国際貿易理論における
リニアー・プログラミングの適用に関する覚書

山本繁綽

はしがき

国際貿易理論、特に貿易の純粋理論の分野におけるリニアー・プログラミング、或いはアクティヴィティ・アナリシスの適用は、経済学の他の分野におけると同様、現在発達途上にあるとはいえ、既に若干の成果が見られることは周知のことに属する。しかも国際貿易理論においては、かのグレアムの貿易理論[1]がリニアー・プログラミングの発見以前において、リニアー・プログラミングと同じ想定を用いていたことが後に認識されて[2]以来、国際貿易理論に対するリニアー・プログラミングの適用は、主としてグレアム理論の再編成という形で行われてきた。ホワイティンの論文[3]やそれに対するシューマン及びトードのコメント[4]、グレアムの弟子マッケンジーのいくつかの論文[5]、わが国では小宮助教授[6]及び三辺氏[7]の業績がそれであり、またマッコーアーの近著の第九章[8]もほぼ同様の問題を取扱つている。

しかしながら、これら諸家の業績は需要側の条件について全然触れていないか、或いはグレアムと同じく非常に単純の取扱いがなされているに過ぎない[9]。すなわち、線型の需要函数が仮定されいる程度である。この点、従来の国際貿易理論が二国二財の場合の幾何学的分析についてではあるが、無差別曲線を用いて精密な解明をなしていることから見て、右の諸家の業績はその方法上の制約があるとはいえ、一面において退歩といわれ

ることを免れないと思われる。ところで国際貿易理論においては、消費無差別曲線をラーナーが同心円で表わして以来(10)、同心円法は小島助教授をはじめ多くの諸家によつて採用されている(11)ことがよく知られている。そこで、この論文の目的の一つは、グレアム流の貿易理論をリニアー・プログラミングによつて再編成する場合、この点に着目して特に円形の消費無差別曲線を導入し、多数国多数財貿易における世界及び各国の生産（＝消費）量や貿易量や交易条件を解析的に求めることである。それはノンリニアー・プログラミングを適用することによつて割合簡単に求めることが出来るのである。

もう一つのこの論文の目的は次の点である。すなわち、経済学においてリニアー・プログラミングを適用するメリットは実際の問題に容易に応用出来る点にあり、従つて、リニアー・プログラミングを用いた問題に数値を与えて解を求めることが大切であると思われる。しかし、例えば各国の生産函数を合成して出来る世界全体としての生産の有効フロンティアについてみても、従来、確かに求められることが判つていても、管見にして数値を与えて求めている結果がなかつた様に思われる。それは非常に厄介な計算の操作を要求するからであろう。そこでこの論文の目的の一つは、或る例題について解を求める計算方法を示すことである。特に有効フロンティアの求め方については一つの簡便な計算方法が提示されるであろう。

以下、第一節では国際貿易理論のリニアー・及びノンリニアー・プログラミングによる定式化を、世界生産量の決定、交易条件の決定、各国の生産量の決定及び各国の貿易量の決定という順序で示し、第二節では三国三財貿易の数値を与えた例題について、第一節で示した様式と順序とに従つて解を求めていくことにする。

註（1）F.D. Graham, 〔1〕*The Theory of International Values*, 1948, Princeton, 349pp.（特に一章〜七章）この書の中心的な命題は既に F. D. Graham, 〔2〕"The Theory of International Values Re-examined" *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 28. Nov. 1923, pp. 54—86. reprinted in *Reading in The Theory of International Trade*, Blakiston, 1949, pp. 301〜330 に示されている。

（2）グレアムにおける不変生産費の仮定と資源の制約を明示した生産条件と、固定比率の需要パターンの仮

定と多数国多数財貿易の想定等をいう。

（3）T.M. Whitin, "Classical Theory, Graham's Theory, and Linear Programming in International Trade", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 67, Nov. 1953, pp. 520～544.

（4）J. Shumann and H. Todt. "Classical Theory, Graham's Theory, and Linear Programming in International Trade: Comment". *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 71, Aug. 1957, pp.464～469.

（5）L.W. McMenzie, 〔1〕"On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems" *Econometrica*, Vol. 22, 1954, pp. 147～161. L.W. McKenzie, 〔2〕 "Specialization and Efficiency in the World Production," *Review of Economic Studies*, Vol. 21 (3), No.56. 1954, pp. 165～180, L.W. McKenzie, 〔3〕"Specialization in Production and the Production Possibility Locus", *Review of Economic Studies*, Vol. 23 (1), No. 60, 1955, pp. 56～64.

（6）小宮隆太郎「アクティヴィティ・アナリシスと国際貿易の理論」有沢教授還暦記念論文集(1)理論と統計一九五七、二八三～三二四頁

（7）三辺信夫「多数国多数財貿易における国際均衡分析試論」国際経済学研究シリーズ（No.30）一九五八、一～八頁　同、「多数国多数財貿易における国際均衡分析」大阪市大経済学雑誌三九巻一号、一九五八、七月、四八～八〇頁

（8）H. Makower, *Activity Analysis and the Theory of Economic Equilibrium*. 1957, London, pp.96～119.

（9）例えば McKenzie 〔2〕〔3〕及び小宮助教授は需要側の条件を無視し、Whitin, McKenzie 〔1〕は貨幣的支出性向が一定の場合を仮定し、三辺氏はそれに数量的支出性向が一定の場合を付け加えている。また MaKower はその後者の場合を仮定している。

（10）A.P. Lerner, 〔1〕"The Diagrammatical Representation of Demand Conditions in International Trade", in *Essays in Economic Analysis*, 1953, London, pp. 101～133.

（11）小島清、外国貿易〈新版〉一九五七、九三～九七頁同、交易条件、一九五六、一〇～一二頁及びその他の論文

一

一、世界生産量の決定　いうまでもなく、国際貿易理論におけるリニアー・プログラミングの貢献は多数国多数財のケースについて、各国の生産量・貿易量及び交易条件等を容易に解き

求めることが出来る点にある。以下、われわれはm個の国からなる世界において、n個の財を生産かつ貿易するモデルを取扱う。なお、この項の目的は各国の生産函数と各財の効用函数とが与えられるとき、世界全体として最適生産（＝消費）量を求めることである。

先ず、各国の生産函数を求めよう。最初に次の点を仮定する。㈠各国の生産要素は総て労仂のみである。[1] ㈡各国は不変生産費において完全に生産が代替的である。㈢トランスポート・コストの存在を無視する。さて、未知数としてi国j財の生産量を x_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ で表わす。またi国の総労仂量をC_i $(i=1,\cdots,m)$ とし、i国でj財を一単位生産するに要する労仂量をA_{ij} $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ とし、これらは既知数として与えられているものとする。なお、A_{ij} はグレアムのいう機会費用[2]の逆数にあたり、実質生産費を示すものと考えられる。さて、仮定に従って、生産函数は各国について

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,x_{ij} \leqq C_i,\quad x_{ij} \geqq 0,\quad (i=1,\cdots,m).$$

と表わされる。

ところで、この項の目的は世界全体としての生産量の決定であるから、先ず各国の生産函数を合成して、世界生産の有効フロンティア（Efficiency Frontier）を求めよう。有効フロンティアとは生産の有効点を含む超平面であり、有効点とは技術的に可能な最大生産量の座標であり、その必要充分条件は[3]、その点においては法線の勾配が正であり、各財の価格比率に等しいことである。それでこれにより、世界生産の有効点は考えられる各財の種々の価格比率においてそれぞれ生産額が最大となる様な X_{ij} $(i=1,\cdots m,\ j=1,\cdots,n)$を求め、それを各財の世界全体としての生産量

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = X_j \qquad (j=1,\cdots,n,)$$

によって表わせばよい。[4] かくて求められた世界生産の有効点の数は $\binom{m+n-1}{n}$ 個であり有効点を結んで出来る有効ファセット（facet）の数は $\binom{m+n-2}{m-1}$ 個であり、そうして、有効フロンティアは

$$\sum_{j=1}^{n} A'_{kj} X_j \geqq C'_K,\quad X_j \geqq 1 \quad (K=1,\cdots,m')$$

の条件を満す

$$\sum_{j=1}^{n} A'_{kj} X_j = C'_k \qquad (k=1,\cdots,m')$$

と示される。なお、世界生産の有効フロンティアを求めることは、貿易理論においては以前から行われているラーナーの二国二財の場合の合成法[5]をm国n財に拡張することであり、各国のn次元生産平面を原点から可能なだけ遠くへ押し出して出来るn次元凸多面体を構成することである。

次に、効用函数を求めよう。この場合、効用函数の形態について次の仮定を設ける。(一)各財の限界代替率の変化は各国とも同一であり、その結果、世界全体としての各財の効用函数が示される。(二)各財における限界効用逓減を特定の二次曲線で表わし、その結果、世界全体の総効用函数として消費無差別曲面がn次元同心球として示される。後者の仮定は、前節で述べたところのラーナーの同心円法[6]のn次元への拡張であることはいうまでもない。かくして世界全体の各財についての効用函数は

$$U_j(X_j)=X_j(2K_j-X_j) \qquad (j=1,\cdots,n)$$

となり、世界全体の総効用函数は

$$U(X_1,X_2\cdots X_n)=\sum_{j=1}^{n}X_j(2K_j-X_j)$$

と示される。[7] ここで、$K_j(j=1,\cdots,n)$はラーナーのブリスの点(The Point of "Bliss")[8]のj軸上の座標であるから、世界生産の有効点の座標のどの値よりも大きな値をとらなければならない。

以上、世界全体としての生産の有効フロンティアと効用函数とが求められたので、そこでこの様な生産に関する制限の下で世界の総効用を最大にするという目的を掲げよう。そうすると、われわれの問題はまたリニアー・プログラミングの問題となり、特に非線型の目的函数を用いている故にノンリニアー・プログラミングの問題となる。かくして、ノンリニアー・プログラミングを用いて世界全体としての最適生産(=消費)量が求められるであろう。なお、このことを幾何学的にいうと最上位の効用無差別曲面に接する有効フロンティアの接点の座標を求めることである。ノンリニアー・プログラミングによる求め方[9]については、先ず、制限条件を一つ宛用いて目的函数の条件付極大値 X^0_j $(j=1\cdots n)$ を幾組か求め、次に、そのうちクーン・タッカーの最適条件、すなわち、

(1)　$X^0_j=0$,　ならば　$\dfrac{\partial U}{\partial X_j}-\sum_{k=1}^{m'}A_{kj}Q_k\leq 0$,

及び、

(2)　$X_j^0>0$　ならば　$\frac{\partial U}{\partial X_j}-\sum_{k=1}^{m'}A_{kj}Q_k=0$

をそれぞれ満足させる様な非負の数値Q_k（$k=1,\cdots,m'$）の存在が得られるかどうかを調べ、得られるX_j^0（$j=1,\cdots,n$）の組があれば、それがこのノンリニアー・プログラミングの最適解である。なお、Q_kは明らかな様にk番目の制限条件の生産要素の帰属価格である。

二、交易条件の決定　ここで交易条件というのは世界全体としての各財の価格比率をいうのであり、それは先に求めた世界全体としての各財の最適生産量の座標の位置における効用無差別曲面の接平面の法線の方向比にあたる。すなわち、世界全体の最適生産(＝消費)点 $P(X_1^0, X_2^0, \cdots, X_n^0)$における効用無差別曲面のn次元接平面の方程式は、

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial X_j}(X_1^0, X_2^0, \cdots X_n^0)(X_j-X_j^0)=0$$

であり、その法線の方向比、従つて、各財の価格比率は

$$P_1:P_2:\cdots\cdots:P_n$$
$$=\frac{\partial U}{\partial X_1}(X_1^0, X_2^0, \cdots X_n^0):\frac{\partial U}{\partial X_2}(X_1^0, X_2^0 \cdots X_n^0):\cdots\cdots:\frac{\partial U}{\partial X_n}(X_1^0, X_2^0 \cdots X_n^0)$$

となる。なお、グレアムは有効フロンティアの稜線や有効点上に最適生産量がある場合には交易条件は limbo ratio[10]となり、その決定が不能であると論じた。しかし、われわれの場合はこの様に、最適生産量が有効フロンティアのファセット上にある場合のみならず、稜線や有効点上にある場合にも交易条件は差別なく決定される。

三、各国の生産量の決定　いままでわれわれは国別の生産を無視して世界全体としての生産を取扱つてきた。いまや、世界全体としての最適生産量が得られたので、今度は各国の最適生産量を求める問題には入ろう。この場合、いままでの結果から二組の制約条件が考えられる。

第一の制約条件は最初に示した各国の生産函数である。

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_{ij}\leqq C_i \qquad x_{ij}\geqq 0. \qquad (i=1,\cdots,m)$$

第二の制約条件については世界全体の各財の最適生産量が前

に示した様に X^0_j $(j=1,\dots,n)$ であるから、それは

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=X^0_j, \qquad (j=1,\dots,n+1)$$

と示される。

さて、世界全体としての最適生産(＝消費)量が与えられた場合、利潤の最大を求めることは生産費の最小を求めることである。従つて、各国の最適生産量は、右の二組の制限条件の下において世界全体の総生産費

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\,x_{ij}$$

を最小にする様な x_{ij} $(i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$ としてリニアー・プログラミングを用いて求められる。この最適解を x^0_{ij} $(i=1,\dots m, j=1,\dots,n)$ とする。

四、各国の貿易量の決定　いままでの論議によつて、われわれは各財の交易条件と各国の生産量との決定が得られたので、最後にこの項では各国の貿易量の決定、すなわち、各国がどの財をどれだけ輸入するかという問題を考察しよう。この場合、消費のパターンについて、グレアムと同じく各国における各財に対する価額的支出性向が一定であると仮定する。すなわち、各国における各財の価格及び所得弾力性を一と仮定する。更に、当然のこととして各財の生産量と消費量が等しく、各国の生産額と消費額とが等しくなければならない。いま i 国における j 財の価額的支出性向を α_{ij} $(i=1,\dots,m\ j=1,\dots,n)$ とすれば、α_{ij} は

$$P_i\sum_{i=1}^{m}x^0_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\Big(\sum_{j=1}^{n}P_jx^0_{ij}\Big) \qquad (j=1,\dots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=1 \qquad (i=1,\dots,m)$$

の条件に服すゆえに、半ば従属的に決定される。

さて、各国における各財の生産量は前段で決定されているから、消費量がここでさしずめ決定されなければならない。そうして i 国における j 財の消費量は仮定に従つて、

$$\frac{\alpha_{ij}}{P_j}\sum_{j=1}^{n}P_jx^0_{ij} \qquad (i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$$

と示される。かくして i 国における j 財の輸出量或いは輸入量は、その生産量と消費量との差で

$$y^0_{ij}=x^0_{ij}-\frac{\alpha_{ij}}{P_j}\sum_{j=1}^{n}P_jx^0_{ij} \qquad (i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$$

となる。y^0_{ij} が正であれば輸出量を表わし、負であれば輸入量を表わす。なお、この場合、

$$\sum_{j=1}^{n} P_j y_{ij}^0 = \sum_{j=1}^{n} P_j x_{ij}^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{j=1}^{n} P_j x_{ij}^0 = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

より、各国の貿易収支が均衡の状態にあることを念のために示しておこう。

註（1）この仮定から更に、労仂が直接生産物に変形される様に、生産過程が統合されていると仮定する必要はない。ただ中間生産物が貿易されないと仮定するだけで充分である。それは線型の生産函数の仮定から中間生産物の生産を無視して、労仂と最終生産物の結合を可能とすることが出来るからである。(L.M. McKenzie,〔1〕. *op. cit.*, p.150. Ditto〔2〕*op. cit.*, pp. 166~167)

（2）F.D. Graham,〔1〕. *op. cit.*, P.28n

（3）T.C. Koopmans, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activity", in *Activity Analysis of Prodnction and Allocation*, ed. by T.C. Koopmans P.61. 定理（4・3）その証明は同論文 pp. 61~63. にある。なお、小宮隆太郎、前掲論文、二八七~二八九頁参照。

（4）McKenzie,〔2〕*op. cit.*, p. 175.

（5）A.P. Lerner,〔2〕"The Diagrammatical Pepresentation of Cost Condition in International Trade", in *Essays in Economic Analysis*, 1953, London, pp. 85~100.

（6）A.P. Lerner,〔1〕*op. cit.*, pp. 101~133.

（7）この様な総効用函数はグレアムにはない。ホワイテンはグレアムモデルを図式化した場合、二財に対する貨幣額での支出性向が等しいと仮定して、可能な各財の価格比率を示す各線が両軸によつて切りとられる線分の中点の軌跡を世界全体の consumption line として用いた。(T.M. Whitin *op., cit.*, p.523) しかし、この consumption line は後にシューマン及びトードが証明した様にホワイテンの数学付録から得られる isovalue curve とは必ずしも一致しない。(J. Shumann and H. Todt, *op. cit.*, pp.464~469) これに対しわれわれはいわば isoutily curve を用い、しかもそれを非線型（二次函数）として用いる点が異る。

（8）A.P. Lerner,〔1〕*op. cit.*, p. 105.

（9）ノンリニアー・プログラミングについては、R. Dorfman P.A. Samuelson and R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958. N.Y. (Chapt. 8) pp. 186~203 に従つた。またクーン・タッカーの最適条件の証明については同書 pp.189~194 にある。なお、詳しくは H.W. Kuhn and A.W. Tucker, "Non-linear Programming" in *Proceedings*

of the Second Berkelly Symposium on Mathmatical Statistics and Probability ed. by J. Neyman, 1951, Berkeley, pp. 481～492.（未見）
（10）F.D. Graham,〔1〕*op. cit.*, p. 35.
（11）F.D. Graham,〔1〕*op. cti.*, pp. 33～34.

二

この節の目的は前節で示された一般的な理論に、仮りに三国が三財を生産する世界を想定して、各係数に一定の数値を当嵌め、実際に世界の生産量、交易条件、各国の生産量及び貿易量を求める計算方法を示すことである。特に出来るだけ簡便な計算方法を示そうと思う。

一、世界生産量の決定　世界生産量については、前節に従って、有効フロンティアを求め、次ぎにそれの制約の下で効用函数の極大を求めるという二段階に分けてなされる。先ず、生産函数

$$\left.\begin{aligned}&5x_{11}+3x_{12}+6x_{13}\leqq 120\\&7x_{21}+4x_{23}+4x_{23}\leqq 56\\&4x_{31}+x2_{32}+5x_{33}\leqq 20\\&X_{ij}\ (i=1,2,3,\ j=1,2,3)\leqq 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

が与えられているとき、有効フロンティアの求め方を示そう。

(1)各不等式（1.1）を方程式にして法線の方向比を求める。それ（1.1）を基本方向比として、基本方向比の二つの比を組合せて出来る限りの方向比を求める。それは ${}_3C_2\cdot{}_3P_2=18$ 組ある。

5: 3: 6*	7: 4: 4*	4: 2: 5*	………… (1.2)
5: 3: 3*	10: 6:15	7: 4: 8	
7: 4:10	2: 1: 2	3: 1: 1	
5: 6: 6	5: 3:10	7: 2: 4	………… (3.3)
35:8:20	8: 5:10	4: 5: 5	
35:20:42	10: 5:12*	35:21:20	
14: 7: 8*	20:12:25	28:16:35	

(2)（1.1）の定数項を x_{ij} の各係数で割った値、すなわち、各方程式の座標軸に対する截片の長さを求める。

$$\begin{pmatrix}24 & 40 & 20\\ 8 & 14 & 14\\ 5 & 10 & 4\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.4)$$

(4)方向比（1.2）（1.3）をそれぞれ（1.4）の各行に掛け、この積がそれぞれの行で最大となる列のところに仮りにアンダー・ラインをつける。(i)（1.2）を掛ける場合はこの積が三列とも等しくなる行は全部にアンダーラインをつける。(ii)（1.3）

を掛ける場合はこの積が二列だけ等しくなる行があり、その行は等しい二列の数値が他の列の数値より大きい場合にのみ記入し、その等しい二列にアンダー・ラインをつける。（従って多数の（1.3）の方向比を掛ける場合が棄却されるわけである）。結果的に(1.2)(1.3)のうち＊印をつけた方向比を掛ける場合が採用される。

次にアンダー・ラインをつけた数値と同じ位置の（1.4）元素を取出してそれぞれ各列について合計する。ただし、一行に二つ以上記入した元素については、その一つ宛を順番に用いて、各列について別々に合計する。この操作を 3：3：5 という方向比を掛ける例について示せば次の様になる。

$$\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24 & 40 & 20\\ 8 & 14 & 14\\ 5 & 10 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{120} & \underline{120} & 60\\ 40 & \underline{42} & \underline{42}\\ 25 & \underline{20} & 12\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 24 & 40 & \\
 & & 14 & 14\\
+) & & 10 & \\
\hline
 & (24 & 24 & 0)\\
 & (24 & 10 & 14)\\
 & (\ 0 & 64 & 0)\\
 & (\ 0 & 50 & 14)
\end{array}$$

(4)この合計値の組が有効点の座標であり、（有効ファセットの端点として出てくるから）同じものを除去すると、次のだけ求められる。有効点はこの場合 ${}_{2+2-1}C_3=10$ 組なければならない。

$$\left.\begin{array}{lll}
(37,\ 0,\ 0) & (32,\ 10,\ 0) & (24,\ 23,\ 0)\\
(\ 0,\ 64,\ 0) & (29,\ 0,\ 14) & (24,\ 10,\ 14)\\
(\ 0,\ 50,\ 14) & (\ 5,\ 0,\ 34) & (\ 0,\ 10,\ 34)\\
(\ 0,\ 0,\ 38) & &
\end{array}\right\}\cdots\cdots(1.5)$$

(5)かくして、有効フロンティアの制約条件と方程式とは＊印をつけた方向比と、それによって得られた有効点の座標のいずれか一つから求められる。（尤も、三つの有効点の座標だけからでも求められるが、操作が面倒である）。制約条件は次に示され、この場合 ${}_{3+3-2}C_{3-1}=6$ 組なければならない。（方程式は不等式を等式にするだけであるから省略する。）

$$\left.\begin{array}{r}
5X_1+3X_2+\ 6X_3\leqq 234\\
7X_1+4X_2+\ 4X_3\leqq 254\\
4X_1+2X_2+\ 5X_3\leqq 190\\
5X_1+3X_2+\ 2X_3\leqq 192\\
10X_1+5X_2+12X_3\leqq 458\\
14X_1+7X_3+\ 8X_3\leqq 518
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.6)$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3\ \geqq\ 0$$

以上の有効フロンティアが求められた。以下、総効用函数

$$U(X_1X_2X_3)=X_1(200-X_1)+X_2(100-X_2)+X_3(240-X_3) \quad \cdots\cdots(1.7)$$

はを与えて、(1.7) 制約の下で、この二次式 (1.7) を最大にするX_1、X_2、X_3を求める。すなわちノンリニアー・プログラミングの最適解を求める方法を示そう。

(6)先ず(1.6)を方程式とし、その一つ宛と(1.7)とを用いて多変函数の条件付極大を求める方法を採用する。例えば

$$5X_1+3X_2+6X_3=234$$

$$U(X_1,X_2,X_3)=X_1(200-X_1)+X_3(100-X_2)+X_2(240-X_3)$$

より、ラグランジュの乗数を用いてUを最大にするX_1、X_2、X_3を求めると、

$$X_1=18\frac{6}{7},\quad X_2=1\frac{11}{35},\quad X_3=22\frac{22}{35} \quad \cdots\cdots(1.8)$$

が得られる。これは一つの解である。以下同様に (1.6) の方程式各々と (1.7) より計六組の解

$$X_1=2\frac{56}{81},\quad X_2=-5\frac{49}{81},\quad X_3=64\frac{32}{81} \quad \cdots\cdots(1.9)$$

$$X_1=19\frac{1}{9},\quad X_2=9\frac{5}{9},\quad X_3=18\frac{8}{9} \quad \cdots\cdots(11.0)$$

$$X_1=4\frac{38}{43},\quad X_2=-7\frac{3}{43},\quad X_3=62\frac{40}{43} \quad \cdots\cdots(1.11)$$

$$X_1=17\frac{7}{269},\quad X_2=8\frac{138}{269},\quad X_3=29\frac{116}{269} \quad \cdots\cdots(1.13)$$

$$X_1=\frac{212}{309},\quad X_2=\frac{106}{309},\quad X_3=63\frac{77}{309} \quad \cdots\cdots(1.12)$$

が得られる。

(7)この六組の解のうち (1.9) (1.11) の解はその中に負の値をとる数値があるから (1.6) の非負条件によって先ず問題から棄却される。次に残っている解について、(1.6) の六つの制限条件を全部満すかどうかを調べる。例えば、(1.8) は (1.6) の第一番目第三番目第四番目及び第六番目の制限条件を満すけれども、第二番目及び第五番目の制限条件を満さない。それ故、(1.8) は可能解でない。同様にして調べると、(1.10) (1.13) も可能解ではなく (1.12) のみが可能解であることが判る。

(8)最後に、可能解 (1.12) が最適解であるかどうかを調べる。前節で示したクーン・タッカーの条件を満すかどうかを検定するのである。この場合、(1.12) に零の値をとる X_1、X_2、X_3がない（制限条件の数が未知数の数より多い場合である）か

ら、クーン・タッカーの条件の(2)の場合が適用される。ところで、クーン・タッカーの条件でQ_kはK番目の制限条件の生産要素の帰属価格であるから、その生産要素を全部用いない場合、すなわち不等式を最大限に（等式となる様に）満さない場合は、帰属価格Q_kは当然零である。この場合、(1.12)は(1.6)の第五番目の不等式以外の不等式についてはそれらを最大限度満さないから

$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q_6=0$$

となり、Q_5のみ値をとる。これだけを前提としていよいよ(1.12)をクーン・タッカーの条件に当嵌めると、

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}-10Q_5=\left(200-2\times7\frac{7}{269}\right)-10Q_5=0$$

$$\therefore\ Q_5=16\frac{160}{269}$$

となり、Q_5は非負の数値をとり、クーン・タッカーの条件を満すことが判明する。かくして、このノンリニアー・プログラミングの最適解X_1^0、X_2^0、X_3^0は

$$\left(17\frac{7}{269},\quad 8\frac{138}{269},\quad 20\frac{116}{269}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1.12)$$

である。

二、交易条件の決定　総効用函数(1.7)に対する、先に求めた最適解(1.12)の座標における接平面の方程式は

$$82\frac{262}{269}\left(X_1-17\frac{7}{269}\right)+41\frac{131}{269}\left(X_2-8\frac{138}{269}\right)+99\frac{153}{269}\left(X_3-20\frac{116}{269}\right)=0$$

$$\therefore\ 10X_1+5X_2+12X_3=43\frac{98}{269}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

と求められる。従って、その法線の方向比、すなわち交易条件は

$$10:5:12\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

である。

三、各国の生産量の決定　それは各国の生産函数(1.1)と

$$\left.\begin{aligned}x_{11}+x_{21}+x_{31}&=17\\x_{12}+x_{22}+x_{32}&=8.5\\x_{13}+x_{23}+x_{33}&=20.4\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

の二組の制約下において、目的函数

$$\begin{aligned}z=&5x_{11}+3x_{12}+6x_{13}+7x_{21}+4x_{22}+4x_{12}\\&+3x_{31}+2x_{32}+5x_{33}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3.2)\end{aligned}$$

を最小にするX_{ij} ($i=1,\cdots,3$ $j=1,\cdots 3$)の値を求めるリニアー・プログラミングの解き方である。（この場合、世界の最適

生産量は小数に直し、小数点二位以下は四捨五入してある。）

(1)先ず（1.1）について少し技巧を施す。すなわち各不等式の A_{ij} $(i=1,\cdots,3\ j=1,\cdots,3)$ のうち最小のもので $C_i(i=1,\cdots,3)$を除し、その商を右辺に示し、かつ、スラック変数を導入して不等式を等式に直すと、（1.1）は

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 40 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 14 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 10 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

と変更される。そうして（3.1）にも

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=18.1$$

が追加される。

(2)かくして二組の制約条件は（3.1）と（3.3）となつたが、それはリニアー・プログラミングの Transportation Problem の形式に適つていることが判明する。そうして、Transportation Problem の形式の問題については、シンプレックス法にしても双対法にしても普通簡便法が用いられている。(1) この問題にシンプレックス法の簡便法を採用するとすれば、ハウタッカーのルールは比較優位の財と思われるものから数値を当嵌めていくこととなり、グレアムの (2) mock up と原理的に同じくすることが注目される。なお、解において正の数値をとる x_{ij} $(i=1,\cdots,3\ j=1,\cdots,3)$ はこれは退化の場合でないからスラック変数も含めて六個で他は零である。さて、最適解 $\overset{0}{x}_{ij}$ $(i=1,\cdots,3\ j=,1\cdots3)$ は

$$\begin{bmatrix} 7 & 8.5 & 6.4 \\ 0 & 0 & 14 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

と求められる。（スラック変数は除去して示す。）

四、各国の貿易量の決定　これを求めるために今迄の結果のほか新たに i 国における j 財の価額的支出性向 $\alpha_{ij}(i=1,\cdots,3\ j=1,\cdots,3)$ が

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.46 & 0.07 & 0.47 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

の様に、前節で示した条件に従つて与えられる。

(1)先ず各国における各財の消費額については、（3.4）と（3.2）より $\sum_{j=1}^{3} P_j x^0_{ij}$ $(i=1,\cdots3)$ の対角行列を作り、それと（4.1）との積として求められる。

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.46 & 0.07 & 0.47 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 189.3 & 0 & 0 \\ 0 & 168 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 56.79 & 18.39 & 113.58 \\ 67.2 & 16.8 & 84 \\ 46 & 7 & 47 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

(2)（4.2）を（2.2）の P_j $(j=1,\cdots,3)$ で除して各国における各財の消費量に直し、（3.4）より差引けば y^0_{ij} $(i=1,\cdots,3$ $j=1,\cdots,3)$ は

$$\begin{bmatrix} 7 & 8.5 & 6.4 \\ 0 & 0 & 14 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 56.79 & 18.39 & 113.58 \\ 67.2 & 16.8 & 84 \\ 46 & 7 & 47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.32 & 4.70 & -3.06 \\ -6.72 & -3.36 & 7.00 \\ 5.40 & -1.40 & -3.92 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

と求められる。（この場合小数点二位以下は四捨五入してある。）

註（1）R. Dorfman, P.A. Samuelson, and R. Solow, *op. cit.*, pp. 117～121 参照。同じく比較生産費説を Transportation Problem の形式で解いている。

（2）F.D. Graham,〔1〕*op. cit.*, pp. 93～94.

付記、本稿作成にあたり、草稿を中川庸太郎教授、新開陽一氏ならびに神保一郎氏に見ていただきいろいろと間違ったところを指摘していただいた。ここに記して謹みて御礼申し上げる。