。$r,\ s$ はそれぞれ列ベクトルである。

上式を任意の点 s_0, あるいはそれに対応する点 r_0 においてテイラー展開して2次の項までとれば，

⒄　$\Delta U=u_r'\Delta r+\dfrac{1}{2}\Delta r'[H_0]\ \Delta r=v_s'\Delta s+\dfrac{1}{2}\Delta s'[G_0]\Delta s$

がえられる。上式において，$u_r'=(u_x,\ u_m)$，$v_s=(v_p,\ v_z)$ であり，さらに $v_i=\partial v/\partial i,\ v_{ij}=\partial^2 v/\partial i\partial j\ (i,\ j=p,\ z)$ として

$$[H_0]=\begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xm} \\ u_{mx} & u_{mm} \end{bmatrix},\quad [G_0]=\begin{bmatrix} v_{pp} & v_{pz} \\ v_{zp} & v_{zz} \end{bmatrix}$$

である。ところで，r は s の関数であるから Δr もまた Δs の関数である。従って，やはり2次までの近似により Δx および Δm はそれぞれ次式で表される。

(18)
$$\begin{cases} \Delta x = x_s'\Delta s + \dfrac{1}{2}\Delta s'[J_x]\Delta s \\ \Delta m = m_s'\Delta s + \dfrac{1}{2}\Delta s'[J_m]\Delta s \end{cases}$$

ここでは $i=x,\ m$ として

(19) $$i_s' = (i_p,\ i_z),\quad [J_i] = \begin{bmatrix} i_{pp} & i_{pz} \\ i_{zp} & i_{zz} \end{bmatrix}$$

そして $i_{jk} = \partial^2 i/\partial j\partial k$ （$j,\ k=p,\ z$）である。

以上によって効用の変化を近似的に求めるための準備ができた。(17)の第1式に(18)を代入することにより

(20) $$\Delta U = u_r'(x_s',\ m_s')'\Delta s + \frac{1}{2}\Delta s'(u_x[J_x] + u_m[J_m] + [K])\Delta s$$

がえられる。上式においては Δs の3乗以上の項が無視されているから，上の ΔU は近似値である。ここにおいて $[K]$ は

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pz} \\ K_{zp} & K_{zz} \end{bmatrix}$$　ただし　$K_{pp} = r_p'[H_0]r_p,\ K_{pz} = r_p'[H_0]r_z,$

$K_{zz} = r_z'[H_0]r_z,$

そして $r_p' = (x_p,\ m_p)$，$r_z' = (x_z,\ m_z)$ である。(17)の第2式により，(20)の右辺は次の関係を満たさなければならない。

(21)
$$\begin{cases} v_p = u_x x_p + u_m m_p,\ v_z = u_x x_z + u_m m_z, \\ [G_0] = u_x[J_x] + u_m[J_m] + [K] \end{cases}$$

8. 無差別曲線

間接効用関数を用いて（$p,\ z$）平面に無差別曲線を描いてみよう。

$v(p,\ m) = \bar{U}$（定数）とおけば，$v_p dp + v_z dz = 0$ である。v_p および v_z を求めよう。(14)および(21)より

$$v_p = \lambda[(u_x H_{xx} + u_m H_{xm}) - x(u_x H_x + u_m H_m)]/H$$

であるが，行列式の性質により，右辺の第1の括弧内は0，第2の括弧内は H, 従って $v_p=-\lambda x$ を得る。v についても同様にして求められ，

(22)　$v_p=-\lambda x,\ v_z=\lambda$

が成立する。従って，$dz/dp=x>0$. さらにこの式を p で微分すれば，$d^2z/dp^2=x_p+x_z dz/dp=x_p+x\cdot x_z$。ここへ(14)を代入すれば

(23)　$d^2z/dp^2=x_p+x\cdot x_z=\lambda H_{xx}/H<0$

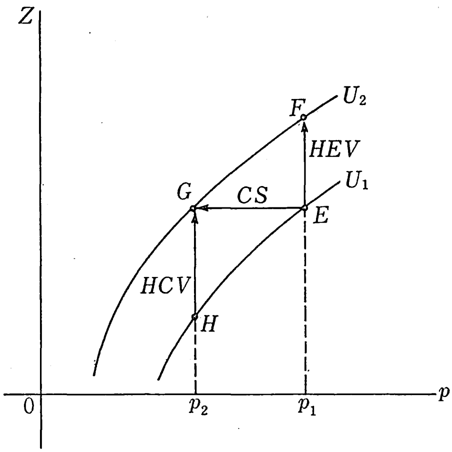
がえられる。$H_{xx}=-u_m{}^2<0$ によって，上の不等式が成立することも明らかである。かくして無差別曲線は，たとえば第6図の U_1, $U_2(U_1<U_2)$ のようになる。

9.　貨幣の限界効用

我々は貨幣の限界効用（これを MUM で表す）を $\partial u/\partial m=u_m$ によって定義しよう。この時，(12)によって $u_m=\lambda$ であることは明らかである。また，(21)および(22)により，$\partial u/\partial z=v_z=\lambda$ であるから，ここへ(14)を用いて

(24)　$v_{zz}=\lambda_z=-\lambda^2H_0/H\leq 0$

が成り立つ。後の第11節において，MUM が m の値の如何にかかわらず一定



第6図

となる場合について，それが消費者余剰の計算にどのような影響を与えるかを検討するが，あらかじめ記せば，MUM＝一定の時は，

$$H_0=H_x=0$$

が成立するので，(14)により $\lambda_p=\lambda_z=x_z=0$ である。

10. 消費者余剰

さてこの辺で消費者余剰の概念を，できるだけ一般的な形で定義しておこう。我々は，これをマーシャルの考え方に則して，価格変化によって生じた効用の変化を何らかの方法によって貨幣額で表示したもの，と定義する。ここから直ちに，どのような方法によって効用を貨幣額と対応させうるか，という問題に当面するが，この問題にすぐさま立ち入るよりは，まず価格の変化と効用の変化との関連を先に見ておく方が便利である。

価格変化にもとずく効用変化の大きさを，ここでは仮に「効用表示の消費者余剰」と呼び，UCS で表す。UCS は，$\Delta p\neq 0$ かつ $\Delta z=0$ とした時の ΔU の値で示される。即ち，(20)および(21)により

(25) $$UCS=v_p\Delta p+\frac{1}{2}v_{pp}(\Delta p)^2$$

によって与えられる。ただし，上式において

(26) $$v_{pp}=u_x x_{pp}+u_m m_{pp}+K_{pp}$$

である。ここでまた，計算の便宜上，次のような置き換えをしておこう。

(27) $$\begin{cases}\alpha=px_{pp}+qm_{pp},\ \beta=px_{pz}+qm_{pz},\ \gamma=px_{zz}+qm_{zz},\\ \lambda\delta=K_{pp},\ \text{ただし}\ q=1\end{cases}$$

この時，(12)，(22)，(26)，(27)によって(25)は次のように書き変えられる。

(28) $$UCS=\lambda\left[-x\Delta p+\frac{1}{2}(\alpha+\delta)(\Delta p)^2\right]$$

ここで α 及び δ について説明を加える。x_{pp} はマーシャルの需要曲線がどちら向きに凸となるかを示す指標であり，一般には $x_{pp}\neq 0$. m_{pp} についても同様である。従って，$\alpha\neq 0$ としてよい。次に δ については

(29) $$\delta=\lambda H_{xx}/H=x_p+x\cdot x_z<0$$

が成立することを示そう。(14)によって

$$r_p[H_0]=\lambda(u_{xx}H_{xx}+u_{xm}H_{xm},\ u_{xm}H_{xx}+u_{mm}H_{xm})/H$$
$$=\lambda(H-u_xH_x,\ -u_mH_x)/H$$

であるから

(30)　$K_{pp}=r_p[H_0]r_p=\lambda[(H-u_xH_x)x_p-u_mH_xm_p]/H=\lambda^2H_{xx}/H$

かくして，(23)および(27)により，(29)が導かれる。

さて(28)に戻ろう。そこでの右辺において〔　〕内の項を見れば，それは貨幣表示の値になっていることがわかる。この節の初めにおける我々の定義によれば，これを消費者余剰としてもおかしくはない。そこで次式によって消費者余剰 CS を定義する。

(31)　$CS=-x\Delta p+\frac{1}{2}(\alpha+\delta)(\Delta p)^2$

言うまでもなく，$UCS=\lambda CS$ である。従って λ は貨幣単位の CS を効用単位の UCS へ変換する場合のコンバーターの役割をはたしていることがわかる。その意味で消費者余剰と貨幣の限界効用とは密接不可分の関係にある。

次節以降において我々は，上の CS とマーシャル，あるいはヒックスの消費者余剰との関連はどうなっているかを検討するが，その前に α, β, γ および δ の関係について整理しよう。

まず，$v_z=\lambda$ より，$v_{pz}=\lambda_p=\lambda^2(xH_0-H_x)/H$. 他方，$v_{pz}=u_xx_{pz}+u_mm_{pz}+K_{pz}$ であるが，(14)により $K_{pz}=0$ が示されるから，$v_{pz}=\lambda(px_{pz}+m_{pz})=\lambda\beta$. 従って次式がえられる。

(32)　$v_{pz}=\lambda\beta=\lambda_p=\lambda^2(xH_0-H_x)/H$

今度は次式が成立することを示す。

(33)　$v_{zz}=\lambda\gamma=\lambda_z=-\lambda^2H_0/H$

$K_{zz}=0$ であることは(14)より示されるので，$v_{zz}=u_xx_{zz}+u_mm_{zz}=\lambda\gamma$. この式と(24)とにより，(33)が成立する。

次に v_{pp} について。(22)より $v_p=-\lambda x$ であったから，両辺を p で偏微分して，$v_{pp}=-(\lambda_px+\lambda x_p)$。ここへ(14)を用いれば，$v_{pp}=\lambda^2(2xH_x-x^2H_0-H_{xx})/\mathrm{H}$.

他方，$v_{pp}=\lambda(\alpha+\delta)$ はすでに示されたので，次式を得る。

(34) $v_{pp}=\lambda(\alpha+\delta)=-(\lambda_p x+\lambda x_p)$

$$=\lambda^2(2xH_x-x^2H_0-H_{xx})/H$$

さらに(14)より

(35) $\lambda_p+x\lambda_z+\lambda x_z=0$

が成立するので，この式へ(32)および(33)を代入して

(36) $\beta+\gamma x+x_z=0$

がえられる。また，(29)および(34)より，$\lambda(\alpha+2\delta)=x(\lambda x_z-\lambda_p)$ であるが，ここへ(35)を代入して，$\lambda(\alpha+2\delta)=-x(2\lambda_p+x\lambda_z)$。従って，(32)および(33)により，$\lambda(\alpha+2\delta)=-\lambda x(2\beta+\gamma x)$，故に

(37) $\alpha+2\delta+2\beta x+\gamma x^2=0$

11.　貨幣の限界効用一定

貨幣の限界効用が一定の場合に(31)式がどのように書き替えられるかを見ておくことは大変興味深い。なぜなら，そうすることによって他の消費者余剰との比較がし易いからである。

第9節において述べたように，この場合は $H_0=H_x=0$ であるから，(32)および(33)を用いて，$\beta=\gamma=0$ がえられる。これと(37)により，$\alpha+\delta=-\delta$. これを(31)に代入することにより次の結論がえられる。

貨幣の限界効用が一定の場合は次式が成立する。

(38) $CS=-x\Delta p-\frac{1}{2}\delta(\Delta p)^2$

実は，MUM が一定でない場合においても α, β, γ および δ の間にはもう1つ条件が必要である。(37)式は x に関する2次方程式と見なされるから，いわゆる判別式の条件を満たさねばならない。従って，

(39) $\beta^2\geq\gamma(\alpha+2\delta)$

さらに x は正の値でなければならないが，そのための条件は必要な個所において述べることとしよう。

12.　等価変分（HEV）

今度は $\Delta z\neq 0$, $\Delta p=0$ として効用の変化を求める。(17)より

(40)　$\Delta U=v_z\Delta z+\frac{1}{2}v_{zz}(\Delta z)^2$

あるいは(22)および(33)を用いて，

(41)　$\Delta U=\lambda(\Delta z+\frac{1}{2}r(\Delta z)^2)$

がえられる。ここでまた1つの消費者余剰の概念を構成することができる。

所得変化は価格変化と同様に効用を変化させる。Δp の価格変化が生じたとして，それがもたらす効用変化（UCS）とちょうど等しいだけの効用変化をもたらすような所得変化を消費者余剰と定義することである。これがヒックスの等価変分 Equivalent Variation であり，これを HEV と表す。

HEV は，(28)と(41)とによってえられる方程式

(42)　$r(\Delta z)^2-(\alpha+\delta)(\Delta p)^2+2\Delta z+2x\Delta p=0$

の解としての Δz である。上の式は，$\alpha+\delta>0$ ならば（Δp, Δz）平面上の楕円，$\alpha+<0$ ならば双曲線を表すが，いずれにせよ解は

(43)　$r\Delta z+1=\pm[r(\alpha+\delta)(\Delta p)^2-2rx\Delta p+1]^{1/2}$

によって与えられる。ただし，右辺の負の符号は採用されない（$\Delta p=0$ の時，$\Delta z=0$ を満たさない）。

上式をもう少し処理し易くするために，右辺をマクローリン展開して2次の項まで求めれば，

$1-rx(\Delta p)+\frac{r}{2}(\alpha+\delta-rx^2)(\Delta p)^2$

となるから，結局，(42)の根として

(44)　$HEV=-x\Delta p+\frac{1}{2}(\alpha+\delta-rx^2)(\Delta p)^2$

をうるが，ヒックス〔5〕との対応をつけるために右辺の（$\alpha+\delta-rx^2$）を書き換える。

$v_{pp}=\lambda(\alpha+\delta)$ に(34)を用いれば，$\alpha+\delta=2xx_z+rx^2-\delta$. 従って(29)により，$\alpha+\delta-rx^2=x\cdot x_z-x_p$ となり，(44)は

(45)　$HEV = -x\Delta p + \frac{1}{2}(x \cdot x_z - x_p)(\Delta p)^2$

としてもよい。これはヒックス〔5〕p. 132における記号で表せば，$\Delta_e M$ に当たる。

ここで第6図を用いて HEV と CS との関係を示そう。当初，価格 p_1 においては E 点が均衡点であるとする。価格が p_2 に下落した結果として均衡点は G に移動し，効用は U_2-U_1 だけ増加した。この増加の大きさが(25)における UCS である。そして，この UCS に対応する貨幣の増加量が CS である。これに対して，HEV は E から F への移動に対応する貨幣量を表す。つまり，ヒックスは E から G への移動に対応する貨幣量を求める代わりに，E から F への移動に対応する貨幣量をもって「消費者余剰」の1つの尺度と見なしたわけである。

$\gamma=0$ の時は，(42)あるいは(44)によって，HEV を計算することができるが，その結果は CS と等しくなる。即ち，貨幣の限界効用が一定の時は，CS と HEV は等しい。

13.　HCV 再論

$\Delta p \neq 0$ の時 $\Delta U=0$ を維持させるような Δz の値を求めるなら，このときの $(-\Delta z)$ がヒックスの HCV である。(17)において $\Delta U=0$ とおいて，

(46)　$v_{zz}(\Delta z)^2 + 2v_{pz}\Delta p\Delta z + v_{pp}(\Delta p)^2 + 2v_z\Delta z + 2v_p\Delta p = 0$

が成立する。そこで $v_{ij}(i,\ j=p,\ z)$，v_p および v_z に(22)，(32)，(33)および(34)を代入して整理すれば

(47)　$\gamma(\Delta z)^2 + 2\beta\Delta p\Delta z + (\alpha+\delta)(\Delta p)^2 + 2\Delta z - 2x\Delta p = 0$

この方程式は次のように定義された G の値がゼロでなければ，2次曲線を表す。

$$G = \begin{vmatrix} 0 & v_p & v_z \\ v_p & v_{pp} & v_{pz} \\ v_z & v_{zp} & v_{zz} \end{vmatrix} = -\lambda^3(\alpha+\delta+2\beta x+\gamma x^2) = \lambda^3\delta$$

$G \neq 0$ であることは(29)および(35)によって保障されている。$\gamma(\alpha+\delta)-\beta^2<0$ ならば双曲線であるが，(38)によりこの条件も満たされている。そこで(47)を解けば（$\gamma \neq 0$ として），

(48)　$\gamma \Delta z+\beta \Delta p+1=\pm\{(\beta-\gamma(\alpha+\delta))(\Delta p)+2(\beta+\gamma x)\Delta p+1\}^{1/2}$

である。今度も右辺の負の符号は捨てられる。右辺をさらにマクローリン展開によって2次近似すれば

$$1+(\beta+\gamma x)\Delta p-\frac{\gamma}{2}(\alpha+\delta+2\beta x+\gamma x^2)(\Delta p)^2$$

であるから，(48)より Δz が求められる。そこで $HCV=-\Delta z$ であるから，

(49)　$HCV=-x\Delta p-\frac{1}{2}\delta(\Delta p)^2$

がえられる。ただし，(35)により，$\delta=-\alpha-\delta-2\beta x-\gamma x_2$.

HCV を6図によって説明すれば，直線 HG の大きさによって示される。また，$\gamma=0$ の場合は，(47)より

$$HCV=-x\Delta p+\frac{1}{2}(\alpha+\delta+2\beta x)(\Delta p)^2$$

がえられるが，(35)により，$\alpha+\delta+2\beta x=-\delta$ が成立するから，この場合も(38)の CS は HCV に等しくなる。

14.　MCS 再論

最後に，CS と MCS との関係を調べよう。一般に，$\Phi(p)=\int x(p)dx$ であるときは，Φ を p で微分すれば $\Phi'=x$, もう一度 p で微分すれば $\Phi''=x_p$ である。従って，Φ をテイラー展開して2次の項まで求めれば

$$\Phi(p_0+\Delta p)-\Phi(p_0)=\Phi'(p_0)\Delta p+\frac{1}{2}\Phi''(p_0)(\Delta p)$$

$$=x\Delta p+\frac{1}{2}x_p(\Delta p)^2$$

が成立する。今，z を一定として上式の $x(p)$ を(13)の $x(p, z)$ と見なせば，マーシャルの消費者余剰（MCS）の変化は，上の式から

(50)　$\Delta MCS=-\int_{p_0}^{p_0+\Delta p}x(p, z)dp=-x\Delta p-\frac{1}{2}x_p(\Delta p)^2$

として与えられる。あるいはまた，(29)および(36)を用いて，$x_p=\delta+\beta x+\gamma x^2$ と

置き換えてもよい。

貨幣の限界効用が一定の場合は，$\beta=\gamma=0$ であったから，上の式から $x_p=\delta$ となる。従って，この場合も $CS=MCS$ が成立することが確かめられる。

ついでながら，ここで CS と MCS との差はどれだけになるかを計算しておこう。(35)，(36)によって，$\alpha+\delta=x\cdot x_z-\delta-\beta x$. ここへ(29)を代入すれば，$\alpha+\delta=-x_p-\beta x$. それゆえ

$$CS-\Delta MCS=-\frac{1}{2}\beta x(\Delta p)^2$$

15. おわりに

本論において我々は，新しい消費者余剰概念として(31)式を提示した。それは従来のマーシャルあるいはヒックスによる諸概念と異なるものであるが，もし貨幣の限界効用を一定と仮定するならば従来のものと一致する，ということも示された。

とは言え，マーシャルとヒックスとの間には，単なる量的な相違とは別の，消費者の当面している状況に相違があることも示された。

特に，ヒックスにおいては，効用の変化を求める際に2次近似の手法がとられているが，もしその手法に従うならば我々の式では(17)になるはずである。この点でもヒックスと我々との間には違いがある。

なお，計算の簡単化のため，我々の分析は価格の変化が1財においてのみ生じる場合に限定されている。

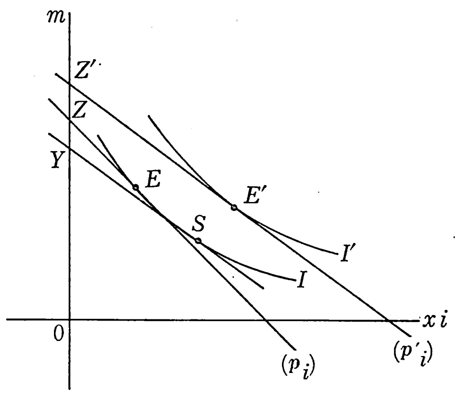
本論は，当初の目的から言えばまだ未完である。というのは，まだ貨幣の効用について充分な考察がなされていない。しかし，紙面の都合もあり，この面の検討は後日を期するとして，問題の一端を次に示すことによって本論を終わることとしよう。

今，p は p_i を要素とする n 次元行ベクトル，x は x_i を要素とする n 次元列ベクトルとしよう。そして q は，$q=\sum w_i p_i$, $\sum w_i=1$ を満たすものとしよう。即ち，今度は，m は「他の財（合成財）」ではなく貨幣であり，q は一般

物価水準を表す (Patinkin〔10〕)。この時，予算制約線：$z=qm+px$, が第7図の ZE 直線であるとする。第7図は基本的に第4図（i）と同じものである。ただし，縦軸は $m=M/q$, 横軸は x_i である。均衡点は E にあるとして，ここで第 i 財の価格が p_i から p_i' へ下落したとしよう。その結果，新たな均衡点は E' となったとしよう。この場合の消費者余剰は図の上でどこに現されるか。ここで注意すべきは，E' 点において無差別曲線 I' に接している直線は，m 軸上の Z 点を通らない，ということである。なぜならば，p_i の変化によって q もまた変化すると考えなければならないからである。

同図において，たとえばヒックスの HCV をこれまでと同じ方法で求めようとすれば，YZ であるはずである。これはまた S 点と E' 点との所得差でもあったはずであるが，今度はそうはならない。今の場合，S と E' との所得差は YZ' となっており，これは YZ とは等しくない。

我々は，「他の財」とは異なる貨幣を効用関数に組み込んだ場合の消費者余剰を改めて考えてみる必要があるのではなかろうか。



第7図

参 考 文 献

〔1〕 Currie, J. M., Murphy, J. A., and A. Schmitz, "The Concept of Economic Surplus and its use in Economic Analysis", *Economic Journal*, Vol. 81, No. 324, Dec., 1971.

〔2〕 Henderson, A., "Consumer's Surplus and the Compensating Variation", *Review of Economic Studies*, Vol. 8, 1940-41.

〔3〕 Hicks, J. R., *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford University Press, lst ed., 1939.

〔4〕 ———, "The Rehabilitation of Consumers' Surplus", *Review of Economic Studies*, Vol. 8, 1940-41.

〔5〕 ———, "Consumer's Surplus and Inex-Numbers", *Review of Economic Studies*, Vol. 9, 1941-42.

〔6〕 ———, "The Four Consumer's Surpluses", *Review of Economic Studies*, Vol. 11, 1943-44.

〔7〕 ———, "The Generalised Theory of Consumer's Surplus", *Review of Economic Studies*, Vol. 13, 1945-46.

〔8〕 ———, *Wealth and Welfare* (*Collected Essays on Economic Theory*, Vol. 1), Basil Blackwell, 1981.

〔9〕 Marshall, A., *Principles of Economics*, Macmillan, lst ed., 1890.

〔10〕 Patinkin, D., *Money, Interest, and Prices: An Integration of Monetary and Value Theory*, 2nd ed., Harper & Row, 1965.

〔11〕 鈴村興太郎「消費者余剰と厚生評価」『経済研究』 Voi. 36, No. 1, Jan., 1985.

〔12〕 Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton, 1978.

〔13〕 Willig, R. D., "Consumer's Surplus without Apology" *American Economic Review*, Vol. 66, No. 4, Sept., 1976.