生産関数についての一考察

——Set Theoretical Method を中心として——

神保一郎

線型経済学と普通広く考えられているものの内容は、アクティヴィティ・アナリシス、投入産出分析、リニア・プログラミング、一般均衡理論等々であり、そこで中心的な役割を演じているのは常に生産関数なのである。即ちヒックスの「価値と資本」を近代経済学の一つの輝かしい頂点と見るならば、その分析の重点はむしろ需要の理論にあり、それとアナロガスな方法で生産の理論が結び付けられて、一般均衡理論への道が開かれているのに対して、現代ではアクティヴィティ(Activity)の分析を中心とした生産の理論が先づその方法的基礎を提出し、それとアナロガスな方法で需要の理論が設定され、不動点定理を中心とした一般均衡理論へと結集されている。

一方投入産出分析ではオープン・モデルを前提とすれば最終需要の変動に対して投入係数が如何なる変化を蒙るかを示すのがサムエルソン(Samuelson)の代替定理(1)であり、又価格の変動に対して如何に投入係数が変動するかを探究するのがアクティヴィティ・アナリシスの問題である。

リニア・プログラミングは投入産出分析がマクロ・アナリシスであるに対してミクロの分野にアクティヴィティ・アナリシスにおける生産関数を利用したものであり、この新しい分析のToolが操作可能な変数を以て構成されうる点に着目して企業経営の計画の問題を解こうとするものである。

だから線型経済学が現代経済学の代名詞の如くに扱われている昨今にあつては生産関数の重要性は理論経済学の中において益々大であると言わねばならない。ケインズ、ヒックスを頂点とする近代経済学がその努力を需要の理論に集中したに対して、現代の経済学はそれを生産の理論に集中していると言いえないであろうか。

註（1）"Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models," Tjalling C. Koopmans ed. *Activity Analysis of Production and Allocation.* 1951. *chapter* Ⅶ pp.142—146

一、伝統的生産関数

ある変数の価が与えられれば、他の変数の価が決定される時この二つの変数は関数の関係にあると言われる。生産にあつて投入量が与えられれば産出量が決定される点に着目して生産の関係を示そうとするのが生産関数である。

以下の議論では単純化のため結合生産のない場合を考えよう。（しかし例え結合生産の場合にあつても議論の本質には何ら変化はないであろう。）そしてこの場合、生産関数は次の型で示される。

$$x=f(v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_m) \qquad (1\cdot 1)$$

ここで x は産出量であり、v_1、v_2……v_m は投入量である。この生産関数は次の性質を持つものと一般に仮

定されている。

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} > 0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots m) \qquad (1 \cdot 2)$$

この事は投入量の増加が必ず産出量を増加せしめる事を意味している。この仮定が満される限り特異点（Singular Point）はない。何故なら投入量が増加しても産出量が増加しないと言う様な事は起り得ないからである。

今便宜上、x、v_3、………v_m を一定と仮定する。その結果は

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} + \frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = 0$$

となる。これは等産出量曲線を示す方程式でありその勾配は

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = -\frac{\partial f}{\partial v_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial v_2} \qquad (1 \cdot 3)$$

である。

（1・2）式の条件を考慮すれば常に負であり、この事は等産出量曲線が右下りである事を意味する。更にこの等産出量曲線は原点に対して凸であると仮定される。

さて x の価格を p とし、v_1、v_2………v_m の価格を w_1、w_2………w_m としこれを与えられたものとする（完全競争の仮定）。ここで生産費を π とすれば

$$\pi = w_1v_1 + w_2v_2 + \cdots\cdots + w_mv_m \qquad (1 \cdot 4)$$

である。

生産主体は（1・1）式の条件の下において利潤

$$R=px-\pi=px-\sum w_iv_i \qquad (1\cdot5)$$

を最大ならしめるように行動する。さてここで未定乗数法を使用しλを未定乗数とすれば、

$$R-\lambda\{x-f(v_1,v_2,\cdots\cdots,v_m)\}$$

について、生産主体のかかる行動の結果を求めるためこれを x、v_1、v_2…………v_m について逐次偏微分したものをゼロとおけば

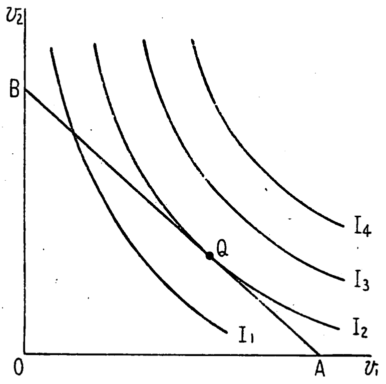
$$\left.\begin{aligned} p\ -\lambda\quad &=0\\ -w_1+\lambda f_1&=0\\ -w_2+\lambda f_2&=0\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ -w_m+\lambda f_m&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot6)$$

が得られる。ただし f_1、f_2、………f_m は f の v_1、v_2、………v_m に関する偏微係数である。以上より

$$\lambda=p=\frac{w_1}{f_1}=\frac{w_2}{f_2}=\cdots\cdots\cdots=\frac{w_m}{f_m} \qquad (1\cdot7)$$

が得られる。これは限界生産力均等の法則に他ならない。

同様の事は第一図によつて説明されうる。I_1、I_2、…………は等産出量曲線であり $I_1<I_2<$……… なる産出量



第 1 図

を示し、I_i（$i=1,2,\ldots\ldots,n$）は v_1 と v_2 とを代替する事により常に等しい産出量を生み出す v_1 と v_2 との組合せの集合である。AB は等費用直線であり、この直線上の一点で示されている v_1 と v_2 の組合せは全て等しい生産費を要するものと考えられている。さて直線 AB は次々と色々な等産出量曲線を横ぎり、遂には Q 点に於てこの直線に接する等産出量曲線 I_2 に達する。この点からは直線上をどちらの方向に動いたとしても低い水準の等産出量曲線と交る事となるから利潤の最大を求める経済主体は完全競争を前提とする限り Q 点の示す割合で v_1、v_2 を投入し、I_2 の指示する産出量を生産するのが一番有利な事となる。Q 点は生産の均衡点であり、この点では等費用直線は等産出量曲線 I_2 と接している。しかるに等費用直線は二つの投入物の価格の比をも示しているからこれはまさしく限界生産力均等の法則を図示したものに他ならない。即ち

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{f_1}{f_2}$$

故に

$$\frac{f_1}{w_1}=\frac{f_2}{w_2}$$

さてここで生産関数

$$x=f\,(v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_n) \qquad (1\cdot1)$$

が一次同次であると仮定しよう。そうすればオイレル（Euler）の定理により

$$x = f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots\cdots + f_m v_m \qquad （1・8）$$

となる。ここで（1・7）式を考慮すれば

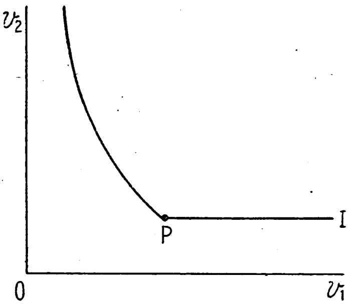
$$px = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots\cdots + w_m v_m$$

が得られるから（1・5）式より均衡に於ては生産関数の一次同次を仮定する限り利潤はゼロとならざるを得ないと言いうる。この事はもし（1・7）式で示された比率以外で生産要素を使用すればマイナスの利潤の生ずる事を意味する。生産関数の一次同次の経済学的インプリケーションは言うまでもない事ではあるが、規模に関して収穫不変（Constant Returns to Scale）である。

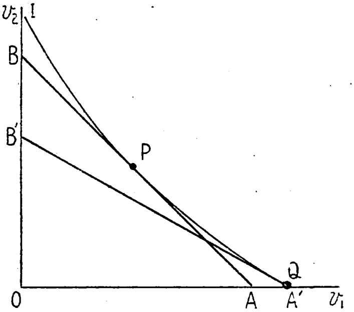
二、伝統的生産関数の困難

限界分析によって設定される生産関数は分析のToolとしてはまことにエレガントなものではあるが必ずしも完全なものではないと考えられる。それは内部に幾多の困難を持つからである。その主たるものは次の如きものであろう。

先づ第一は特異点（Singular Point）の存在をどう処理するかと言う問題である。伝統的生産関数には特異点のない事が仮定されていた。特異点が生ずるのは主として投入物の利用可能量に何らかの制限がある場合であり（第二図では I を等産出量曲線とすれば点 P は特異点）、この時には限界分析の結論も何ら意味を持たないであろう。



第　2　図

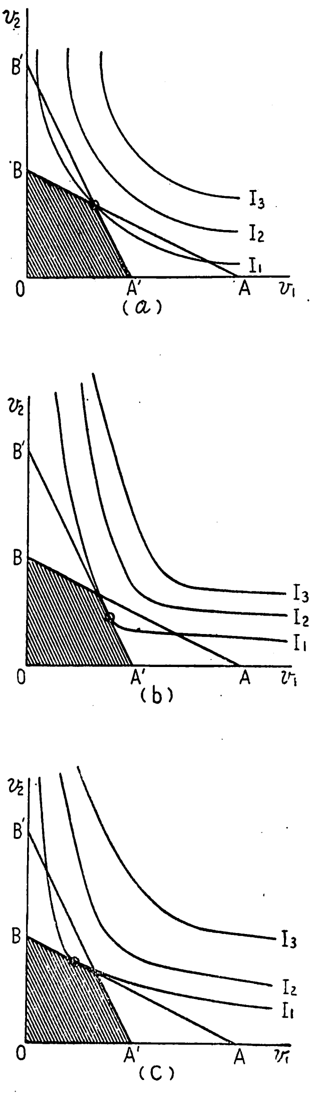


第　3　図

しかも生産の場合にあっては特異点が存在するのが普通であり、特異点のない場合こそ特異なのである。(1)

第二には高度に代替的な場合に於ては微少なる価格変化の結果すら分析し得ない。即ち第三図に於て I を等産出量曲線、AB を等費用直線（或は価格直線）とした時、価格が AB から $A'B'$ に変化したとき等産出量曲線上の均衡点が P から Q へと移動したとすれば、Q 点に於ては限界生産力均等の法則が成立し得ない場合が生ずる。Q 点に於ては必ずしも $A'B'$ は等産出量曲線への接線ではないからである。又均衡解が必ず非負 (**Non-negative**) である事が保証されていない。負の解は現実的には如何とも解釈のつかぬものであろう。例えば負の労働の投入とは如何なるものであろうか。我々は産出物を分解する事により労働を取出せると言うのであろうか。かかる童話は経済学が現実の分析を意図する限り、あくまで排除せねばならぬ。

そして最後に制約条件が二つ以上の場合には必ずしも限界生産力均等の法則が成立しない。第四図に於て AB は等費用直線であり、生産はこの費用の範囲内で遂行せられるものとする。又生産要素に対しては点数による配給制度が課せられており、$A'B'$ によって示される制約が存在するものとする。即ちこの場合にあっては生産関数に二つの制約条件が附されているものと仮定するのである。そうすれば第四図に於て斜線をほどこした部分は生産可



第　4　図

能集合（Feasible Set）である。そして○印をつけた点は生産可能集合の中の最も高い産出量であるからオプティマムな点ではあるが、それは必ずしも等費用直線と等産出量曲線との接点になつていない（*a*、*b* 図）。

以上の様な困難を如何にして克服するかがここにおける問題である。以下に於てこの困難を回避しつつやはり同じ結論に到達し得る事を示そう。しかもその帰結はより明瞭なより強力な型で導き出し得るであろう。

註（1）特異点の存在する生産関数について限界分析の立場よりの優れた研究は **Paul Anthony Samuelson ; *Foundations of Economic Analysis*, 1947. pp.70—74** によつて与えられている。

三、公理主義と生産関数

議論を進めるに先立つて次の事を仮定しよう。普通、財及びサービスは整数で測定されるのであるがここではそ

れが有理数であるとする。こうすれば伝統的理論にあっては $\mathfrak{c}$ の濃度の数の集合が仮定されたがここでは高々アレフ・ゼロの濃度の数の集合で済ましうると言う利点を持ち、かくて整数と同じ濃度の数を使用しうる。だから以下に取扱われる数は次の実数の公理に対して閉ている事となる。$a, b \in R$ とし、R を有理数全体の集合とすれば、

$$a + b \in R$$

が存在し

（$A \cdot 1$）$a + b = b + a$　（加法の交換法則）

（$A \cdot 2$）$(a + b) + c = a + (b + c)$　（加法の結合法則）

（$A \cdot 3$）任意の二元 a、b に対して $a+x=b$ を満足する x がただ一つ存在する。（減法の可能性）

又 $ab \in R$ が存在し

（$B \cdot 1$）$ab = ba$　（乗法の交換法則）

（$B \cdot 2$）$(ab)\,c = a\,(bc)$　（乗法の結合法則）

（$B \cdot 3$）$ax = b$ を満足する x がただ一つ存在する。（除法の可能性）

（C）$a\,(b + c) = ab + ac$

右の$A \cdot B \cdot C$の公理を全て満足するものを可換体(Commutative Field)と呼びここで使用する有理数体（**Rational Number Field**）はその部分集合である。実数の公理が必ずしも経済現象の全てに妥当する保障はない。しかし以下の議論に於てとりあつかわれる数量は全て有理数体に所属するものとし、実数の公理が妥当するものとする。

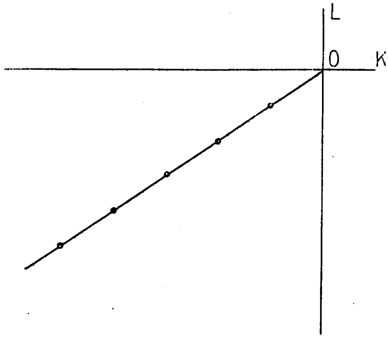
さてここで一つの例をあげて出発の手掛りとしよう。我々にとって最もポピュラーな生産関数は O を産出量、L を労働、K を資本とすれば

$$O = f\ (L,\ K) \qquad (3 \cdot 1)$$

で示されるもの、即ち資本と労働と言う二つの投入物を費消して一つの産出物を生産する場合である。産出物一単位を生産するに要する投入量をそれぞれ l、k とすれば産出物二単位を生産するに必要な投入量がそれぞれ二倍であるとする。そして n 倍の産出量を得る為には n 倍の投入量が必要であるとすればこの関係は第五図の如くに示される。これはいわゆる規模に関して収穫不変を仮定する事である。ここでは産出量を表わすものが一つと、投入量を表わすものが二つと三個の数字によってこの関係が表現されている。我々は投入物はマイナスの産出物と見てこの事をベクトルを使って次の様に記す事にしよう。

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ l \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 2)$$

（ただし $k < 0$, $l < 0$）



第 5 図

そしてこれを今後アクティヴィティ（Activity）と呼ぶ事とする。アクティヴィティは必ずしも一単位の産出量に基準化されているとは限らないから一般化して

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\qquad（3・3）$$

としておいた方が好都合である。そしてこのベクトルの要素（Element）がプラスの時には産出物を、マイナスの時には投入物を示していると考えるのであるから、各要素が大なる程望ましい財であると言い得よう。即ちここでは望ましい財とはより少ない投入量でより大なる産出量を生むものであり、これはアクティヴィティのベクトルの大小を通じて判別が容易である。第五図では産出物の軸は裏にかくされて居るが、一般的に言つて二個の数字の集合は二次元空間の一点を規定し、三個の数字の集合は三次元空間の一点を規定する。だから（3・2）式及び（3・3）式のアクティヴィティ a は三次元空間の一点として示される。さて n 個の投入産出量を示しているアクティヴィティは

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}\qquad（3・4）$$

（ただし $a_i<0$ の場合は投入量を、$a_i=0$ の場合はその生産に関係のない事を、$a_i>0$ の場合は産出量を示している）

で表現され、n 次元空間の一点として考えられる。この空間の性質を n 次元位相空間 R_n であると仮定しよう。[(1)]

さて第五図では投入量と産出量の関係を直線で示してあるが生産可能集合は・印の点だけであると言うのがこれまでの議論であつた。しかし原点 O と産出量一の点との間も生産が可能であると仮定しよう。これを分割可能性

と言う。これは

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 4)$$

なるアクティヴィティに $0 \leqq x \leqq 1$ で示されるアクティヴィティの水準（Activity Level）x を掛け合せた点も生産可能であるとするに等しく、

$$xa = x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 \\ xa_2 \\ xa_3 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix} \qquad (3 \cdot 5)$$

で表現し得、又 $ab \in R$ と言う実数の公理より導かれる。

生産主体（Agent）によって生産可能な n 次元空間の一点を y で表わし、その全ての点の集合を Y で表わせば

（a）Y は閉集合である。

閉集合と言うのは境界点と内点とを含む集合であり、前者は Y の点 $y^{(1)}$ においていずれの近傍 U（$y^{(1)}$, ε_1）も Y と intersection[2] し、しかもすっかり Y に含まれていない場合であり、後者は Y の点 $y^{(2)}$ において U（$y^{(2)}$, ε_2）なる近傍が Y にすっかり含まれている場合である。ここでは生産可能点を n 次元位相空間の一点

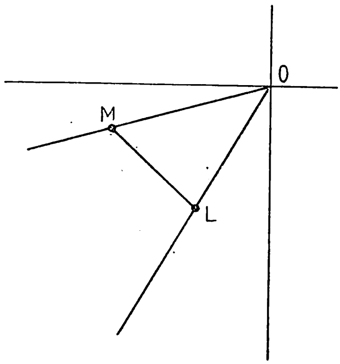
としてとらえたのであるからこの様な近傍を考慮しうる。又分割可能性を仮定する事により生産可能集合は両端を含む線分となるから閉集合である。

x は O をも含む。だから x がゼロの場合、その生産主体は何ら活動をしない場合を含んでいる。

(b) $Y \ni 0$

だからこの体系では条件によつて生産主体が何ら活動しない場合も解明しうるであろう。

さてあるアクティヴィティ、例えば地点 A から B へ土砂を運ぶと言う場合を考えて見れば色々な方法が考えられる。手ですくつて土を運ぶ場合もあるし、トロッコを使う場合も、ダンプカーを使う場合もある。同じ労働と資本と言つた二種類の投入物であつたとしても、その時に与えられた技術を色々と採用する事により異なつた投入量と産出量の量的関係、即ち異なつたアクティヴィティが見られる。先に一つのアクティヴィティしか存在しないと考えたのであるが更にもう一つのアクティヴィティが存在する場合を考え両者が全く独立であるとしよう。そうすれば第六図に於て今迄の仮定では半直線 OL と OM が生産可能であると言うのであつた。同じ産出量を示す二つの点 L と M を結べばこの線分上の点は生産可能となり産出量 OM 或は OL と等しくなるのである。(2) 又同じアクティヴィティを OM 或は OL の上に加える事を考えれば O を原点とする半直線 OM と OL 及び両半直線に挟まれた平面は生産可能な点の集合となり直線 LM は等



第 6 図

産出量直線となる。この事はアクティヴィティ・レベルを先に $0 \leqq x \leqq 1$ と考えたのであるが、xを単に非負の有理数と考えてさしつかえ無い事を意味する。この仮定を n 次元に拡大して

$$y_i = xa^{(i)} = x\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \qquad y_j = x\, a^{(j)} = x\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$Y_i \ni y_i \qquad Y_j \ni y_j$$

$$Y_i \cap Y_j = 0$$

とすれば

（c）$(Y_i + Y_j) \subseteqq Y$

或はこれを一般化して

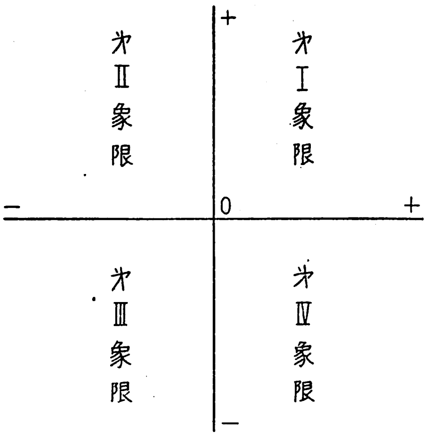
（c′）$\sum_{j \in \wedge} Y_j \subseteqq Y$

これが加法性の仮定である。そして Y_j は閉集合であったからその直和集合 Y も閉集合となる。(4)

（d）Y は凸錐体（Conevx Cone）である。

凸錐体とは $\alpha \geqq 0$ なる場合 $y \in Y$ ならば $\alpha y \in Y$ であり且つ $y^{(1)} \in Y$, $y^{(2)} \in Y$であるならば $y^{(1)} + y^{(2)} \in Y$ である集合であり、分割可能性と加法性は生産可能集合がこの様な条件を満たすのを保証している。だから生産可能集合は凸錐体である。

さて次にクープマンス（T. C. Koopmans）のImpossibility of Land of Cockaigne について述べよう。(5) 即ち先に規定したアクティヴィティの要素が全部プラスの符号を持つ事は全く不可能である。何故ならば生産のアクティヴィティに於て何の投入量もなくして何らかの産出量を獲得し得ないからである。無から有を生じ得ないのである。



第 7 図

この事を二次元空間の一点について考えて見よう。二次元空間でのアクティヴィティは二個の数字の組合せ

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

で表現される。Impossibility of Land of Cockaingne とはこのアクティヴィティの要素 a_1、a_2 が全部プラスではあり得ないと言う事である。さて第七図に於て第Ⅰ象限で示される二組の数は全て非負でなければならない。しかるに第Ⅱ象限、第Ⅲ象限、第Ⅳ象限では要素の一部或は全部が非正（Non-positive）である。だから Impossibility of Land of Cockaigne と言うのは生産可能集合が原点を除いて第Ⅰ象限に属さないと言うのと全く同じである。この場合にあつては二次元空間について考えられた事はn次元空間についてもそのまま主張しうるであろうからこれを一般的に次の様に書き得よう。

（e）　$Y \cap R_n^+ = 0$

ここで R_n^+ は n 次元位相空間の正象限の事である。又（e）が成立する為の必要にしてかつ充分なる条件は次

の如きものである。

〔補助定理〕

$Y \cap R_n^{+} = 0$ のための必要にしてかつ充分なる条件は次のような正のベクトル p が存在する事である。[6]

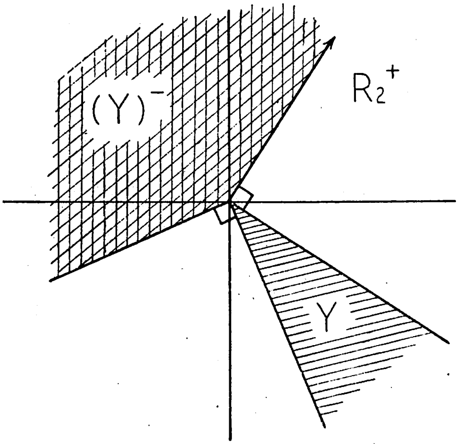
$$py \leqq 0,\ y \in Y, \quad p > 0$$

この証明は次の様にして与えられる。

$pY \leqq 0$ であるためには Y の負極錐（Negative Polar Cone）が R_n^{+} と空集合でない intersection を持たねばならない。ここに負極錐と言うのは

$$(Y)^{-} = \{p\ ;\ py \leqq 0\ y \in Y\}$$

となる p 点の集合である。第八図では $py = 0$ となるベクトルは互に直交するベクトルであり、$py \leqq 0$ は y に対して直交する p の左側の半空間（Half Space）であり、Y に所属する全ての y と直交する p の左側の半空間の intersection が負極錐 $(Y)^{-}$ である。



第 8 図

さて $Y \cap R_n^{+} = 0$ より両辺の凸錐体の負極錐をそれぞれ別別に取れば、

$$(Y \cup R_n^{+})^{-} = (Y)^{-} + (R_n^{+})^{-}$$
$$= (Y)^{-} + (-R_n^{+}) = (Y)^{-} + (R_n^{-})$$

ここで R_n^- は n 次元空間における負象限（二次元空間では第Ⅲ象限）を示している。又原点 O の負極錐は全空間であるから

$$(0)^- = (R_n^+,\ R_n^-)$$

$(R_n^+,\ R_n^-)$ は R_n^+ と R_n^- で張られる空間を指すものとする。故に

$$(Y)^- + (R_n^-) = (R_n^+,\ R_n^-)$$

$(R_n^+,\ R_n^-)$ は全空間であるから $\hat{p} > 0$ を含む。$(Y)^- \ni p$，$(R_n^-) \ni \hat{\hat{p}}$ とすれば右の等式より $\hat{p}$ は次の様に分解し得る。

$$\hat{p} = p + \hat{\hat{p}}$$

これを移項して

$$p = \hat{p} - \hat{\hat{p}}$$

仮定により $\hat{p} > 0$

又 $\hat{\hat{p}} \in R_n^-$

であるから

$$\hat{\hat{p}} < 0$$

故に

$$\hat{p} - \hat{\hat{p}} > 0$$

即ち

$$p > 0$$

しかるに $p\in(Y)^-$ であるから $(Y)^-$ は $p>0$ である p を必ず含む。

負極錐の定義から

$$py\leqq 0,\ y\in Y$$

であり、$Y\cap R_n^+=0$ であれば $p>0$ で $py\leqq 0$ となる様な p が必ず存在する。（必要条件）

さて、

$py\leqq 0$ で $p>0$ となる p が存在すれば $y\leqq 0$ であり $y>0$ は成立し得ない。即ち y は正の価を取り得ない。したがって Y は原点を除いて非負のベクトルを含まない。故に

$$Y\cap R_n^+=0 \quad \text{（充分条件）}$$

次に非可逆性（Irreversibility）を Y について仮定する。これは

（f）$Y\cap(-Y)=0$ [7]

として示し得る。アクティヴィティの若干あるいは全てをとつて、その正の一次結合であるアクティヴィティがすべての商品に対してゼロの産出量を生ぜしめるような事がないのを意味している。即ちある時点に於て知られている全てのアクティヴィティを

$$a^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\quad a^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix},\quad \ldots\ldots,\quad a^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{1k}\\ a_{2k}\\ \vdots\\ a_{nk}\end{pmatrix}$$

とすれば $a^{(1)}$、$a^{(2)}$、………、$a^{(k)}$ の集合

$$A=[a^{(1)},\ a^{(2)},\ \ldots\ldots,\ a^{(k)}]$$

はその時点におけるあらゆるアクティヴィティの生産可能性を示すものである。これを技術行列と呼ぶ事としよう。仮定（f）はアクティヴィティを非負の水準で動かした場合、次の等式の成立する事が不可能である事を示している。

$x \geqq 0$ なる x に対して

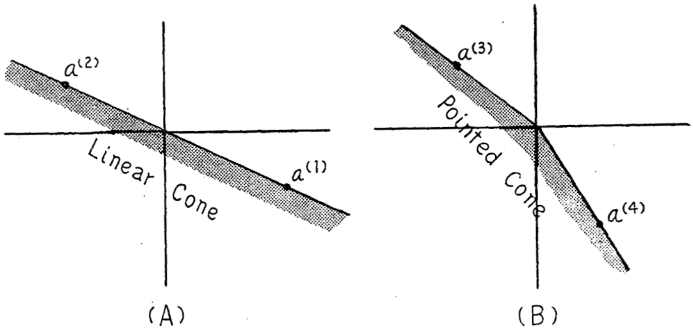
$$Ax=0$$

ただし

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix} \geqq 0$$

であり、各アクティヴィティの使用のレベルを表現している。

第九図（A）に於てアクティヴィティ $a^{(1)}$ と $a^{(2)}$ をそれぞれ適当な水準で活動せしめるならゼロの産出量を生



第 9 図

じる。この場合 $y \in Y$ ならば $-y \in Y$ である。だから Y の要素の符号の向を逆にした $-Y$ と Y との intersection はゼロとならない。この様なアクティヴィティの存在する事をこの仮定は否定している。米の生産が労働と土地の生産力と肥料の投入によつて行われるものであるとするならば、我々は米を如何に細かく分解した所でそれらの投入物を米の中から取り出す事は不可能であろう。如何に単純な産出物であつても投入された労働を取り出す事はとうてい考えられない。この仮定はその様な事を示しているから全く妥当なものと考えられる。だから生産可能集合は linear cone ではなくて pointed cone となる（第九図（A）、（B））

さて最後に生産主体は手持の資源、設備を full に使用するのではない。不完全雇用、不完全利用が時により生ずるであろう。それが需要の側の条件によつて起される場合もあり、技術的条件によつて生ずる場合もある。この様な現象を処理する為に我々はモデルの中に処分アクティヴィティ（Disposal Activity）を導入する。処分アクティヴィティは投入物はあるけれども産出物の全く欠けた特殊なアクティヴィティであり、このアクティヴィティの導入により資源、設備は常に full に利用されるものと考えて議論を進めて行く事が出来よう。生産可能集合に処分アクティヴィティを加える事により

（g）$Y \supseteq (R_n^-)$

が成立する。

註（1）n 次元位相空間 R_n とは次の様なものを言う。

$R_n=〔(r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n);\ r_i \in R〕$

ただし R は全ての有理数の集合

この R_n の二つの点

$P=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n)$

$Q=(\beta_1.\ \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n)$

に対して

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i\leqq\lambda}(\alpha_i-\beta_i)_2}$$

を二点間の距離と言い、ε を任意の正の数とすれば

$U(P, \varepsilon) = 〔Q;\ \rho(P, Q,) < \varepsilon〕$

を点 P の ε—近傍と言う。この近傍に次の三つの公理がある。

(1) $U(P) \ni P$

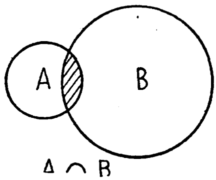
(2) 点 P の二つの近傍の intersecion $U(P) \cap V(P)$ は、P のある近傍を含む。

(3) $U(P) \ni Q$ ならば、Q の適当な近傍 $V(Q)$ は $U(P)$ に含まれる。

この三つの近傍公理を満足する空間を位相空間と言う。

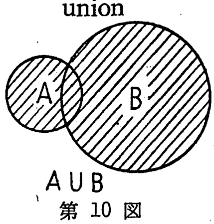
（2）A、B を任意の集合とすれば intersection（交わり）及び union（和集合）と言うのは下図の斜線の部分の事である。

intersection



$A \cap B$

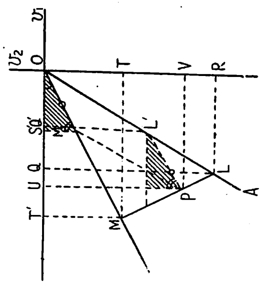
union



$A \cup B$

第 10 図

(3) アクティヴィティ OA と OB とがあり L と M とが等産出量の点であれば直線 LM は等産出量直線である。何故ならば



第 11 図

$$\frac{\text{産出量}(M')}{\text{産出量}(M)} = \frac{OM'}{OM}$$

$$\frac{\text{産出量}(L')}{\text{産出量}(L)} = \frac{OL'}{OL}$$

仮定により

産出量 (L) ＝産出量 (M)

$$\frac{\text{産出量}(M')+\text{産出量}(L')}{\text{産出量}(L)} = \frac{OM'}{OM}+\frac{OL'}{OL} = \frac{L'P}{OM}+\frac{OL'}{OL} = \frac{L'L}{OL}+\frac{OL'}{OL}=1$$

即ち OA を OL' の水準で OB を OM' の水準で使用すれば OL 或は OM と等しい産出量を生ずる。しかるにアクティヴィティ OA は OL' の水準で OQ' だけ v_1 を使用し、またアクティヴィティ OB は OM' の水準で OS' だけの v_2 を使用するから、両方合せて $OQ'+OS'$ だけ v_1 を使用する。

$L'P /\!/ OM'$

故に

$Q'U=OS'$

$OQ'+OS'=OQ'+Q'U=OU$

v_2 についても同様のことが言いうるから P は OM 或は OL と等しい産出量を示す。

(4) 入江昭二「位相解析入門」一九六十年、五十九頁

(5) Tjalling C. Koopmans ed ; *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951. pp. 49—52.

二階堂副包「現代経済学の数学的方法」一九六十年、二百十八—二百二十頁

(6) Tjalling C. Koopmans ; *ibid*. pp. 50—52.

(7) Tjalling C. Koopmans ; *ibid*. pp. 48—49

二階堂副包　上掲書二百十八頁

四、完全競争と利潤最大

生産主体は前節の様な生産関数を満足しているものとする。生産可能集合Yに所属する二点 $y^{(1)}$、$y^{(2)}$ について $y^{(1)} \geqq y^{(2)}$ なる不等式が成立する場合 $y^{(1)}$ は $y^{(2)}$ より優れていると言う事としよう。生産可能集合Yに所属するある一つの点 y^* が Y に所属する他の全ての点より優れているならば y^* を有効点と呼ぶ。もし y^* が有効点であれば任意の乗数 $\lambda \geqq 0$ に対して λy^* の全てが有効点となる。λy^* は n 次元空間に於て超平面（Super Plane）を形成する。これを有効フロンティアと言う。

さてこの生産主体の行動の場が完全競争であると仮定しよう。そうすれば価格体系 p は次の如きベクトルで与えられ、n 次元空間の一点として理解し得よう。自由財は考察の対象に取り入れない事とする。故に価格は全てプラスの符号を持つ。

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} > 0$$

さて生産主体の行動の目標は種々なるものがあるであろう。あるものは利潤の最大を狙い、又利潤の安定化を、又市場の地位の向上、確保等々を追求するであろう。しかしその dominant なものとして利潤最大を取り上げ、生産主体はただ利潤の最大化の為にのみ専念するものとする。そうすると生産主体の利潤は

$$p'y$$

である。

もし y^* が有効点であれば Y に所属する全ての点yに対して

$$y^* - y \geq 0$$

が成立するから

$$p'y$$

が最大になるのは y が y^* に等しい場合でなければならぬ。だから我々は注意を有効点に集中しよう。

生産可能集合 Y に所属する点 y^* が有効点である為の必要にして且つ充分なる条件は y^* が Y に対して正の法線ベクトルpを有する事である。これは次の如くに証明し得るであろう。

y^* が有効点であれば $y \in Y$ なる y に対して

$$y^* - y \geqq 0$$

即ち

$$y - y^* \not\geqq 0$$

ここで Y と $-y^*$ とで張られる空間を

$$L_y = (-y^*, Y)$$

で表わせば L_y は linear cone となる。

$$L_y \ni \hat{y}$$

即ち

$$\hat{y} = y - y^*$$

とすれば $\hat{y} \leqq 0$ であり、L_y と非負の象限との間には原点以外に共通点はない。即ち

$$(-y^*, Y) \cap R_n^+ = 0$$

故に

$$(-y^*, Y) \cap R_n^+ = 0$$

である為の必要にして且つ充分なる条件は（$-y^*$, Y）に所属する全てのベクトル$\hat{y}$に対して

$$p'\hat{y} \leqq 0$$

でかつ

$$p > 0$$

しかるに$\hat{y}$は y が有効点である場合に限って y^* と $-y^*$ とを含む。故に

$$p'y^* \leqq 0 \qquad p'(-y^*) \leqq 0$$

故に

$$p'y^* \leqq 0 \leqq p'y^*$$

かかる場合の成立するのは

$$p'y^* = 0$$

である場合に限られる。故に p は y^* における法線ベクトルである。

Y に所属する全ての y に対して

$$p'y \leqq 0$$

であるから利潤 $p'y$ は

$$p'y^* = 0$$

に於て最大となる。即ち利潤は完全競争と規模に関して収穫不変を前提とする限りゼロである。

又 y^* は境界点であつて内点ではない。何故ならば y^* が境界点でなければ集合 L_y は全空間に広がり有効点の定義に反するからである。

だから生産可能集合 Y に所属する点 y が有効点であるための必要にして且つ充分なる条件は次のようなプラスの価格ベクトル p が存在する事である。すなわちこの価格の下で技術行列に含まれる如何なるアクティヴィテイも正の利潤を生む事なく、且つ有効点 y^* において非負の水準で遂行されるすべてのアクティヴィティの利潤はゼロである。さてここで投入物として体系の外部より与えられた財についてその絶対値が非負の量のみ投入し得、ある与えられた利用可能量を越える事は出来ないと明確に規定しよう。利用可能量を η で示せばそれが常に投入物としてのみ処理される事を考えて符号の向きを考慮すれば y は η 以下に落ちる事は出来ない。

$$\eta \leqq y$$

かくて生産可能集合 Y はコンパクトな集合となる。Y がコンパクトであれば分離定理 (Separation Theorems)[(1)] に従つて y^* を通る支柱平面と称する超平面が必ず存在する。この超平面を H で示すならば

$$Y \cap H = y^*$$

であり y^* を通る正の法線ベクトル p が必ず引きうるであろう。

ここにおける p はまさしく先に論じた価格ベクトルであり、もし任意の p が与えられればそれに対して最も有利な y^* が決定し、

$$p' y^* = 0$$

となる。即ち利潤はゼロである。この場合 p の変化にともなつて y^* も変化するが、生産主体が常に利潤の最大を求めて行動する限り右の等式は常に成立する。

註（1）Tjalling C. Koopmans, *Three Esseys on the State of Economic Science*, 1957. p. 29.

あとがき

この小論の要旨は九月十九日関西大学経済学会例会で報告させて戴き諸先生方から懇切なる御批判と御助言を賜つた事をここに心から感謝致します。又、森川先生は年末年始の忙しい時にもかかわらず、丹念に目を通し、まことに適切な御批判を賜った。それにもかかわらず、この様に不完全なものとなったのは全く私の不勉強の故である。