いわゆる「推測統計学」における相関分析法について

岩井　浩

まえがき

相関（回帰）分析法(1)は，数理統計学の領域において，いわゆる「因果分析」の重要な手法とされてきたのみならず，今日では「計量経済学」的研究方法（モデル・アプローチ論）の主要な統計的手法として重用されている(2)。したがって，1962年に東独の「統計実務」誌上で展開された相関論争(3)にみられるごとく，この手法の方法論的意味の解明は，重要は課題の一つとなっている。

「近代経済学」の分野における相関分析法利用の一つの典型は，生産性と賃銀との相関関係の統計的検証にみられる(4)。わが国の独占資本の復活を背景として打ち出されたいわゆる「生産性向上運動」の理論的武器として，「生産性と賃銀の統計的検証」に相関分析法が利用されたのであった。すなわち，資本蓄積度（最大限利潤の追求）に規定される労働生産性——労働時間生産性—と，労働力商品の価値に規定され，賃銀闘争によって決定される賃銀—時間賃銀—との相関（それぞれ別の原因によって規定される事象間の相関）の計算結果（相関係数値が1に近い）から，生産性（原因）は賃銀（結果）を規定すると結論されている。そこでは，数量間の単なる形式的対応関係しか表示しない相関が，内在的因果関係にすりかえられ，近代的統計的分析手法による動かしがたき事実として宣伝されるのである。このように相関の物神崇拝は，近代経済学の諸理論の統計的検証にプラグ

マティックに利用されている。したがって，政治経済研究における相関分析法の方法論的意味（いかなる認識手段たりうるか）の解明は，単に統計解析論（統計利用論）の課題であるのみならず，政治経済学方法論の実践的な課題の一つになっていると思われる。

われわれは，この課題の解明のために相関分析法の生成，発展過程—19世紀末から20世紀初頭にかけての，自然科学，特に生物学（遺伝学）の領域におけるゴールトン（Francis Galton）からカール・ピアソン（Karl Pearson）に至たる相関理論の形成過程と，ユール（G.U. Yule）による経済研究への導入過程(5)，さらにチュプロフ（A. A. Tschuprow）による相関理論の確率論的再編成の過程を分析し，それらの基本的諸形態と方法論的諸仮定を抽象し，認識手段としての相関分析法の意味の一端を明らかにしてきた(6)。

その結果，一般的には（対象の諸性質によって異なるけれども）統計的相関関係は比較される数量間の平均的対応関係しか意味し得ず，したがって相関分析法は相互外在的にそれぞれ変化する二つ（あるいは多く）の量の間に統計数字にもとづく外的な比較（相関計算）によって外的な連関が一応存在するか否かを形式的に判断する手法にすぎないものであることが明らかにされた。そこでは，あらかじめそれらの量の担い手である質相互の内在的な本質的な連関が捨象されているばかりでなく，量（多標識）の一側面（単一の量的標識）だけが相互に外的に比較されるだけなのである(7)。したがってユールのいう「無意味な相関」(8)が，その基本的性格から必然的に現象せざるを得なかったのであった。しかるに，相関分析による因果性の認識という神話は，今日においても数理統計学者，計量経済学者の一部において根強く支持されているのである。(9)

したがって，われわれは，さらに経済研究における相関分析法利用の歴史的過程（特に生物学で発達した相関分析法の経済現象への導入過程において，いかなる新しい諸規定が加えられ，特殊的展開をとげたか）の分析とその具体的諸形態と内容の吟味批判（この手法によると現実のいかなる側面が，正しく，またゆがめて認識されるか，さらに実践上いかなる役割を果たしているのか解明）を行なわなければならない。

しかし本稿では今しばらく生物学の領域にとどまり，1900年代末から20年代にかけて，ピアソン流のいわゆる「記述統計学」に対抗して形成されたいわゆる「推測統計学」(10)における相関分析法の形成過程を分析し，その基本的諸形態と方法論的諸仮定を抽象し，その方法論的意味の一端を明らかにすることに問題を限定する。というのは相関理論が現在諸科学で広く利用されるにいたった重要な契機が推測統計学の手法であり，これがまた「計量経済学」における相関（回帰）分析法にみられるごとく，現代の相関理論利用の主要形態になっているからである。

それでは，推測統計学と相関理論との関連は何か？推測統計学は少なくともゴールトン以来ピアソン，チュプロフによって作りあげられた相関理論の諸基本概念と計算法には何もつけ加えなかった。推測統計学がつけ加えたのは，対象と資料との間に母集団と標本の関係を想定し，標本の相関係数，あるいは回帰係数を基にして母集団相関係数，回帰係数を確率的に推定する手法である。相関概念そのものにおける発展もしくは修正ではなく，標本の相関によって母集団の相関を推定するという手法そのものの成立が，相関分析法の

現代的利用の途をひらいたのである。

数理統計学の歴史上，K. ピアソンから R. A. フィッシャーに至る過程においては，いわゆる「フィッシャー革命」(11)といわれる一大変革があったというのが，現在の数理統計学者ならびに一部社会統計学者の見方である。われわれはこれに対して，果して「革命」ともよぶべきものがフィッシャーによってなされたといえるのか，フィッシャーの思想の萠芽はすでにピアソンにおいて見いだされるのではないか，フィッシャーにおけるいわゆる「推測統計学」の成立は標本の値から母集団の値を推定する手法が精密化したというにすぎないのではないか，この疑問をもっている(12)。フィッシャー革命の内容については，母集団—標本概念の明確化，推定値の効率概念，最尤法の導入，小標本理論の成立，実験計画法，分散分析法の成立等々が列挙されている。しかし，これらのうちで，K. ピアソンと比較して真に本質的という変化はどれであったのか，そもそもこれらの諸手法は統計学の理論体系の中でいかなる位置にあるのか——これに対して「フィッシャー革命」を唱える論者は答えてはいない。したがって，K. ピアソンからフィッシャーへ至る過程での変化自体の検討も課題として提起される。しかし，このためには，われわれは両者の膨大な理論の全面的検討を行なわなければならず，当面われわれのなし得るところではない。

本稿では，われわれは推測統計学的手法そのもののもつ意味の検討に重点をおく。K. ピアソンから R. A. フィッシャーに至る過程上の変化については，小標本理論の成立についてふれるにとどまる。

検討の順序は，まず推測統計学からK.ピアソンの相関理論をみるとき，どの点が不充分とされるかをみ，ついで K. ピアソンが批判され，推測統計学が成立する歴史的過程を概観し，かくして成立した推測統計学の相関理論を基本形態において叙述し，最後にこれがいかなる意味をもっているのかを批判的に吟味することである。

(1) 一般には，相関 (correlation) または，相関計算 (Correlation calucuation) と呼ばれているが，「計量経済学」的分析手法の生成とともに，特にエゼキエール (Ezekiel) の著書『相関分析法』(1930) 以来，相関分析法 (Method of Correlation analysis)，回帰分析法 (Method of Regression analysis) という呼称が支配的になっている。

(2) たとえば，G. Tintner; Econometrics. (邦訳『計量経済学』)，J. Johnston; Econometric Methods (邦訳『計量経済学の方法』) を参照せよ。特に，ジョンストンの著書は，相関分析法を中心に叙述されているところに特徴がある。

(3) H. Waschkaw; Ist der Begriff "Korrelation" in der sozialökonomischen Statistik notwendig? Statistische Praxis, 1. 1962, ss. 13—16. E. Förster und C. Otto; Liquidation der Korrelation?, Stat. Prax., 7. 1962, ss. 156—158.
この論争の要点は，客観的社会経済現象間の連関と交互関係の研究を課題とする社会経済統計において，統計的「相関」概念がいかなる意義をもつかということにある。論争の要旨は，拙稿「相関計算法の吟味と批判」(北大経済学，第6号，1964.11) 参照。

（4） 代表的事例として，篠原三代平『所得分配と賃銀構造』をあげることができる。氏は，その中で戦前，戦後の労働時間生産性と時間賃銀に関する統計数の相関計算から，生産性と賃銀の強い相互依存関係ないしは因果関係の存在を検証している。しかし，それは，山田耕之介氏や広田純氏によって早くから指摘されているごとく（『講座近代経済学批判』Ⅲ. p. 190），いわゆる「にせの相関」利用の典型的事例にすぎない。

（5） 1970年代から90年代にかけての相関計算法の形成過程の学説史的研究としては，拙稿「相関計算法の生成と発展」（北大経済学，第5号，1964. 1）参照。

（6） 相関計算法の本質的，基本的形態であるピアソン＝ユールの相関理論とチェプロフの相関理論の方法論的意味の検討は，拙稿「相関計算法の吟味と批判」（北大経済学，第6号，1964. 11）参照。

（7） 因果性と相関（統計的相関も含む）に関する哲学的カテゴリーの諸見解の学史的研究と唯物弁証法における因果性概念の研究としては，岩崎允胤，「相関と因果性」（唯物論，13号，1965. 5. 札幌唯研機関紙）（未だ序論部分しか公表されていない）がある。氏は，アリストテレス，ヘーゲル，レーニン等の因果性と相関性の概念を検討し，統計的相関概念の外的形式性—内在的本質的連関（質）の捨象の上に成り立つ相互外在的変数（量）間の単なる外的連関を示すもの—を明らかにしている。さらに，近代経済学における相関性，関数性，因果性の諸概念が，吟味，批判されている。

（8） G. U. Yule; "Why do we sometimes get Nonsense-Correlations between Time-Series?—A Study in Sampling and the Nature of Time-Series". J. R. S. S. Vol. 88. 1926. ユールにあっては，「無意味な相関」とは比較する変数間に直接的関係がないのに，両変数を規定する共通の原因によって，両変数が相関関係にあるようにみる相関を意味している。一般的には，共通の原因，またはそれぞれ別の原因に規定された変数間の相関を「無意味な相関」または「にせの相関」と呼んでいる。

（9） 相関（回帰）分析による因果性へのアプローチという考え方は，近代経済学における因果性概念の明確化の試みの中で，大きな位置を占めている。因果性に関する研究として次のような諸論文がある；H. Wold, 'Causality and Econometrics', Econometrica 1954. p. 162—p. 177.

Robert H. Stroz and H. O. A. Wold, 'A Triptych on Causal Systems', Econometrica, 1960, p. 417—p. 463.

Simon, Models of Man, New York. 1957.

Guy H. Orcutt, 'Toward Partial Redirection of Econometrics', The Review of Economics and Statistics, 1952. p. 195—p. 213.

'Actions, Consequences, and Causal Relations', The Review of Economics and Statistics, 1952. p. 305—13.

これら論文の総括的研究として，G. Garb, 'The Problem of Causality in Economics. KYKLOS. Vol. XVII. 1964. がある。

相関（回帰）分析による因果性の認識という考えは，特に Wold と H. A. Simon によ

って主張されている。Wold and Jureen, Demand Analysis, New York. 1953.（邦訳『需要分析』p. 39). Herbert A. Simon ; "Spurious Correlation: A Causal Interpretation,". J. A S. A. Vol. 49. 1954 参照。たとえば Simon は，ザイゼル（Hans Zeisel）の因果分析法（H. Zeisel, Say It with Figures. 1949. 邦訳『数字で語る』）に立脚し，あくまでも数学的（形式的）操作によって「にせの相関」を排除し，「真の相関」（因果性を反映した相関）も明らかにしようとしている。しかし，「にせの相関」は，既述のごとく統計的相関の基本的性格から必然的に現象するものであり，統計的相関が因果性を反映しているか否かは，数学的操作によってではなく，理論的分析によってのみ明らかにしうるものである。因果性，函数性，相関性に関しては，今野武雄『数学論』（三笠書店）p. 61—p. 62，岩崎氏の先の論文参照。なお，以上の近代経済学における因果性（相関性，函数性を含む）概念の研究については，別の機会に検討したい。

(10)　"Inductive statistics" を「推計学」と訳し，特別な意味を含ませているのは日本だけの習慣である。それによって，推測統計学があたかも実質諸科学の普遍的方法であるかのごとく解釈され，流布されている。

(11)　「フィッシャー革命」は，たとえば，W. J. Youden, "The Fisherian Revolution in Methods of Experimentation," J. A. S. A vol. 46. 1951 p. 47 において唱えられている。詳しくは，R. A. Fisher's Statistical Methods for Research Workers の出版25周年記念諸論文（J. A. S. A. vol. 46, 1951)（「R. A. フィッシャーと近代統計学」統計研究会訳）参照。

(12)　K. ピアソンの推定理論の紹介として，中川友長「統計的推定について―ケ・ピーアスンの業績に関連して」経商論纂 64. p. 24 があるが，単なる紹介にとどまり，ピアソンの推定理論とフィッシャーの推定理論の関係とそれらの相違点は明らかにされていない。

1.　「推測統計学」の立場からみたK. ピアソンの相関分析法

推測統計学の立場から K. ピアソンをふりかえるとき，K. ピアソンが大標本理論に依拠していたという点で不充分であったということが語られる。本節ではこの点をみる。

(1)　推測統計学の立場

推測統計学理論の基本的特徴は，母集団（population）と標本（sample）の概念を設定することである。R. A. フィッシャーはいう，「どんな簡単な場合でもまず与えられた数値（あるいはその集り）に対して，同じ条件のもとで得らるべき数値全体から成る仮想的な無限母集団を考える。そして手許の資料はその無限母集団からの任意標本であると解釈する」(1)「一つの性質または数個の性質に関してある頻度分布に従って分布する無限母集団を考えることは，すべての統計的研究の基礎となっている。たとえばある種族に属する個体や，一地方の気象に関する限られた経験から，標本の抽出された仮想的な無限母集団

の性質や，さらにわれわれの結論を適用すべき将来の標本に関してある概念を得ることができる」(2)「この母集団の分母はある種の方法で数学的に規定することができて，その数式の中には幾つかの（普通は少数の）パラメーター（常数）が入ってくる。しかし，実際にはわれわれはパラメーターの値を正確に知ることは出来ず，その値の推定値を知ることが出来るだけであって，それも，多少とも不正確なものとなる。これらの推定値は統計量とよばれてもちろん観測値から計算されるものである。」(1)

以上，多少長く引用したが，ここに推測統計学の基本的，一般的な考え方が示めされている。すなわち，われわれが手にする資料は母集団から確率的にとりだされた任意標本(random sample) であり，統計学の任務はこの標本をもとにして，母集団集団のパラメーターを推定することであるというのである。したがって問題は母集団パラメーターの推定技術であり，このために母集団から任意に抽出された諸標本が母集団の分布型および標本の大きさに従って，どのように分布するかを確定することが必要となってくる。この標本分布が確定されれば，推定は確率的に行なわれることとなるのである。推測統計学はこの考えに基づき標本の相関係数，回帰係数から母集団の相関係数，回帰係数の推定を行なっている。

それでは，この推測統計学の立場からみて，K. ピアソンの相関分析法は，どの点で不充分なものとされたのか

(2) K. ピアソンの推定理論

K. ピアソンの相関理論は，①二変数の正規相関曲線$=\dfrac{N}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}}$ $\left\{\dfrac{x^2}{\sigma_x{}^2}-\dfrac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y}+\dfrac{y^2}{\sigma_y{}^2}\right\}$ を前提し，②この正規相関曲面の方程式を最大にする r として，相関係数 $r=\dfrac{S(xy)}{n\sigma_x\sigma_y}$ を導き，③この r の値を測定する際に資料 n が大きいならば，測定の誤差は正規分布し，したがって確率誤差は $0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ である。しかもこの式において標本数が大きいならば真値 r の代りに資料から獲得される相関係数 r' を $r\fallingdotseq r'$ として用いてよい——というものであった。

K.ピアソンの推定理論を吟味する上で，特に注目すべきものは③である。獲得された資料にもとづいて r を測定しようとするとき，そこには常に誤差が生じ，この誤差の分布は資料の数が大きなときには，平均 r，標準偏差 $\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ の正規分布するというのである。

正規分布においては，標準偏差（われわれの場合 $\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$）と分布の全体の面積を100としたときの面積との間には次の関係があるとされている。（表—1）

このことは測定値のうちの50%が真値 r を中心としたプラス・マイナス $0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ にあること，すなわち $\pm0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ の誤差をもつということである。K. ピアソンは

（表―1）

$r\pm0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$	50.0(%)
$r\pm1\times\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$	68.3
$r\pm2\times\dfrac{1-r^2}{\sqrt{u}}$	95.4
$r\pm3\times\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$	99.7
$r\pm\infty\times\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$	100.0

この50%にあたる誤差をとくに確率誤差と名付けているのであるが，正規分布においては上述のように確率誤差は標準偏差の0.6745倍の値である。そして K. ピアソンは，この確率誤差の分布を研究したのであった(3)。

さて,今 K. ピアソンから一歩進んで1測定値―相関係数―(これを a としよう)によって,真値を推定するという問題を提出してみるなら,上述の確率誤差分布によって,推定の結論は「100 回中約50回程度において真値 r は区間〔$a+0.6745\dfrac{1-a^2}{\sqrt{n}}$, $a-0.06745\dfrac{1-a^2}{\sqrt{n}}$〕にある」ということがいえることになる。そしてさらに(1)でのべた推測統計学の母集団，標本の概念を導入するならば，r は母集団相関係数，上の確率誤差分布は標本相関係数の分布であるとみなすことができ，問題は大きさ n の任意標本からえられた標本相関係数 a によって，母集団相関係数 r を推定するということに置きかえることになる。一般に推測統計学が登場する以前のK.ピアソンには，母集団と標本，標本分布，しがたって標本によって母数（パラメーター）を推定するという考えが不明確であったとされている。そして，これが実は推測統計学と K. ピアソンの統計学（いわゆる「記述統計学」）を区別する重要な点であるとされているのである。しかし，われわれは上でみたように，相関係数の確率誤差分布の研究まで進んだK.ピアソンの考えの中に，後に推測統計学理論として大きくとりあげられるに至る「標本から母数を推定する」という問題への契機が含まれていることを知り得るのである。そこで推測統計学の概念を用いて K. ピアソンの推定理論を整理しなおすと次のようになる（以下，母（集団）相関係数を ρ，標本相関係数をrと使い分ける)。

① 母集団の分布は正規分布である(独断的に想定される)。母相関係数は ρ とされる。

② 標本相関係数（r）の分布は，標本の大きさ（n）が大であるとき正規分布する。

③ 確率誤差は，$0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$（ここで $\rho\fallingdotseq r$ とされている）

④ したがって，母相関係数 ρ は50%の確率で区間〔$r+0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$, $r-0.6745\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$〕に存在する。

(3)　K. ピアソンの推定論の不充分性

上においてわれわれは母集団，標本概念を導入することによって，ピアソンの推定論の到達点をみた。それではK.ピアソンの理論が批判されるべき点はどの点においてなのか？母集団，標本概念の不明確性もその一つの点であることはすでにふれたが，K. ピアソンの理論がいわゆる大標本理論であるという点が大きな批判論点となっているのである。

K. ピアソンにおいては，標本は大きいものとされ，標本分布は正規分布をなすものとされていた。しかし，標本が小さい場合はどうなるのであろうか？寺田一彦氏の具体例(4)を引用しつつ説明して行くと次のとうりになる。

今母相関係数 $\rho=0$（二つの回帰直線が直交している母集団）である母集団として次表を設定し，そこからの標本抽出を考えよう。

この $\rho=0$ の母集団から 8 組の標本を抽出し，それぞれの相関係数を計算すると以下のような表となる。

この結果をみると，母相関係数 $\rho=0$ の母集団から抽出された標本相関係数の値は，$r=0$ を中心に，プラス方向，マイナス方向に大きく散らばっていることがわかる。したがってこの小標本の例において，もはやピアソンの正規分布を前提とした相関係数の確率誤差の概念は妥当し得ないことが明らかである。

さらに今，8組の標本を母集団からとった時，標本相関係数 r がどんな分布をするかをみよう。$\rho=0$ および $\rho=0.8$ の母集団からの標本抽出について調べてみると，下の図のようになることが明らかにされている。

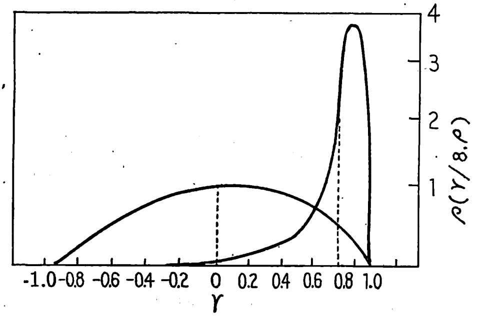
（表—2）

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	4	1	0	0
3	0	1	4	8	4	1	0
4	1	4	8	14	8	4	1
5	0	1	4	8	4	1	0
6	0	0	1	4	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0

（表—3）

	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
	2	3	5	3	4	4	3	3	4	5	4	4	2	4	4	3
	3	5	4	4	4	7	4	4	5	5	4	5	5	4	4	4
	4	7	5	5	5	2	3	4	3	5	4	5	3	3	2	4
	3	5	5	3	6	4	5	4	4	5	7	4	4	3	4	3
	6	4	4	5	4	6	4	3	4	4	4	4	4	5	4	3
	5	4	4	4	3	5	6	4	3	2	3	4	4	2	7	4
	4	3	3	4	4	6	5	4	3	4	5	4	4	4	6	4
r	+0.18		−0.27		−0.49		+0.48		+0.53		−0.23		+0.05		+0.72	

次に，標本の大きさの増大につれて，r の分布曲線 ρ のまわりにどの程度収斂した分布



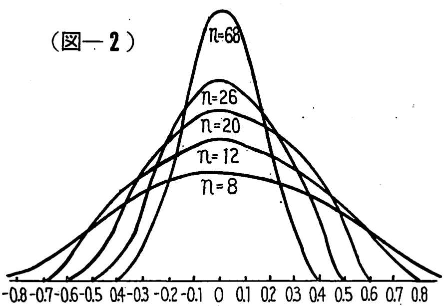
（図—1）

∘ $\rho=0$ の場合の r の分布曲線は，対称であるが，しかし正規曲線に比べて中央のふくれが大きい（ちらばりが大きい）

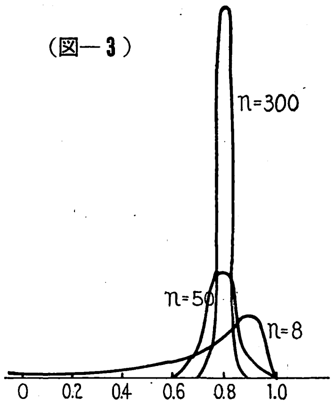
∘ $\rho=0.8$ の場合の r の分布曲線は，きわめて非対称である。0.8以上の r は，1.0までの，0.2だけの範囲にしか入らないが，0.8以下だと，-1.0 までの1.8の広い範囲に入る。しかも，r は0.8よりも，0.9の方が，しばしば起るのが特徴である。

を示すかをみると，次の図のようになることが明らかにされている。

（図—2）



（図—3）



n が大きい時には，r の標準偏差 σ_r は，

$$\sigma_r=\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}}\left\{1+\frac{11\rho^2}{4(n-1)}+\cdots\cdots\right\}$$

と計算されうることは，明らかにされているので，図から n が大きいと，r は ρ に近似するので，$\sigma_r \fallingdotseq \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ と考えることが出来る。この値に0.6745を掛けたものが，ピアソンの r の確率誤差（$0.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$）であった。すなわち，ピアソンは標本の大きさが大である場合を前提としているのであり，ここにピアソンの推定論が大標本理論といわれるゆえんがある。しかし(1) n が小さい場合には，この確率誤差の概念は利用できないことは明らかである。さらにまた(2) n が大きくとも，$|\rho|$ が1に近い場合，たとえば $|\rho|\geqq 0.75$ の場合にも，この確率誤差を使用できないことは，第3図から理解される。

以上，K. ピアソンの推定論は標本分布が正規分布であることを前提していたこと。し

かしこれは，標本数 n が充分大きな場合にのみ許される前提（すなわち大標本理論）であり，標本数 n が小さいとき，また n が相当大きい場合でも $|\rho|$ が，1 に近い場合には，標本分布は非正規分布をなすこと。したがって厳密な推定を行なうためには，これら非正規的な分布を確定しなければならなかったことをみてきた。

上の図で示めされたような標本相関係数の精密な分布は，1900年代末から1920年代にかけて“ステューデント”（“Student”，本名ゴセット，Gosset），R. A. フィッシャー(R.A. Fisher) 等によって t 分布，z 分布等として確定される。

次節では，その学説史的「発展」過程を考察する。

（1） R. A. Fisher; Statistical Methods for Research Workers. Eleventh Edition p. 6〜7.（邦訳『研究者の為の統計的方法』p. 5）

（2） R. A. Fisher; ibid（邦訳）. p. 34.

（3） 相関係数の確率誤差の最初の研究は，K. Pearson; “Regression, Heredity, Panmixa,” Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Vol. 187. 1896. の中で行なわれ，$0.674506\frac{1-r^2}{\sqrt{n(1+r^2)}}$ とされたが，今日の形式（$0.674506\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$）は，K. Pearson and L. N. G. Filon; “On the Probable Errors of Frequency Constants and on the Influence of Random Selection on Variation and Correlation,” Phil. trans. Roy. Soc. London, Series A. vol. 192. 1898 において定式化された。

（4） 寺田一彦『推測統計法』（改訂新版，1958）p. 132〜p. 137.

2.　「推測統計学」の相関分析法の生成と発展――学説史的考察

小標本理論ならびにその相関係数の精密分布の最初の研究は，まだピアソン流の大標本理論とその正規度数分布に基づく相関計算法の全盛期である1908年に，イギリスのビール会社の農業化学の技術者であった“ステューデント”（“Student”，本名ゴセット，Gosset）によって行なわれた。彼は発酵技術や，ビール原料としての大麦の品種比較について，実用上の必要から数理統計学の適用を試みたのである。発酵の研究においては，原料が変化しやすいこと，発酵過程が温度にきわめて敏感であり，また実験が小系列からなることなどの理由によって，多数の個体を扱う大標本理論の利用には限界があった。したがって小標本を正しく利用する方法の必要性に“ステューデント”は直面したのである。1908年の“ステューデント”の2論文(1)「平均の確率誤差」(1) と(2)「相関係数の確率誤差」(2)は，この研究の出発点となった。第1論文で発表された標本分布は，今日「ステューデント分布」または「t 分布」と呼ばれている重要な分布である。かれは正規母集団から確率的に抽出された大きさ n の標本（$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$）について，標本平均値を $\bar{x}$，標本標準偏差を s とするときの $z=\bar{x}/s$ の分布を見い出した。（この z の分布は今日の t 分布をさしている）。この $z=\bar{x}/s$ の分布曲線は $p(z)=\text{const}\times(1+z^2)^{-\frac{1}{2}n}$ と定式化され，

$n=4\sim10$ の場合の函数表が作成された。そして $n\geqq30$ となると，$z=\bar{x}/s$ は平均値 0，標準偏差 $\sqrt{n-3}$ の正規分布に近づくことも明らかにされた。この $z=\bar{x}/s$ は，後に R. A. フィッシャーによってより精密化され，今日の形態をとることとなった。

“ステューデント”は，第2論文において第1論文での研究を基礎に標本相関係数の分布をとりあげた。かれは正規相関曲面の方程式 $\frac{N}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_\lambda{}^2}-\frac{2\rho_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y{}^2}\right\}}$（$\rho$＝母相関係数）をもつ正規母集団から抽出した標本相関係数の分布が $\rho=0$ の場合に，$\text{const}\times(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$ となるだろうと経験的に推定した。

以上の1908年に“ステューデント”によって開拓された小標本理論の相関分析法は，主に R. A. フィッシャー（R. A. Fisher）によって，1910年代から20年代にかけて体系化される。フィッシャーは，まず1905年に論文「無限大母集団からの標本の相関係数値の度数分布」[3] において，上記の“ステューデント”の2論文，特に第2論文の相関係数の分布を詳細に研究し，仮説検定に必要な正確な確率分布を算定した。

かれは論文の初めで“ステュデント”の2つの論文の要旨を次のようにのべている。「“ステューデント”は，小標本の平均値によって，適切な推定値を得ることを望んで，そのような標準誤差は一般に，それが抽出される正規母集団の標準偏差とは等しくないという事実も考慮する必要があることをみい出した。」[4]「これらの2つの論文の第2では，相関係数の度数分布に関するより困難な問題が試みられた。大きさ2の標本に関して，2つだけの可能値 -1 と $+1$ の間の度数分布は，シェパード（sheppard）の定理によって，比率 $\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\rho:\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\rho$（$\rho$は母集団の相関）の中にあると決定された。この理論的結果に加えて“ステューデント”は経験的データにだけ訴える。これらのことから彼は $\rho=0$ の時の分布の試験式を引き出し，幾つかの価値ある提案をしている。」[5] フィッシャーは“ステューデント”の研究成果の上に立って正規母集団からの任意標本の相関係数の正確な分布を求めた。結果だけを示めすと，相関係数の分布は，

$$(i\,\mathrm{cosec}\,\theta)^{n-1}Qn-2(i\,\mathrm{cat}\,\theta)\cdot(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}dr$$

または簡便式

$$(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\frac{\partial^{n-2}}{\partial r^{n-2}}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)dr$$

と定式化されている。これは，先の“ステューデント”によって経験的に推定されていた相関係数の分布に理論的証明を与えたものである。

またフィッシャーは，従来のピアソン流の確率誤差による相関係数の最良値の推定法の欠陥を指摘し，従来の方法にかわって，「測定値が領域 dr に入る確率は ρ の変化に従って $(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}$ $(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\times\left(\frac{\partial}{\sin\sigma\partial\theta}\right)^{n-1}\frac{\theta^2}{2}dr$ に比例するので，われわれは，この数量が最大となる ρ の値を見い出さなければならない」[6] として第1の近似値として $r=\rho\left(1+\frac{1-r^2}{2n}\right)$ を提出している。この ρ の近似値は，ホテリング（Harold Hotelling）

によると「ρ の最大推定値」であり,「現在の検定および推定理論の発展における決定的ポイントであった」(7)とされている。

ここで示めされたフィッシャーの標本相関係数の分布は,2年後の1917年に,ソーパー(H. E. Soper),ヤング(A. W. Young),ケーブ(B. M. Cave),アリス・リー(A. hee),ピアソン(K. Pearson)の共同研究論文「小標本の相関係数の分布について」(8)の中で詳細に研究された。ホテリングはこれを次のように評価している。「彼等は観測された解剖学上の相関データを利用し,それに度数分布の大雑把なあてはめを行なって,これを ρ の推定値とその確率極限の計算に際してフィッシャー函数と結びつくべき先験的分布として用いた。彼らはフィッシャーの統計量分を,ρ について仮定された一様な先験的確率密度を基礎とする並み推定値(modal estimate)として記述した。これはフィッシャーによって,厳しく拒否されたのである」。(9)フィッシャーは,1921年の論文「小標本から抽出された相関係数の確率誤差について」(10)の中で,これらの共同研究の結論を批判し,単なる仮定的な先験的確率に依拠するのでなく,あくまでも観測を基とする検定と推定でなければならないとした。

ピアソン流の正規分布に基づく近似的推定法にかわって小標本の場合にも使用可能な推測統計学の推定法は,先の"ステュデント"分布(t 分布)と並んで重要な分布である z 分布に基づくものである。この z 分布は,ピアソンの χ^2 分布,"ステューデント"の t 分布を検討したフィッシャーの1924年(11)の論文において発見された。かれは同時にこの論文で分散分析法を提起している。

数量は z,方程式 $z=\frac{1}{2}\log(S_1{}^2/S_2{}^2)$ によって定義される。ここで $S_1{}^2$ と $S_2{}^2$ は分散 σ^2 をもった正規母集団からの抽出された2組の独立した標本の分散である。この z の分布から種々の特殊的分布が導かれるのであって,次のようになる。

1)n_1=(第1の標本の大きさ)$=n_1$, n_2(第2の標本の大きさ)$=\infty$のとき,$z=\frac{1}{2}\log(x^2/n)$ を代置すると,χ^2 分布をなす。

2)$n_1=1$, $n_2=n$ のとき,$z=\log t$ とおくと,"ステューデント"の t 分布をなす。

3)$n_1=1$, $n_2=\infty$ のとき,$z=\log x$ とおくならば,正規分布をなす。

4)$n_1=n-1$, $n_2=n$ であり,r を大きさ,n_r 標本から計算された級内相関係数とするとき,$z=\tanh^{-1}r=\frac{1}{2}\log[1+r/1-r]$ は r の分布をなす。

フィッシャーは,この z 分布について次のようにいっている。「特殊な場合の z のより一般的分布は,非常にしばしば現われる。私は,第1に相関係数の誤差函数の研究において,それを見い出した。相関が仮にN組の兄弟(N pairs of brothers)の間に対称的表の形式によって得られるならば,われわれは,いわゆる級内相関を得る。r がそのような相関であるならば,

$$r=\tanh z,\ n_1=N-1,\ n_2=N \text{ とすると}$$

この変換は,N が標本の数である時,z の分布による r の任意標本の分布をあらわす。(12)」

この $r=\tanh z$ は z 変換と呼ばれ，$z=\tanh^{-1}r=\frac{1}{2}\log e\frac{1+r}{1-r}$ と定式化されている。この z 変換によって，標本相関係数の分布は，母相関係数 ρ に対応する $z_\rho(=\tanh^{-1}\rho)$ を平均値にもち，標準偏差 $\sigma_\rho=\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ とするほぼ正規型で分布することが明らかにされ，この z 分布の正規性を利用して，相関係数の有意性検定が行なわれるようになった。なおこの論文では同時に相内比，重相関係数の分布がとりあげられている。

フィッシャーのこれらの t 分布，z 分布による相関係数の有意性検定，相関比，重相関係数の有意性検定の方法は，1925年の有名な『研究者のための統計的方法』(13) の中で，明確に定式化され，さらに，1928年の論文「重相関係数の一般的標本分布」(14)において一応完成されている。

一方，回帰方程式の適合度の測定と回帰係数の有意性検定は，1922年の論文「回帰公式の適合度と回帰係数の分布」(15)において扱われた。

かれは，ピアソンとスルツスキー（Slutsky）の χ^2 による回帰公式の適合度の検定，ピアソンの相関比による適合度の検定の不正確性を明らかにし，自由度を考慮した正確な χ^2 の分布を与えた。しかし，この論文の重要な成果は，回帰係数の有意性検定のための t 分布（当時は z 分布と呼ばれた）を明らかにしたことである。

かれは一次の回帰方程式

$$Y=a+b(x-\bar{x}) \quad \begin{cases} a=\bar{y} \\ b=\dfrac{s\{y(x-\bar{x})\}}{s(x-\bar{x})^2} \end{cases}$$

について，a に関する t 分布として

$$z=\frac{(a-\alpha)\sqrt{N}}{\sqrt{s(y-Y)^2}} \quad \begin{pmatrix} \alpha=\text{母集団係数} \\ a=\text{標本係数} \end{pmatrix}$$

b に関する t 分布として

$$z=\frac{(b-\beta)\sqrt{s(x-\bar{x})^2}}{\sqrt{s(y-Y)}} \quad \begin{pmatrix} \beta=\text{母集団回帰係数} \\ b=\text{標本回帰係数} \end{pmatrix}$$

となることを明らかにした。この二つの分布によって回帰係数の比較，有意性検定が行なわれるようになった。この回帰係数の有意性検定の方法は，『研究者のための統計的方法』において，一層明確に整理されている。

以上のように，1908年に“ステューデント”によって提起された小標本の場合に有効は相関係数の推定の研究は，1915年から1920年代後半にかけて，フィッシャーによって，相関係数，回帰係数の有意性検定，推定法として体系化されたのである。（今日的完成形態は，さらに1930年代に E. S. ピアソン，ネイマン（J. Neyman）等によって補充，確立されたものである。）

(1) 'Student'; "The probable error of a mean," Biometrika. 6. 1908.
(2) 'Student,' "On the probable error of a correlation coefficient." Biometrika. 6. 1908.

(3) R. A. Fisher ; "The frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indifinitely large population," Biometrika, 10. 1915.
(4) R. A. Fisher ; ibid : p. 507.
(5) R. A. Fisher ; ibid : p. 508.
(6) R. A. Fisher ; ibid : p. 520.
(7) Harold Hotteling ; "The Impact of R. A. Fisher on Statistics." J.A.S.A. Vol. 46. 1951. (邦訳「R. A. フィッシャーと近代統計学」統計研究会訳, p. 28)
(8) H. E. Soper, A. W. Young, B. M. Cave, A. Lee, and K. Pearson ; "On the distribution of the correlation coefficient in small samples." Biometrika. 11. 1917.
(9) H. Hotteling ; 前掲論文, 邦訳 p. 28.
(10) R. A. Fisher ; "On the probable error of a coefficient of correlation deduced from a small sample," Metron. 1, 1921.
(11) R. A. Fisher ; On a distribution yielding the error functions of several well known statistics." Proceedings of the International Mathematical Congress, 1924.
(12) R. A. Fisher ; ibid, p. 809.
(13) R. A. Fisher ; Statistical Methods for Research workers. First Edition, 1925.
(14) R. A. Fisher ; "The general sampling distribution of the Multiple correlation coefficient." Proceedings of the Royal Society, Series A. vol. 121, 1928.
(15) R. A. Fisher ; "The Goodness of Fit of Regression Formulæ, and the Distribution of Regression Coefficients." J. R. S. S. vol. 85, 1922.
(16) 学説史的考察には, 以上の論文の外, 次の諸論文を参照した。
1. H. L. Rietz ; "Comments on Applications of Recently Developed Theory of Small Samples," J. A. S. A. Vol. 26, 1931.
2. P. R. Rieder ; "A Note on Small Sample Theory," J.AS.A. Vol. 26, 1931.
3. H. Hotteling ; "Recent Improvements in Statistical Influence," J.A.S.A. Vol. 26, 1931.
4. R. A. Fisher's Statistical Methods for Research Workers の25周年記念諸論文 (J.A.S.A. Vol. 46, 1951)

3. 「推測統計学」の推定理論と相関

推測統計学における相関理論とは, 相関概念そのものには変更を加えることなく, 任意標本を基にして母集団の相関係数, 回帰係数, その他のパラメーターを推論する理論である。そしてこの推測の手法が, K.ピアソン以後, "ステューデント" を経てフィッシャーに至って体系化されたことは上にみてきたとうりである。この推定理論を基礎にして手法を一層手のこんだものとし, これを生物学から, 医学, 工学, 社会科学等へと形式主義的に応用, 拡大せんとするのが, 統計学においてはもちろん諸実質科学にも根強くみられる

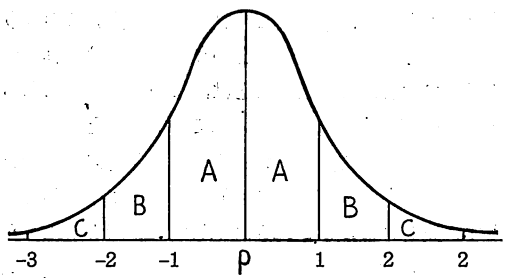
現在の傾向なのである。これは，大橋隆憲氏や岩崎允胤氏が，再三にわたって指摘されているように(1)，プラグマティズムを哲学的基礎とした現代科学の数学主義，確率論主義の主要な形態に外ならないのである。相関概念の諸科学での利用も，この現代哲学を背景として，もっぱら推定理論との結びつきにおいてであるといえる。この手法の歴史的発展を追ったわれわれは，ここで一応完成形態にある現在の推測統計学での相関概念を用いて，推定理論の基本形態と基本概念を明らかにしておこうと思う。

われわれがここで主要なものとしてとりあげるのは，相関と回帰のおのおのについての検定と推定の手法である。個別的解明に入る前に，すでに簡単に触れたのではあるが，推定理論の構造について若干予備的説明を行なっておく。

(1)　推定理論が常に母集団と標本の関係を前提することは再三指摘してきたとおりである。われわれは，またK.ピアソンが不充分だと批判され，その後の「発展」といわれていることも，実は母集団から確率的に抽出された標本の特性値（平均値，相関係数，回帰係数等々）の分布を正確に把握することをめぐってであることをみた。それでは，確率的に抽出された諸標本分布は，検定，推定理論でいかなる意味をもつのか？相関係数 ρ の母集団からの任意標本相関係数 r を例にとろう。この r の分布が確定されるということは，既知の母集団からのなん回もの標本抽出を想定する時，その諸標本の値がどのように分布しているかが定められることであり，これによって特定の誤差をもつ標本が全標本のうちの何%であるかがわかるということである。

今，標本の大きさ n が充分大なるものとするとき，標本相関係数 r の分布は母相関係数 ρ を平均にもつ正規である。

（図—4）〔諸標本相関係数の分布〕



上図からわかるように，ごく概略的にいうならば，r の分布が正規であるということは，母相関係数 ρ から遠くへだたった標本相関係数は，へだたればへだたるほど，まれにしか獲得されず，他方，ρ に近ければ近いほど，頻繁に獲得されるということである。しかし，標本相関係数の分布が正規分布であることが確定されることによって，標本相関係数の分布の標準偏差と全体の面積との関係は，数量的に明らかなので，稀れにしかおこらないとか，しばしばおこるという表現が数量的に評価されることになるのである。

すなわち表—4によって，標本相関係数の約68パーセントが母相関係数 ρ の $\pm 1 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$

内に，96パーセント　$\pm 2 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内に，99.7パーセントが$\pm 3 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内にあるということがいえるのである。これが標本分布が確定されるということの意味である。

さて，標本分布は既知母集団から抽出される標本全体が示す分布であった。しかし，母集団についてなんらかの推論を行なおうとするとき，われわれが手にしているのは一組の標本だけである。この一組だけの標本によって母数を推定する際に媒介手段となるのが，先の標本分布なのである。母数の推論には，仮説検定と推定の二形態がある。そのおのおのについていかに推論が行なわれるかをみよう。

（表一４）

$t=\frac{\rho-r}{\sigma_r}$	$\rho+t\sigma_r$ と $\rho-t\sigma_r$ との間の面積
0	0
0.50	0.3829
0.6745	0.5
1	（図のＡの部分）0.6827
2	（図のＡ＋Ｂの部分）0.9645
3	（図のＡ＋Ｂ＋Ｃの部分）0.9973

<仮説検定>ここでは母集団相関係数値 ρ は，たとえば 0.7である等の仮説がおかれて，この仮説がわれわれの手にしている一組の標本の相関係数によって検定される。すなわち，相関係数 0.7の母集団から標本をとりだしたとき標本がどのように分布するかが理論的に与えられる。この理論分布に照らして，われわれが今手にしている標本相関係数は頻繁に獲得される値なのか，稀にしか獲得されない値なのかが問題とされる。もし稀な場合にあたるなら，稀にしか生起しないことが起るということは，なにか意味がある（有意である）と考えて，母集団の仮説 $\rho=0.7$ が誤っていたのであろうと判定され，仮説は棄てられるのである。このようにして，また別の仮説 $\rho=0.5$…… 等が設定され，判定されるという手続が続けられるのである。

しかし，ここで注意しなければならないことは，この検定方式にあっては，仮説の棄却から次の仮説設定への移行が方法論的に与えられていないことである。すなわち，これによっては，仮説が客観的事実として生起したか否かを一義的に判定できないのである。したがって仮説が，事実として危険率（稀な場合）の範囲内に生起したのか，範囲外に生起したかを判定し得えず，正しい仮説が棄却されてしまう誤謬を常に伴うのである。

<推定>相関係数 ρの母集団からの標本相関係数は，先の説明によって，

$\rho \pm 1 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内に68パーセント，$\rho \pm 2 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内に96パーセント，等々の割合で分布していることが理論的に与えられている。そこで，推定においては獲得された一標本を中心に考えて，母相関係数は $r \pm 1 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内に68パーセントの確率で存在し，$r \pm 2 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$内に98パーセントの確率で存在するという判断が行なわれるのである。これは区間によって母数を推定するので区間推定法とよばれる。しかし，ここにおいても注意しなければならないことは，現実に手許にある資料の相関係数が客観的に96パーセントの範囲内に存在す

るのか，範囲外に存在するのかは判断できないということである。そこでは，主観的に確率付判断がなされるだけである。

以上が，統計的推論の二つの主要形態である。K.ピアソンから“ステューデント”を経てフィッシャーによって完成されたといわれる統計的推論の研究が標本分布の研究に向けられたのは，標本分布が母集団と標本を結ぶ媒介であったからにほかならないことがわかるであろう。

以上われわれは，統計的推論の主要形態についてその根本的な考え方を説明した。以下においてわれわれは，相関係数，回帰係数の検定と推定のおのおのについてその手法の一般的形態を簡単に示しておく(2)。

(2) 相関係数の有意性検定，推定法

（i） 相関係数の有意性検定法

相関係数の有意性検定は，母相関係数 ρ について，$\rho=0$ の場合と，$\rho\neq 0$ の場合について別々に行なわれる。

① $\rho=0$ の場合

1. 今母集団仮説として，$\rho=0$ を設定する。
2. $\rho=0$ の母集団から抽出された相関係数の標本分布は，

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \cdots\cdots\cdots(1)$$

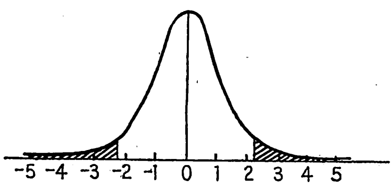
となることが知られている。今，

$$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \cdots\cdots\cdots(2)$$

とおくと，(1)式は自由度 $n-2$ とした t 分布の式に等しいことがわかる。（図—5）

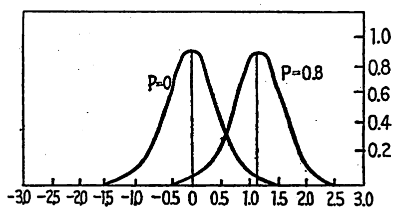
3. したがって自由度 $n-2$ として t 表を利用して，相関係数の仮説検定（有意性検定）を行なえばよい。

（図—5）



t分布（n=10）

（図—6）



① $\rho\neq 0$ の場合

この場合は，先の第3図から明らかなように，r の標本分布は対称でないので，上の論法を直ちに使用できない。そこで，R. A. フィッシャーの z 変換を利用すると，

$$z=\frac{1}{2}\log.\frac{1+r}{1-r}=1.15129\ \log_{10}\frac{1+r}{1-r}\cdots\cdots(1)$$

相関係数の標本分布は，正規分布に近似した z 分布を形成する。 z 変換によって，第3図は，第6図のようになる。

この z 分布は，母相関係数 ρの値いかんにかかわらず，zの分布は，ρ に対応する z，すなわち $z_\rho\left(z_\rho=\frac{1}{2}\log e\frac{1+\rho}{1-\rho}=1.15129\ \log_{10}\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$ を平均値にもち， 標準偏差 $\sigma_\rho=\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ とする正規分布に非常に近似した分布型となる。(r と z の関係は z 変換表を利用する)。

この場合 $\rho=0$ の場合の t 分布に相当する分布は，次の分布を利用する；

$$t=\frac{z-z_\rho}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}=(z-z_\rho)\sqrt{n-3}\cdots\cdots(2)$$

ただし，$z_\rho=z$ の平均値，$\frac{1}{\sqrt{n-3}}\fallingdotseq z$ の標準偏差。この分布は，近似的に平均値0，標準偏差1の正規分布である。したがって，この正規分布の性質を利用して，r の有意性検定を行なえばよい。

(ii)　相関係数の区間推定

z 変換した t の式(2)が，近似的に正規分布することを利用して， r の値より母相関係数 ρ の信頼区間を推定しうる。

今，信頼係数 $1-\alpha$とすると，z_ρ の入るべき範囲は，

$$z_{\alpha/2}>\sqrt{n-3}\ |z_\rho-z|\quad\left(\begin{array}{l}\text{ただし，}z_{\alpha/2}\text{ の値は，正規分布表における}\\ \alpha/2\text{ に対応する }z\text{ の値}\end{array}\right)$$

$$\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}>|z^\rho-z|$$

したがって， $z-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}<z_\rho<z+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\cdots\cdots(1)$

このことは，一般に

$$Pr\left(z-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}<z_\rho<z+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)=1-\alpha\ \cdots\cdots(2)$$

と表示される。さらに，z_ρ の信頼係数$1-\alpha$ の 信頼区間 $\left(z-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}},z+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)$ から，z 変換によって ρ の信頼区間が求められる。

(3)　回帰の有意性検定，推定法

(正規分布する仮説的) 無限母集団の中に確率定数Xについての Y' の回帰方程式が次のように成立するとされる；

$$Y'=\alpha+\beta\times\cdots\cdots(1)$$

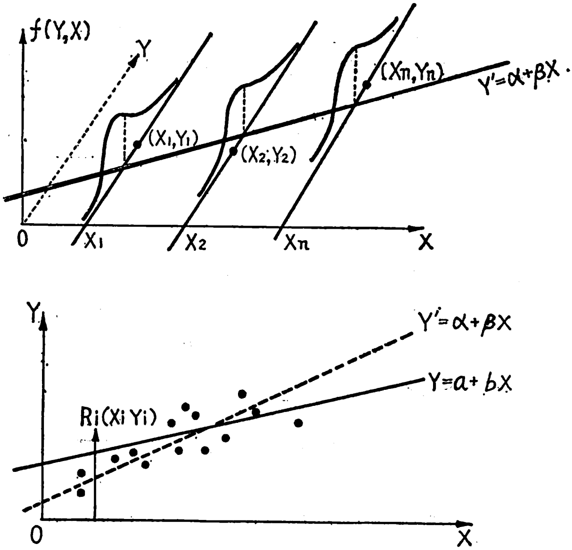
ここで，αは母集団における回帰定数であり，β は X における Y' の母回帰係数である。

N個の観察値 (標本) X_1 と Y_1，X_2 と Y_2，X_3 と Y_3，……，Xn と Yn に，最小自

乗法によって回帰方程式をあてはめる。

$$Y=a+bX \quad \cdots\cdots (2)$$

（図—7）



Yは母集団回帰値 Y' の推定値とみなされる。 $Y-Y'=u$ は，誤差（error）または偏差とみなされ，確率変数である。この誤差 u の確率分布に関して，次の二点が仮定される；

① 誤差 u_i は，平均値 0，分散 σ^2 の正規分布する。（ただし，分散 σ^2 の値は i にかかわらず一定とされる）

② u_i は，相互に独立である。

以上の諸仮定を含んだ標本回帰方程式から母回帰方程式を推定することが目的である。すなわち，母集団パラメーターα，β と母回帰値 Y' の有意性検定，推定がそれである。

（i） 仮説検定（有意性検定）

母集団パラメーターと標本特性値との差，すなわち，$b-\beta$，$a-\alpha$ の有意性検定が行なわれる。そこで差 $b-\beta$，$a-\alpha$ の有意性検定に際し，“ステューデント„ の t 分布が使用される。すなわち，

$$t=\frac{b-\beta}{S_b} \quad \text{または} \quad t=\frac{a-\alpha}{Sa}$$

① 回帰係数の有意性検定

b の標本分布の分散$\dfrac{\sigma^2}{\sum(X-\bar{X})^2}$の推定値は，

$S_b{}^2=\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sum(X-X)^2}$ とみなされる。したがって，

$$t=\frac{b-\beta}{S_b}=\frac{b-\beta}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sum(X-X)^2}}}=\frac{(b-\beta)\sqrt{\sum(X-X)^2}}{\hat{\sigma}} \cdots\cdots(3)$$

この t は，自由度 $n=n'-2$ の t 分布であるから，先の相関係数の有意性検定と同様の論理で，回帰係数の有意性検定を行なうことができる。

② 回帰定数の有意性検定

同様に $t=\dfrac{a-\alpha}{Sa}=\dfrac{(a-\alpha)\sqrt{n'}}{\hat{\sigma}}$ $\cdots\cdots(4)$

同様の論理で，有意性検定を行なう。

(ii) 区間推定

標本回帰係数 b から母回帰係数の β の推定においては，常に誤差を伴う。したがって，母回帰係数の信頼区間を推定することが必要とされる。先の(3)において t が，自由度 $n=n'-2$ の t 分布することから，信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は，

$$Pr\left(-t_{\alpha/2}<\frac{b-\beta}{S_b}<t_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

と推定される。左辺の不等式を変形すると，

$$Pr(b-t_{\alpha/2}S_b<\beta<b+t_{\alpha/2}S_b)=1-\alpha$$

となる。したがって，信頼係数 $1-\alpha$ の母回帰係数 β の信頼区間は，次のようになる。

$$(b-t_{\alpha/2}S_b,\ b+t_{\alpha/2}S_b)$$

(iii) 母回帰の信頼区間

標本回帰値 Y と母回帰値 Y' との間には，回帰係数と同様に，

$$t=\frac{Y-Y'}{S_y{}'} \cdots\cdots(1)$$

$$\left(\text{ただし，}\ S_y{}'^2=\left\{\frac{1}{n}+\frac{(X-\bar{X})^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right\}\hat{\sigma}^2\right)$$

が成立する。これは，自由度 $n=n'-2$ の t 分布することから，回帰係数の区間推定と同様の論理から，信頼係数 $1-\alpha$ の母回帰値の信頼区間は，次のようになる。

$$(Y-t_{\alpha/2}S_y{}',\ Y'+t_{\alpha/2}S_y{}')$$

(1) 大橋隆憲「近代統計学の社会的性格 ― その歴史的地位とイデオロギーの系譜」『8,000万人』1949.2 (『現代統計思論』所収)。岩崎允胤『現代社会科学方法論の批判』第三章，プラグマティズム論理学と推計学の論理構造，参照。

(2) 適用の具体例は，関弥三郎『社会統計学』p. 294〜p. 303 参照。

4. 方法論的意味

以上で，いわゆる「推測統計学」の相関分析法，すなわち相関係数，回帰係数の有意性

検定および推定の方法の学説史的考察とその基本的形態の解明を終えた。最後にわれわれは，この手法の方法論的意味を考察する。

(1) 従来の相関概念との同一性

まず第一に確認しなければならないことは，「推測統計学」の相関分析法は，従来のピアソン＝ユールの相関理論の基本概念と基本形態（相関，回帰，相関係数，回帰係数等）を前提して構成されていることである。推測統計学がつけ加えたのは，対象と資料との間に母集団と標本の関係を設定したことであり，標本によって母集団の値を推定する方法を数理手続きの点で精密化したことである。したがって，従前のピアソン，ユール，チュプロフの相関理論に対する批判論点は，推測統計学に対してもそのまま妥当するものである。

(2) 推定方法上の前進的側面

推測統計学が中心問題としている標本からの母数の確率的推定ということの意味は，次項で検討されるのであるが，もし，このような確率的推定法がなんらかの意味をもつものと仮定するならば，その推定法が，R. A. フィッシャーに至って精密化したことは前進的側面として評価されてよかろう。

（i） 諸概念の明確化

推測統計学は，母集団と標本を明確に区別し，大標本の場合の推定法との違いを区別した。特に，後者について要約すれば次のとおりである。

① 大標本（ただし，$|r|$が１に近い場合を除く）

従来のピアソン流の相関分析法を吟味し，その適用が許されるのは，大標本の場合に限られることを明らかにした。相関係数の確率誤差の概念は，大標本（統計値数大）の場合（$|r|$が１に近い場合を除く）にのみ妥当することを解明した。

② 小標本

正規母集団から抽出された相関係数の標本分布を確定し，次の二つの場合を区別する。

１）母相関係数：$\rho=0$の場合

相関係数の標本精密分布は；

$$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

これは自由度 $n-2$ の t 分布に等しい。

２）母相関係数：$\rho\neq 0$ の場合

相関係数の標本精密分布は，

$$z=\frac{1}{2}\log e\frac{1+r}{1-r}=1.15129\ \log_{10}\frac{1+r}{1-r}$$

による z 変換によって，近似的な正規分布を形成する。

(ii) 新しい手法の導入

① 有意水準（危険率）(α) による仮説検定

母集団仮説の設定とその検定は，ピアソンの段階ではみられなかった新しい手法であ

る。

母集団仮説，$\rho=0$ の場合，$\rho\neq0$ の場合の検定には，それぞれ，相関係数の精密標本分布である t 分布，z 変換した近似的正規分布を使用する。

② 信頼係数 $1-\alpha$ による推定（区間推定）

ピアソンの確率誤差による推定に代って，信頼係数 $1-\alpha$（95%，98%）によって，母相関係数 ρ の信頼区間を推定する。この確率付きの推定方法は，ピアソンの方法も，フィッシャーの方法も本質的には同一であると思われる。ただ，フィッシャーの推定方法がより技術的に精密になっただけである。

以上が，K. ピアソン等のいわゆる「記述統計学」の相関分析法から，推測統計学的方法が計算技術的に前進した側面である。

しかしながら，従前と同じ相関諸概念を用いつつ，標本から母数を推定する技術が豊富になったということで，果して統計学史上，一世を画する「革命」といえるものなのであろうか？戦後，わが国において，アメリカ的プラグマティズム諸科学の流入に際し，推測統計学は，一部の数理統計等者によって，「推計学」の名の下に，記述統計学＝経験批判論，推測統計学＝唯物弁証法という進歩的粉飾をもって宣伝され，理論戦線に少なからずの混乱を与えた(1)。これに対し，いち早く大橋隆憲氏(2)や，他の一部の社会，経済統計学者によって，原則的な批判が加えられ，さらに標本調査法をめぐる統計論争(3)に引き継がれ，社会経済現象における推測統計学的手法の意義と限界が，少なからず明らかにされてきている。しかし，この手法の本来の場である統計解析論（統計利用論）における検討は，まだ不充分であり，未解決の点が多く残されていると思われる(4)。われわれは，「計量経済学」における推測統計学的手法の重用をみるにつけ，この手法の科学的方法をしてもつ意味を批判的に吟味する必要を痛感せざるを得ない。

(3) 推測統計学的手法の限界

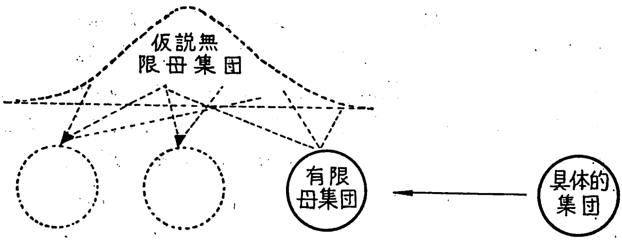
先にもふれた通り，ここでは相関概念そのものではなく，推測統計学の手法の吟味に問題をしぼる。

既に学説史的考察において明らかなとおり，推測統計学的手法は，農事試験を基盤として成立してきたものである。しかし，この手法が推測統計学理論として体系化されるや，あたかも諸科学に普遍的に適用しうるかの勢いをもって，方法自体が一人歩きをはじめている。われわれが推測統計学的手法を本稿でとりあげたのも，この方法が「計量経済学」の基本的手法になっているからであった。しかしながら，この手法は，生物現象とは異質な経済現象の研究に用いられて果して意味を有するものなのかどうか，そもそも生物現象の研究においてどのような条件の下で意味をもっていたのか，われわれはこの点をいわゆる「仮説的無限母集団」と現実の生物現象，社会現象との関連の検討を通じて明らかにしてみたい。〔なお，R.A. フィッシャーによって形成された推測統計学的手法の一部分が，その後一部の数理統計学者によって，有限母集団の数値を1個の事実として確定するための便利で定価な手法として用いられるに至っている。（戦後日本で，標本調査法をめぐって行なわれた統計論争における，いわゆる技術論者の所説(5)をみよ。）しかし，われわれ

はここではあくまで，計量経済学的手法とされるに至る本来的な推測統計学の手法を念頭において吟味する。〕

まず，仮説的無限母集団という概念は，われわれが社会現象の中にみる社会的集団からすると，極めて抽象度の高いものである。具体的な社会的集団から抽象的な集団への下向は，次のようになろう。(1)単位のおのおのが構造をもち，単位相互間および単位以外の外部と関連し，交互作用をもっている場合，(2)それから単位相互間および外部との交互作用が捨象された場合，(3)さらに，各単位の構造（異質性）が捨象されてゆく場合（単一標識化）。(4)単位の異質性が完全に捨象された場合（同一標識性）。ここでわれわれは，社会的集団から出発したが，自然的集団についてもこの段階をみとめうるし，また一応客観的存在物の区別ともわれわれの認識上での抽象段階ともいえる。しかし抽象的になればなるほど，そのような客観的存在はわずかとなろう。この(4)は，一団の有限個の数値の集りで，いわゆる「有限母集団」に他ならない。そして「仮説無限母集団」とは，この有限母集団の有限性を捨象した無限の確率的数値の集りにほかならない。（これは，蜷川理論における「純解析的集団」に相当する。）それら数値は，連続的に確率分布するとされ，この確率分布（＝無限母集団）からの偶然的なあらわれが有限母集団であるとみなされるのである。この意味において有限母集団は，仮説無限母集団からの確率標本といわれる。この関係を図で示すと下の通りである。

（図－8）



しかし，このような正体不明の概念は，推測統計学的手法の成立の場，圃場試験を念頭においてみると幾分はっきりしてくると思われる。ここで，圃場試験では，特定品種作物の収量，品種間の収量の比較，施肥その他の処理毎の収量の相違等が問題とされるのであるが，「作物A品種の収量」という単純な例をとってみよう。過去，現在，未来にわたって，出来るだけ同一の条件の下で育てられたA品種の収量は，そのおのおのにおいて違いをみせるであろう。なぜなら栽培環境を完全に同一に保つことはできないし，またA品種の種子自体が個体差を持っているからである。そこで，A品種の収量はどれだけなのかが問題とされた，「A品種の収量」として確率分布が想定されて，実際の栽培結果は，そこからの偶然的なあらわれとみなされるのである。このA品種の収量としての確率分布が仮説無限母集団であり，実際の栽培結果の一つ一つが標本（有限母集団）である。圃場試験

においては，圃場にうえられたA品種の有限個の株の収量をえて，「A品種の収量」＝母集団を推論するのである。そしてほとんどの場合，母集団分布は正規であると仮定されるから，この推論は正規分布を規定する平均値と分散値についてのものとなる。このような仮説無限母集団を推論するのが推測統計学的手法なのである。この手法適用の結果「A品種の収量」として確率分布が獲得されるのだが，われわれは，これについて次の点を指摘できよう。

(1) この方法を適用して獲得しようとしているのは，A品種の収量という一個の数量的事実である。この目標および方法の出発点が有限母集団であったことからもわかるとおり，なんらかの質的規定性の分析，したがって因果関係の分析は，目標とはならず，また行ないえない。収量の分布を種子の内的構造および環境諸条件との関連において分布することは単なる数値の集団から出発しては行ないえない。

(2)「A品種の収量」の分布として，時間的場所的制約を超越し，（すなわち不変性をもち），かつ個体差をもつ収量分布を想定することが意味をもち，しかもそのとき収量分布が正規分布であるという仮定が許されるならば，そのような対象に対して仮説無限母集団のパラメーター推論は意味をもとう。

(3) 実際の栽培においてA品種の分布のうちのどれだけ個体差をもった種子がとりあげられるかは，確率的に偶然という意味において，実際の栽培結果は，偶然的であり，母集団分布は，確率的とみなしうる。これによって，われわれは，推測統計学的手法は，対象が確率分布であるという仮定，しかもそれが不変性を有するという仮定が許されるときに，質的諸規定を捨象した，すなわち因果関係分析とは無関係な単なる一数量的側面の事実の確定の手法として，確率的結論をもたらすものであることを知る。

(4) したがって，推測統計学的手法は時間的場所的制約下にあって絶えず変化しつつある社会的集団――その量的規定性は，質的諸規定との不可分の関連においてとられることを要し，したがってまた，有限母集団への捨象，ましてや，それが仮説無限母集からの確率的なあらわれとみなすことは許されない――社会的集団の研究手法としては，本来的に制約をもつものである。この方法を社会現象の研究に用いようとする立場は，社会を偶然的なものとみ，内在的因果法則に支配されていると考えず，本来科学が目標とすべき因果分析を，はじめから放棄し，函数関係もしくは相関関係を見出すことに科学の問題を限定する立場である。それは，質的多様性，変化流動性が，数量化，方程式化を許さない社会現象に対して，それを行なおうとする誤った立場となるのである。

(5) 推測統計学的方法の前提する対象集団と現実の集団との関連から指摘しうるこれらの方法の限界諸点に加えて，終りに，推測統計学的方法が主要な推論形態として有する仮説検定の推論方式のもつ限界を指摘しておこう。それは，客観的対象に関して設定する仮説を確率的に判断することからくる限界である。仮説検定の論理の説明の際に指摘したごとく，客観的事実として，仮説は有意水準（危険率）5パーセントまたは1パーセントの範囲内に生起することがあり得る。しかし，この場合には，この客観的に正しい仮説は「たかだか5パーセントまたは1パーセントの危険をおかすにすぎないから」という確率

的判断（可能性）によって棄却されてしまうことになるのである。したがってこの検定方式にあっては，常にこの誤謬の可能性を伴う。そこでは，その仮説が客観的に正しかったか，誤っていたかのいづれかの一方であるにもかかわらず，これを一義的に判断することは常に回避され，仮説の真偽は可能性の問題にすりかえられるのである。すなわち，客観的に決定されている問題が，主観的可能性（確率性）の問題に代置されているのである。

したがって，この検定方式においては，次の四つの場合のいづれかが起ることになる。

(1) 正しい仮説が検定により棄却される。

(2) 正しい仮説が検定により採択される。

(3) 正しくない仮説が検定により棄却される。

(4) 正しくない仮説が検定により採択される。

このうち，(1)の誤謬は第一種の過誤といわれ，(4)の場合の誤りは第二種の過誤といわれる。これは，客観的に正しいか間違いかのいづれでしかない仮説について，95パーセントとか97パーセント等の確率付きでは判断できても， 100パーセントを以て判断することが出来ないことからくる，避けることの出来ない誤謬であり，しかもこの手法内部においては，この誤謬におちいっているかいないかを見分けることの出来ない誤謬なのである。

以上で，推測統計学的手法の方法論的意味の考察を終えたのであるが，それは多くの制約下の限定された適用対象をもつ確率的判断手法（数学的操作手法）に過ぎないことが明らかとなった。岩崎允胤氏が鋭く分析されているように，この手法のもつ主観主義，数学主義（確率論主義）は，推測統計学と現代マッハ主義＝論理実証主義，特に日本型プラグマティズム論理学＝「統合」論理学との思想的 同一性を もつものである。「統合」論理学の「仮説」―「演繹」―「検証」のサイクルと推測統計学の「母集団仮説」―「検定」のサイクルは，共に確率的判断を媒介にした試行錯誤的サイクルであり，客観的事実の一義的判断を行ないえない主観主義的サイクルにほかならないのである(6)。われわれは，この推測統計学的手法が，その本来の対象領域（生物現象）から離れて，あたかも実質諸科学の普遍的方法となり得るかのごとく考える誤った科学観を今後も厳しく批判していかなければならない。

あ と が き

われわれはフィッシャー流の推測統計学における相関分析法の吟味，批判を終えたのであるが，まだ非常に不充分なものである。さらに推測統計学の発生の必然性（農事試験等における具体的事例とこの手法の必然性と有効性)，「フィッシャー革命」の実質的意味と哲学的背景等の歴史的，論理的検討によって補強される必要があろう。しかし，「計量経済学」的手法の母体としての推測統計的相関分析法の基本的形態と方法論的意味の一端は明らかにされたものと思う。

今後の課題としては，本研究を土台として，経済研究における相関分析法利用の歴史的過程の分析と，その現代的利用，特に「計量経済学」における相関分析法の方法論的，実質（内容）的吟味，批判の課題が残されている。

(1) 北川敏男「統計学の認識と統計学史の諸問題—統計学の前進のために—」(2)『自然科学』1948.9.第13号。『統計学の認識』1948。増山元三郎『推計学の話』1949。増山元三郎校訂『推計学への道』1950。等参照。この点に関する批判は，岩崎允胤『現代社会科学方法論の批判』第三章，プラグマティズム論理学と推計学の論理構造，参照。

(2) 大橋隆憲「近代統計学の社会的性格—その歴史的地位とイデオロギーの系譜」『8,000万人』1949.2 (『現代統計思想論』所収。)

(3) 統計論争に関する文献は多数あるが，論争の問題点と文献目録については，伊藤陽一「社会統計調査と任意抽出法—統計論争の検討—」『北大経済学』，第5号，1964.4参照。

(4) 統計調査論，統計解析論全体にわたっての社会統計学における抽出理論（小標本理論）の意義と限界の検討は，馬場吉行『社会統計学と抽出理論』1952.10,『標本調査法の基本問題』1961.4において，早くから進められている。

(5) 津村善郎『調査の話』1954. なお，技術派の論点とその吟味は，前掲の伊藤論文参照。

(6) プラグマティズム論理学（「統合」論理学）と推計学，現代数学主義，確率論主義と推計学の関係とその批判は，岩崎允胤，前掲書参照。