ヒックスの物価指数理論（その二）

高木秀玄

一

既に本誌第六巻第五号において[1]、われわれは消費者余剰の理論を基礎に置いて、ヒックスの物価指数理論、勿論そこでは消費者物価指数の理論を展開した。その際、彼を「消費者行動の分析と指数理論とを結合する」ものとして、スルーツキイ・ジョンソン・アレン・シュルツ・ホテリング・サミユエルソンの系列にあるものとし、上の如く消費者行動の理論を基礎とする意味で、アレン・ステーレー・フリッシュ・ワルト・コニュースと共通の立場にあるものとしたのである。

本稿では彼、ヒックスの『価値と資本』の第三章を中心とする『需要理論の改訂』（A Revision of Demand Theory, Oxford at the Clarendon Press, pp Vii＋196）に新しく展開された指数理論と、それへ対するR・L・マリスのヒックス批判を取扱う[2]。いわば、上述の拙稿『ヒックスの物価指数理論』をより精密化させるために執筆されたものである。

二

ヒックスは彼の新しい『需要理論の改訂』—以下『改訂』とする—の第十九章に「指数定理」(The Index-Number Theorem) において、前章で展開した基本方程式の実際の適用可能性を立証する定理を提唱する。なお、彼はある期間を通じて消費者の趣味、嗜好あるいは欲求が変化しなかつた場合をテストする場合を問題とする。しかし、マリスによれ、以下のヒックス理論は一応、価値はあるが全面的に賛意を表し得ないものであるが、彼の『価値と資本』、ここでの『改訂』に展開された輝しい需要理論を否定するものではないという。(4)

ヒックスによれば、同じ資料の適用されたラスパイレス式とパーシェ式との間の差は次のとおりである。

$$L-P=I+S$$

$$=\left\{\frac{\sum P_{i_0}d_yQ_i}{\sum P_{i_0}Q_{i0}}-\frac{\sum P_{i_1}d_yQ_i}{\sum P_{i_1}Q_{i_0}}\right\}+\left\{\frac{\sum P_{i_0}d_iQ_i}{\sum P_{i_0}Q_{i_0}}-\frac{\sum P_{i_1}d_sQ_i}{\sum P_{i_1}Q_{i_0}}\right\}$$

この式で d_yQ_i は所得効果だけの結果における市場における i 番目の商品の消費の基準時点(0)と比較時点(1)との間にみられる数量の変化分を示し、d_sQ_i は代替効果だけによる対応的な変化分を示すものである。いま、便宜上、消費者の嗜好は確定不変的である。すなわち、d_s と d_y とはある特定の商品、ここでは i 番目の商品の消費の総変化を皆無たらしめるものと想定する。ヒックスは、この式よりその第一のカッコ間の（$\Sigma P_{io}d_yQ_i/\Sigma P_{io}Q_{io}$ $-\Sigma P_{i1}d_yQ_i/\Sigma P_{i1}Q_{io}$）＝$I$ は、所得の弾力性すなわち、財Xに対する需要の所得弾力性 η_x は、所得の比例的増加に対するそれに基くXの消費の比例的増加の比率であり、もし価格が（p）から（$p-dp$）に変化すれば、総所得は（$p\cdot q$）であり、費用較差は（$dp\cdot q$）であり、従つて所得効果を惹き起す所得の比例的変化は（$dp\cdot q/p\cdot q$）、財Xの消費の比例的変化は η_x（$dp\cdot q$）（$p\cdot q$）であり、財Xのみに対する所得効果は $\eta_x q_x$（$dp\cdot q$）/（$p\cdot q$）となりこれに

dp_x（財Xの価格変化）を乗じ、それをあらゆる市場財についてアグレゲートすると次のような総所得効果式をうる。

$$I=\frac{(dp\cdot q)(dp\cdot \eta q)}{(p\cdot q)}$$

もし、価格のすべてが同一の方向に変化しているときは（$dp\cdot \eta q$）＝$\bar{\eta}$（$dp\cdot p$）と述べうるが、ここで$\bar{\eta}$は、その諸財の所得弾力性の加重平均であり、このような所得弾力性の相対的な大きさが、観察期間のある部分でたまたま生ずる相対価格の変化と相関関係でとらえられ、もし、それがある程度の大きさであるときのみ上述Iは意味をもつという。すなわち「Sは二つの無差別点間の運動を表わしており、したがつて正になる傾向を持つ。したがつて指数定理は、所得効果Iが正であるかぎりもしくは負であつても代替効果を圧倒するほど大きくないかぎり無差別でない点の間においても成立し続ける」のである。[5] さて、このような商品の種類の多くが考察されるならば上の相関関係は小さくなる。けだし価格変化と所得弾力性とはその性質上、別々のものではないからである。

基本的定理の第二のカッコ、すなわちヒックスのSの考察にうつる。通常、これは代数的符号ではプラスであり、その大きさは可成りのものである。その理由は相対価格の変化によつて惹き起される代替効果は必然的にこのような価格変化と相関づけられるからである。故に、L式は必ずP式を上廻るべきである。もし、かりに$P>L$であれば、当面の調査対象である消費者グループの需要の底にある嗜好が変化したと考えねばならない。そこで、ヒックスによると「われわれの現在の研究を完了するに先立つて、その適用に関して一言しておくことが必要である。指数定理は、疑いもなく、現実の数字に適用しうるテストを与えている。しかしそれを適用する際には、われわれはその意味を明確にしておかなければならない。それは選好仮説のテストなのであつて、それ以上でもなければ

ばそれ以下でもないのである。もし、さし当つて例外を除去するならば、われわれは次のように言うことができる。すなわち、もし消費者の集団が、時の経過を通じて、理論上の消費者の集団が行動すると予期されるのとほぼ同様に行動していれば、彼らは $L \gg P$ を示さなければならない。何故ならこの不等式は、変化しつつある環境に対して不変の欲望が示す反応の持つ当然の性質に他ならないからである。もし、P が L を超過するならばその超過は統計学的に有意なだけの大きさを持たなければならないが、そのときには欲望が変化したと推定される。したがつて不変の欲望体系に照らして二つの点の間の比較をおこなうことは不可能となるのである」という。(6) このようにしてテストされる「選好仮説」は二重的なものである。すなわち、心理学的な選好体系が存在することが仮説とされるのみならず、この体系のパラメターが、適当な期間を通じて固定的であるという二重的性格を有するのである。

マリスのとるのは上の第二の仮説のテストであつて、一応第一の仮説は肯定される。L 式が P 式を上廻ることが観察されるとき、逆にいうと、消費者は観察期間を通じてその嗜好に大きな変化がなく、合理的に消費行動をとつているとは明白に主張しないことが推察される。しかるに、嗜好は、それが事実上大きく変化した場合でも、L 式は多くの場合に P 式に対して正常的な関係—$L>P$—を続ける、又は別の表現を以ってすると、嗜好の変化が特殊の形態をとるときのみ、P 式が L 式を超過することが示されるとき、嗜好は変化するのである。すなわち、ヒックスの前提である消費者の嗜好の確定不変が必ずしもマリスでは必要にして不可欠条件ではない。マリスによれば「単にこの場合のみでなく P 式が事実上 L 式を超過して観察されるのは、嗜好の変化が現象の原因であるという仮定が存在することも事実であることを示すのに努力しよう」という。

以下はマリスの上の立場の説明である。そのため、彼のとつた記号を示しておく。

$\overline{P}_0$……ラ式物価指数

$\overline{P}_1$……パ式物価指数

Q_0……ラ式数量指数

Q_1……パ式数量指数

これより

$$q_i=\frac{Q_{i_1}}{Q_{i_0}}-\overline{Q}$$

$$p_i=\frac{P_{i_1}}{P_{i_0}}-\overline{P}$$

$$W_i=P_{i_0}\,Q_{i_0}$$

故に

$$\sum W_i p_i=0$$

ここでQ_{i0}は期間0でのi番目の商品の数量である。以下の分析ではp_{i1}とp_{i0}とは供給価格であり、あるp_iにふくまれる変化の全体は生産費の変動によつて惹き起されるものと想定されるべきである。

これより次のように示される。

$$P_0-\overline{P}_1=\frac{-1}{\overline{Q}_0}\cdot\frac{1}{\sum W_i}\cdot\sum W_i p_i q_i$$

$$=\frac{-1}{\overline{Q}_0}\cdot COV_{pq}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第1式の COVは添字pとqで示される変数の組合のWが加重した共分散を示す。すなわちpとqとの共分散は

$$E[(p-\mu_p)(q-\mu_q)]=E(pq-p\mu_q-q\mu_p+\mu_p\mu_q)$$
$$=E(pq)-\mu_p\mu_q$$
$$=\rho\sigma_p\ \sigma_q \qquad (8)$$

さらに COV_{pq} の構成項を分析することが可能である。ここで、マリスはヒックスの「代替効果」と「所得効果」に追加して「嗜好変化効果」、すなわち、嗜好が実際に変化したかどうかという問題をとりあつかう。ここである特定の商品の消費量の総変化の分割に、残差項を導入する。この残差項は所得と価格を一定不変として観察される消費の変動量をあらわすものと考える。

次の第2式によつて、上述の分割が示される。

$$q_i=S_i+y_i+t_i+(1-\overline{Q}_0) \quad \cdots\cdots (2)$$

S_i y_i …は「平均代替効果」又は所得効果よりの偏差としてではなく $S_i=d_sQ_i/Q_{i0}$ よりの偏差でとらえられたものである。t_i についても同じである。(9)

p_i で第2式を乗じ、総和を求める。この際 $\Sigma Wp_i=0$ であることを忘れてはならない。しかるとき

$$Cov_{pq}=COV_{ps}+COV_{py}+COV_{pt} \quad \cdots\cdots (3.1)$$
$$=VaR_q(\beta_{sp}+\beta_{yp}+\beta_{ip}) \quad \cdots\cdots (3.2)$$
$$=SD_p(r_{sp}\cdot SD_s+r_{yp}\cdot SD_y+r_{tp}\cdot SD_t) \quad \cdots\cdots (3.3)$$

第(3.1)式はCOV_{pq}を代替効果、所得効果および嗜好変化効果上の価格比のそれぞれの共分散の総和として示すものである。第(3.2)式は、これが価格変化の総分散度と順々に上つた代替効果・所得効果および嗜好変化効果と価格比の単純相関分析より求められた三の統計的回帰係数の総和の積となることを示す。これより、もし代替効果が一般にいつて小であれば、第(3.2)式のβ_{sp}は小となる。第(3.3)式は所与の命題を対応するゼロ次の相関係数と標準偏差の形式へ転換する。なお、SDは変数のW加重標準偏差であり、すなわちそのW加重分散度の平方根を示すものである。第(3.3)式は三式のうちで最も明白である。

つぎにマリスは記号に若干の手を加える。すなわち、彼によると「ちよつとみると複雑であるが、実際は簡単なもの」である。[10] すなわち　つぎのとおりである。

$$v_p=\frac{SD_p}{\bar{P}_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$ 価格比の相対的標準偏差

$$v_p^2=\frac{VAR_p}{\bar{P}_0^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$ 価格比の相対的分散度。すなわち相対的標準偏差の平方であり相対的偏数の測度

なお、v_yとv_tを次のように規定する。

$$v_y=\frac{SD_y}{\bar{Q}_0}\quad\text{および}\quad v_t=\frac{SD_t}{\bar{Q}_0}$$

最後に e_s e_y および e_t を次のように規定する。

$$e_s=\beta_{sp}\cdot\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0},\quad e_y=\beta_{yp}\cdot\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0},\quad e_t=\beta_{tp}\cdot\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}$$

この最後の記号は、逆弾力性の形式へ転換された回帰係数をあらわすものであることが推察されうる。すなわちe_sはその代替効果が代表的な大きさである商品の、商品一般の逆代替弾力性であり、それ自体の価格比に適用されるときβ_{sp}によつて精確に予測されるものである。すなわち、e_sは次のように規定されることより上のようになる。

$$e_s=\left(\frac{Q_{js}}{\sum P_0Q_1}-\frac{Q_{j0}}{\sum P_0Q_0}\right)\cdot\frac{\sum P_0Q_0}{Q_{j0}}\div\left(\frac{P_{j1}}{\sum P_1Q_0}-\frac{Q_{j0}}{\sum P_0Q_0}\right)\cdot\frac{\sum P_0Q_0}{\sum P_{j0}}$$

この式で商品iは、その代替効果がβ_{sp}によつて精確に予測される商品であり、$Q_{js}=Q_{j0}+d_sQ_j$であり、d_sQ_jは$s_i+(1-\bar{Q}_0)=\beta_{sp\cdot pi}$である商品である。すなわち$e_s$は$j$商品の価格の一般価格へ対する（$Q_0$をウエートとする加重平均）比率の対応的な比例的な変化分で割つた、代替効果に帰せしめられるi商品の商品一般の、P_0をウエートとする加重平均消費量へ対する比例的変動である。

勿論、e_yとe_tとはこの段階ではまだ明白な経済的意味づけは不可能である。たとえばe_yは所得効果と価格変化とが相関関係でとらえられるときその相関係数が逆弾力性としてあらわされることを意味するにすぎないのである。もし、函数$f(x)$がx_0とx_1との間のあらゆるxについて不変的な弾力性をもつとき、その弾力性の精確な公式は

$$E=-e=\frac{\log f_1-\log f_0}{\log x_1-\log x_0}$$

この式で $fx_0=f_0, fx_1=f_1$ である。もし $f(x)$ が任意の函数であるとき、この式は逆弾力性を示す。[11]

上述の新しい記号を使つてマリスは第(3)式を第(2)式へ代入し次の二式をうる。

$$\frac{\bar{P}_1-\bar{P}_0}{\bar{P}_0}=v_p^2(e_s+e_y+e_l) \quad \cdots\cdots\cdots (4.1)$$

$$\frac{\bar{P}_1-\bar{P}_0}{\bar{P}_0}=v_p(r_{sp}+v_s+r_{yp}\cdot v_y+r_{lp}\cdot v_l) \quad \cdots\cdots\cdots (4.2)$$

いわゆる指数の限界理論の中心問題である L 式指数と P 式指数との間のギャップ[12]は相対的形式で表現される。すなわち価格変化の一般的なスケールでの絶対的な大きさでの増加する傾向を除去するために $\bar{P}_0$ そのもので全体が割られるのである。ラ式とパ式の両方の計算に必要な情報が適用可能である限り、V_p と V_p^2 が直接に計算される。しかるに、他の記号であらわされる大きさは、そのような直接の計算は不可能である。

三

既述のヒックスの定理式へ、数量指数よりも、物価指数に関係しているという事実についての必要は調整をしながらマリスは上式を適用する。S であらわされるヒックスの集計的な代替項は(4.1)式の e_s で示され、さらにその項が大である事実を示すために v^2 で乗ぜられる。なお、それが絶対値ではなく、相対的概念であるから P_0 で乗ぜられる。このことは、所得効果 I についても同様である。しかるに、I と S とで分析は全部終らない。ヒック

スではみられなかつた集計的な嗜好変化効果が残つている。マリスはこれをTであらわす。しかるとき、ヒックスのSおよびIさらにマリスのTに対して次のような対応がみられる。上式を再化して次の対応をうる。

（(4.1) 又は (4.2) 式より）

ヒックスの S（符号は逆）　$e_S(v_p^2)\bar{P}_0$　$r_{sp}\ v_s\ v_p\ \bar{P}_0$

ヒックスの I　$e_y(v_p^2)\bar{P}_0$　$r_{yp}\ v_y\ v_i\ \bar{P}_0$

マリスの　T　$e_i(v_p^2)$　$r_{ip}\ v_i\ v_p\ \bar{P}_0$

ここで

$$\bar{P}_1-\bar{P}_0=S+I+T$$

ヒックスの理論は、マリスによつて次のように統計的用語で述べられる。すなわち「需要の一般法則よりすると、r_{sp} は有意的な大きさをとり、かつ負でなければならない。しかし、もし充分に多数の商品が考察され、しかも、価格変化と所得の弾力性がその間に相当の幅で拡がるときは、r_{yp} は小さくなる傾向をもち、これより項Iもまた小さくなるようになる。より精確にいうと、$y's$ と $p's$ とは独立的であると想定され、r_{yp} の母集団の値はゼロとなるように仮定される。収束確率の法則より[13]、考案される商品の標本の有効的な大きさが大であればあるほど v_{yp} の標本値はゼロの母集団に近迫するであろう。[14]」しかるに、この議論は結果としてそれがTを述べることを欠くが故に不完全なものである。嗜好の変化が、ある何等から理由で、又は偶然によつて商品ごとに価格の変化と相関関係でとらえられるならば、その結果だけに影響する。しかるに、定義によつて嗜好の変化は価格の変化と無関係であるとする。なお、ヒックスもマリスも供給価格の変化は数量の変化と相関関係をもたない。すなわち、結果的には供給の弾力性は無限であるということを暗々裡に想定しているのである。ここでマリスは供給価格の変化が自

主的であり、統計的には体系間で独立変数であること、さらにその仮説が除去されるとき、ふくまれる重要な条件の考察の必要性を主張する。(15)

次の考察は、供給の弾力性は無限、有効な標本の大きさが非常に小さい故に、分析の基礎的な手がかりとしての収束確率の法則が適用されない場合である。ヒックスは「低開発」国の場合として—すなわち工業化に努める場合—製造工業製品の実質生産費の切下げ、当然に食料供給の増加という点で不成功な場合を挙げ、財の大分類間の相対価格の変化の効果を分析する。(16) この場合、統計学的にはグループ間の分散度、グループ間の分散度の算出によって分析を進める。もし後者が強ければ、偶然によって生ずる v_{yp} の有意的な大きさの尤度はより大となる。ジョンソンによると、所得の弾力性が個々の消費者間およびそのグループ間においての分散度が小さいときのみ、この事実が成立するという。(17) しかも、ヒックスによると、この価値は正又は負である。たとえ、嗜好の変化がないときでも、正の I は負の S を超過することがありうる。特に S が小となる可能性があるからであり、その有意性がより低くなるという事実によるものであり、もし嗜好が変化したならば、偶然によって r_{pt} がより有意的に正又は負の大きさをとるのは、このような事情のもとにおいてである。もし、標本が r_{yp} がゼロへ収束することを阻止するに足るだけに充分に小であれば、同じことは r_{pt} についてもあてはまる。L 式指数と P 式指数が、それぞれ正常な事態にあるならば、嗜好は一定不変であると想定され得ない場合のみではなく P 式指数が相当の幅で L 式指数を超過しそうな事態のもとで、しかも上のような正常な関係とが成立すると観察されるときは、さらに豊富な情報なくしては、その現象が正の I によるものか、正の T によるものか、それとも、二つの組合せによるものかを語ることは不可能である。別言すれば、消費者の嗜好は不変化したか、それともこのような不変化が生じなか

つたのであるか、そのいずれをも断定出来ないのである。故に「原則的に、L 式指数より大なる P 式指数の観察は、嗜好が不変的であるときよりも、それが変化しているときに、より不可能である。P 式指数が L 式指数を超過するとき、あるいは L 式指数が P 式指数を超過するときに、嗜好が変化したという前提は存在しないし、又これ以上にこれらの場合のいずれにおいても、嗜好が変化しなかつたという、いかなる前提も存在しない」のである。[18]

たとえば、計量経済学的操作により、I の大きさを計測することが出来れば、それは唯一の可能性である。けだし、ヒックスによれば「厳密に言えば需要法則は混血児である。すなわち、この法則は一方の脚を理論におくと供に他の一方の脚を観察においている」のである。[19] しかるに収束確率の法則の適否の判断にはヒックス的な理論では不充分である。一つの例外は次のとおりである。すなわち、価格の変動が S は小さくはないが、I が小さくなると期待するに足るだけ標本の大きさを拡大しうる、しかるに嗜好の変化は極めて僅の重要な商品に集中され、v_t が有意的であつても、作用される商品が僅である。故に v_t が偏差の大なる僅のものより構成されると仮定せよ。このような嗜好の若干の大きな増加あるいは減少に対する相殺的な変化は、一般に各商品に撒布する。すなわち、その相対価格が両方向に移動したグループの上に拡散すると想定せよ。この場合は、たまたま若干の差のある嗜好の変動が、ある特定の方向の物価変動と一致する場合である。この場合に T は有意的となり、総てに一様に撒布する。

なお、その代数的符号は正負のいずれも可能であるし、L 式指数と P 式指数との比較において、T が正の符号をとり、しかも、その絶対値が大であればあるほど、後者は前者をより大きく超過するのである。もし、S が負であり、絶対値が大であれば P 式指数は L 式指数を上廻るのである。

「嗜好は変化している。しかも常に変化している。その事実はこれを生活の現実として認められるべきである」こと、これがマリスの理論展開の基礎である。われわれはマリスに従つて、ヒックスのマーシャル・レクチュアの一節を引用する。すなわち、「私がここで述べたことは、私が効用理論について語らんとする主たる事柄である。すなわち、私の見解によると、これまで私を悩ましてきた混乱状態より、そのもつれを解きほぐす長い道をあゆむのである。社会的生産物における変化の真の尺度は価格線よりも、むしろ、無差別曲線に従つてとるべきであるということの主張において、私はあらゆる測定の実際上の可能性を超える「尺度」を設定しているのではない。統計的方法によつて概念的に近似化されうる何ものかが残つているのである。加重の理想的な体系は限界効用に対応する価格によるものではなく、その供給が二点間に拡がつて変化した商品の平均評価に対応するような修正された価格によるものである。すなわち、無差別曲線に沿う測定は消費者余剰を考慮に入れるが、価格線に沿う測定はこれを考慮に入れないのである。しかし、消費者余剰の包括は、生産物から効用もしくは厚生へと測られたものの変動の効果を有しないのである。すなわち、われわれが得るすべては、社会的生産物の変動の、よりよき尺度である。このよりよき尺度が統計的に推定されうるかどうかは、われわれの努力の到着点として、それを設定することが希ましい。けだし、われわれは理論そのものを内部的に無矛盾的たらしめるために、そうしなければならないのである…。[20]」と。すなわち、ヒックスは物価指数より転じて数量指数を理論展開の手懸りとしているのである。

個々の場合に有効に適用される二つの交替的な「真の尺度」がある。すなわち、ヒックスによるとAとBとが無差別であればそれぞれの状態での p と q とを結合したものの間に成立する二つの不等式[21]—二つの無差別性テスト—を持ち、B点から観察されたA点の状態、もしくは、その逆の状態が考えられる。時間的には、期間0より期間

1をながめる場合と、期間1より期間0をながめる場合とによる真の尺度の存在を指摘する。もし、嗜好が不変的であるときは、これらの二つはヒックスの用語では、それぞれ所得の「補整的変差」であり、「Xの価格が新たな値に変化し、かつ、消費者の所得が、所得がそのままであれば価格下落によつて消費者が得たはずの実質所得上の利得を相殺するところまで減少するときに、消費者によつて選ばれるはずの点である。所得はこのとき補整的変差だけ減少する」と言われる点であり、[22]「価格の与えられた変化を相殺するような所得の変化」である。[23]これに対して「等価的変差」とは、「実質所得に対して価格下落と等価の効果を与えるもの」であり、[24]「価格の変化によつて誘致されると同じ効用の変化を誘致するような、当初の価格状態で生ずる所得の変化である。[25]」これは生じた価格と所得の変化の結果として一の無差別曲面より他の無差別曲面へと推移するとき、旧曲面の形態と新曲面の形態を考察して必要とされる「補整」の大きさを決定しうるのであるが、マリスによればその結果は総体的に「等所得弾力選好体系」(iso-income-elastic-preference system) に位置する以外は同一となる必要はない。[26]これを明らかにするため次の二つの項が考えられる。

R_0 ＝ それに基ずいて計算が行われる無差別曲面の適当な形態は、消費者が実際に期間0においてその上に位置する曲面の形態であるという仮定に基ずいて計算された「真の」（無別に規定される）指数

R_1 ＝ 「期間0に実際に位置する」こと以外、「期間1に実際に位置する」とすれば上と全く同じもの

なお、無差別等高線についての数学的形態に関する仮定によつて、[27]集計的な代替効果 S の大きさの間に次の関係が規定される。[28]

$$R_0=\bar{P}_0+\frac{1}{2}S \quad \cdots\cdots (6.1)$$

$$R_1=\bar{P}_0+I+T+\frac{1}{2}S \quad \cdots\cdots (6.2)$$

この第(6)式は既述の第(5)式と結合され、収束確率の法則が適用されるときだけを考察するならば、すなわち、供給価格の変化が自主的であると想定するならば r_{py} と r_{pt} とはゼロに近迫し、故に I と T とを無視しうると想定することが可能である。もし、そうであれば次の第(7)式が成立する。

$$R_0=R_1=\frac{\bar{P}_1+\bar{P}_0}{2} \quad \cdots\cdots (7.1)$$

この式の語ることとは、上述の代替的な真の指数―ここで「真の指数」というのは、コニユス的な意味のものをいうのではない―の両者に等しく、P 式指数と L 式指数の単純算術平均によつて近似的に規定されるということである。

収束確率の法則が適用されない場合、すなわち、分散度の分析がグループ相互の分散度が V_g^2 の総体の大きさにまさることを示す場式を考察すること、これがマリスの第二の課題である。このような場合の重要な特徴は、広い商品グループ内でのある部分集合の他の部分集合へ対する代替は余り大ではないということである。けだし、グループ内の価格変化の分散度が小さいからである。かかる代替行動は、たとえば食糧品の相対価格が上昇したので衣料品が食糧品に代替するようにグループ間の代替の形態がとられることになる。しかるに、このような代替効果はその性質上、小さくあるいは無視してもよい。すなわち e_{sp} は無視してもよいようになり、これより S は無視し

てもよいようになる。もしそうであれば、指数の「問題」は起らない。すなわち

$$R_0 = \bar{P}_0 \text{ および } R_1 = \bar{P}_1$$

次に収束確率の法則が妥当しなくても、現実に自主的な供給―価格―変化の仮定を持続しえない場合を考察しよう。この場合は最も重要な場合である。自主的な供給―価格―変化の想定の除去は、結果的には「あらゆる商品が無限の弾力性の供給―すくなくとも、分析期間を通じて―の仮定的状態から、各商品が符号で正もしくは負でありうる、ある有限的な供給の弾力性を有する状態へと推移することになる」[29]。故に供格―価格変化の数量変化への従属性を述べる供給方程式の組を、その体系へ挿入する必要がある。一般に物価に対する相対的な個々の商品の供給価格の変化は、一般に生産へ対する相対的な商品の生産の変化に線型的に依存すると仮定することによつて、この挿入が行われる。経験的には需要と生産の最も急速な拡張をなすものは補助的産業であり、その技術的進歩は最もトレンドの勾配が大である。すなわち、マーシャルの長期の外的経済の効果である。「これらの場合は弾力性は負となり、第一次的生産物の関連においては正となる」のである。

i 番の商品の価格と数量の変化の両方を決定する簡単な式を設定する。

$$p_i = \alpha_i q_i \quad \text{（供給方程式）} \cdots\cdots\cdots\cdots (8.1)$$

$$s_i = \beta_i p_i \quad \text{（代替方程式）} \cdots\cdots\cdots\cdots (8.2)$$

上式で α と β とは所与のパラメターであり、α は供給条件に従つて正でもあり、負でもありうるが、β は通常、負の符号をとる。なお、あらゆる供給―価格変化の全体は内在的なものと仮定される。この仮定をとりはずし、上の第

(8.1)式の追加的な自主的な解離項が挿入されると、その結果としての代数的表現は、より複雑となるが、その意味する内容はより豊になる。

第(8.1)、(8.2)式を既述の第(2)式と結合し、簡単化すると

$$q_i=\frac{1}{1-\beta_i\alpha_i}(y_i+t_i)\cdots\cdots\cdots\cdots(9.1)$$

$$p_i=\frac{\alpha_i}{1-\beta_i\alpha_i}(y_i+t_i)\cdots\cdots\cdots\cdots(9.2)$$

このモデルにおいて、β_i と α_i とが与えられるときは、y_i と t_i とは p_i と q_i の外在的決定項とみなされうる。すなわち、消費者の嗜好にも、その実質所得にも何等の変化がなければ、あるいは、マリスによれば、もし商品がゼロの所得弾力性を有するときは、q_i はゼロとなり、同じことは p_i についてもいいうる。すなわち、i 番目の商品の消費は平均($\bar{Q}_0$)以上には増加しない。α と β とは既述の第4.1式の $e's$ の場合と同様に逆弾力性の形式へ転ぜしめられる。[31] かくして

$$e_{z_i}=\frac{1}{\alpha_i}-\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}\cdots\cdots$$

e_{zi} は i 番目の商品の相対的な供給の逆弾力性である。すなわち相対的供給価格の比例的変化のそれと関連ある相対的生産高の比例的変化の比の逆数である。

$$e_{s_i}=\beta_i\cdot\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}\cdots\cdots$$

i 番目の商品の(商品一般に対して)代替の逆弾力性であり、この記号の代表的な値は第(4.1)の e_s で与えられる。

かくして φ_i で示される複合的パラメターは

$$\varphi_i=\frac{1}{e_{zi}-e_{si}}\quad\cdots\cdots$$

供給の弾力性の代替の弾力の超過分の逆数である。

i の全体にわたる φ の加重平均を示そうとするときは、添字をつけず次の記号で述べる。すなわち

$$\varphi=\sum W\varphi_i/\sum W_i$$

四

以下において、φ を使用してその主たる特徴を要約しよう。

(i) 供給の弾力性が一般に正負いずれにしても大であれば、φは正負いずれにしても小となるであろう。

(ii) もし、供給の弾力性が一般にいずれの符号をとるにせよ、e_{si} は一般に負であるから小であるならば、φは正であり、かつ大となるであろう。

(iii) ある経済内に増加供給価格と減少供給価格の適当な混合状態がみられるときは（すなわち、正と負の e_{zi} の存在）、φ は勿論、正と負の φ のバランスの純然たる結果を示す、いずれかの符号をとるべきである。もし前者が φをゼロとするか、あるいはすくなくとも無視しうるように完全に後者を相殺できるならば、負の e_{si} の非対称的な影響のために負の供給の弾力性がすぐれる場合の存在が必要となる。

(iv) 以上のようにして、φが確率的もしくはある他の根拠に立つて正負、ゼロ又は小となる何等の先験的な期待理由も存在しない。

マリスはこれだけの結論を修正する。すなわち、もし φ_i と y_i、φ_i と t_i との間に相関関係があり、しかも嗜好の変化がゼロとなるような条件がととのえられるならば、次のようになる。[32]

$$I=\bar{P}_0 v_p v_t r_{py} \qquad I=\bar{P}_0 v_y^2 \varphi \text{ となり}$$

$$T=\bar{P}_0 v_p v_t r_{pt} \qquad T=\bar{P}_0 v_t^2 \varphi \text{ となる}$$

ここにヒックス理論の重要な修正が、むしろ破壊が存在するのである。たとえば、先進工業国での最終消費財へ適用された指数では、φ は $-\frac{1}{2}$ の階となることが推定される。同様に前資本主義的生産組織では $+1$ というような高い数値となる。これより、価格の変化が e_s と S とが有意的な大きさとなるほど、商品間の分布が大となる場合においても、I と T とは有意的な大きさとなるという結果へ達する。[33] すなわち、もし I、T および S がすべて有意的であるならば真の指数を推定する最も簡潔な算式は次のとおりである。

$$R_0=\bar{P}_0+\frac{1}{2}S \quad \text{(6.1の反覆)} \quad \cdots\cdots (9.1)$$

$$R_1=\bar{P}_1-\frac{1}{2}S \quad \text{(5.0と6.2との結合)} \quad \cdots\cdots (9.2)$$

この第(9.1)式、(9.2)式より判断されるように、S の値を推定することが計量経済学の問題である。第(4.1)式より S は $\bar{P}_0 v_p{}^2 e_s$ に等しい。操作的には $\bar{P}_0$ と v_p^2 とは統計資料より直接に計算可能である。すなわち、e_s の大きさの階数がわかれば S のそれをも知ることが可能である。ある具体的な経済のしかもある具体的な期間においては、平均的な代替の弾力性を、ある一定の確実性をもつて計量経済学的に推定しうるのである。勿論、ここで適用の具体

的な環境によつて代表的な代替の弾力性は異る。(34)

もし S の値の計量経済学的推定が不可能か、あるいは資料が準備されていないとき、I と T との有意的な尤度を無視して、P 式指数と L 式指数の単純平均で換作を続けるとき、いかなる問題が生ずるか？ I と T とがいかなるものであれ、成立する算式としてマリスは次式を挙げる。

$$\frac{1}{2}(\bar{P}_1+\bar{P}_0)=\frac{1}{2}(R_1+R_0) \quad \cdots\cdots (10)$$

「前方をながめる」真の指数と「後方をながめる」真の指数の平均に附加する何等、特別の意味はない。けだし、それぞれ一意的な意味をもつているのである。しかるに、ある特定の場合に特定の指数によるべき場合が考えられると共に、ある任意の折衷がむしろ現実に即応する場合が考えられる。すなわち、第(10)式による両指数の算術平均は、「理想的指数の二つの代替的概念の間に存在すべき指数を提供していること」(33)を理解しうるのである。

S が P 式指数と L 式指数との差の½に等しいという結論を選好体系の数学的形式でとらえることが次の問題であるが、この S の大きさのとらえ方を一つの仮設とするが、これはマリスによると、ヒックスが指摘するようにフリードマンの需要曲線が全体を通じて線型的であることに同意的であるとする。(53) いいかえると、上の第(8.2)式の β_i は価格変化のあらゆる範囲にわたつて不変的でなければならないことを意味する。もし、効用函数の全体を通じて一般化されるときは、このような線型性の仮定は不充分であり、無差別等高線の数学式が二次型式であると想定することが、より現実にアプローチするものと考えられねばならない。なお、これは次の四仮定に基ずくときのみそのもつ意味が立証される。すなわち

（a）無差別曲面が原点に中心をとる超二次型の族をあらわすとき、すなわち、嗜好が不変的であるとき

（b）実質所得に変化がないとき、すなわち、消費者が同一の超曲面上に位置するとき

（c）しかるとき、補整型変差の指数はフイッシャーの指数であり、P 式指数と L 式指数の算術平均に対して、その幾何平均である。

（d）上の（a）と（b）とは精確な真の「指数」であるフイッシャーの指数の必要にして充分なる条件である。

以上のことはロシアの数学者 S.S. Buscheguennce によつて一九二四年に証明された。[37] 彼はその前年に公刊されたフイッシャーの The Making of Index Numbers, New York, 1923 によつて刺戟されたのである。その後、指数理論の基本的な理論は多くの人々によつて展開されてきた。特にサミュエルソンが彼の代表的著書である "Foundations of Economic Analysis"[38] 中にその指数理論の懐疑的な章を執筆したとき、さらにヘンリー・シュルツが "A Misunderstanding in Index Number Theory, The Koniis Codition on Cost of Living Index Numbers and its Limitation" Econometrica, Vol.7 No.1,1939 p.8–p.9 を執筆したとき、明らかにブッシェングエンスのMathematift Scheskii Sbornik, Moskva, Izdatel'stvo Akademii nauk S.S.S.R 中の論文で展開された証明に気附いていたのである。マリスはチャンパノーヌ以外、サミュエルソンをふくめてこれにふれた多くの人々は、その正しい意味をみとめず、一般的な反作用は消費者の選好体系が二次型式あるいは他の特定の形式をとると信ずる何等も理由もなかつたのである。すなわち、マリスの到達した点は、超二次型の必要な体系は、それがある規則性を示すとして、個々の商品の所得の弾力性・代替の弾力性が変化する態様をうつす広範な曲線の族を表現する。もし、商品数が適当に大であれば、利用可能なパラメターの数もまた大となる。このような曲線の当てはめ、

しかもそれと現実の選好体系への近似化が可能でなければならない。もし、これが可能であればフィッシャーの理想式は真の階数のよき近似指数とみなされる根拠を有しなければならない。なお、この曲線よりの偏差がある意味で、商品の観察された現実の場合にみられる価格変化と相関づけられるべきである。

$\sqrt{P \times L}$ によるフィッシャー式指数を正当化するためには、嗜好と実質所得が不変であるという仮定は、これを維持する必要はない。この両要素、すなわち、実質所得の変化と消費者の嗜好の変化が、L 式指数および P 式指数のいずれか、あるいは両指数に作用しない限り、それぞれの変化によつて影響されない。しかるにマリスによれば「これらの変化は L 式指数に影響しえないし、又、r_{py} と r_{pt} がノン・ゼロに非れば第(4.0)式では、L 式指数を超過する P 式指数の超過分に影響し得ない。この問題は既に述べられた[39]」かくして、もし収束確率の法則が妥当し、供給の弾力性が一般に大であれば、生のままの観察資料よりフィッシャー式指数を計算して求められた現実の結果は、所与の価格の変化に直面して、消費者の同じ集合が彼等の嗜好と実質所得を若干一定不変に保つコントロールした実験より計算されたと近似的に同じとなるであろう。

かくして、マリスの結論は次のとおりである。すなわち、「フィッシャー式指数は時々実現された以上により理想的であり、かつフィッシャー教授が実現した以上に理想的であるということである」。既知のようにフィッシャーが彼の式を理想式というのは、彼が設定した数学的な若干のテストを合格する故にである。それは、あくまで数学的、形式的な無矛盾性を有するが故である。すなわち、いわゆる原子論的指数理論である。すなわち、効用理論のうらづけがないのである。しかし、本来、スルーツキーの理論に無関係に展開されたこの指数は、スルーツキー以前の需要理論のひかりを浴びて今日、非常に強く正当化され、又、既述してきた通常の需要理論よりとられた諸

概念によつてうらづけられた。たとえばピグウの「厚生経済学」第六章「国民分配分の大きさの変化の測定」では改めてフイッシャー式指数を推す。[40] その解答は、ここで需要理論によつて支持される常識は常に、古いウエートを新しいウエートの何等かの平均が希ましいことを示す。この平均の方法次第によつて近似的結果を生ずるのである。すなわち、比率の組の平均方法として幾何平均を算出することを普通、統計学の常道とする。かくして、最終的にマリスはフイッシャー式指数の弁護者となるのである。

五

ここで、マリスが短い会話で把握したジョンソンの理論的態度と供給の弾力性が有限である場合のモデルについての方程式の誘導について述べる。

いま、ここに既述の如き需要理論の基礎としての選好体系の如きものが存在しないと想定せよ。消費者の現存の消費類型は過去の歴史的経験・消費習慣および消費惰性に基ずくのであつて、消費の変化は全く気まぐれであり「代替効果」、「所得効果」および「嗜好変化効果」の如き諸概念は何等の意味をも有しないのである。このような消費者行動はいかなる統計的形態をとるか？この場合においても個人の総支出の変化がある状態に限定されることを認めなければならないから、数量の偶然的変動は存在するとは考えられないのである。ここで、比例的支出の偶然的変化が、われわれの体系の及ぼす効果は、比例的支出が常に不変的であるように作用する。すなわち、ある個々の商品へ対する支出が、総支出線の上下に変動したりはしない。もし、この事実が成立するならば第(4.1)式に特定の結果がみられるであろう。すなわち e_s、e_y および e_t はもはや独立の意味を有しない。しかし、その総和は1

に等しくなる。勿論、マリスによると「これは、総和の母集団の値であり、観察結果は収束確率の法則の適用に依存する」のである。[41] ここでの総和（e）は次式によつて計算される。

$$\varepsilon=\frac{\bar{P}_1-\bar{P}_0}{v_p^2\cdot\bar{P}_0}$$

逐次的標本で、どの範囲まで ε の中心的傾向が1より偏歪するかを観察して、比較的に安定的な消費者の選好体系の存在の現実性をテストすることが出来る。この際に供給の弾力性が一般に無限であるならば、ε の中心的傾向より確率的な消費支出が論証されるのである。

次に供給の弾力性が有限的である場合のモデルについての方程式の誘導について述べよう。次式によつてモデルは価格と数量比を確定する。すなわち

$$q_i=\frac{1}{1-\beta_i\alpha_i}\{(y_1+t_i)-(\bar{Q}_0-1)\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9.1より)$$

$$p_i=\frac{\alpha_i}{1-\beta_i\alpha_i}\{(y_i+t_i)-(\bar{Q}_0-1)\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9.2より)$$

これを簡単化するために書き変えて

$$q_i=g_i(y_i+t_i-Q) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

$$p_i=\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}\{\varphi_i(y_i+t_i-Q)\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

ここで φ_i は既に前節で述べたとおりであり、g_i と Q とは、それぞれ $1/(1-\alpha_i\beta_i)$ と $(\bar{Q}_0-1)$ とをあらわすも

のである。

次に I と T とを発見することが必要とされる。なお

$$I=\frac{COV_{py}}{\bar{Q}_0}$$

$$T=\frac{COV_{pt}}{\bar{Q}_0}$$

このモデルは $Q=\Sigma W_i y_i/\Sigma W_i$ であることを意味する。しかも y を以て $\Sigma W_i y_i/\Sigma W_i$ を、t を以て $\Sigma W_i t_i/\Sigma W_i$ をあらわすものとする。上の (i) によつて

$$Q=\sum W_i(Q+q_i)/\sum W_i=Q+\frac{\sum W_i g_i(y_i+t_i)}{\sum W_i}-\frac{Q\sum W_i g_i}{\sum W_i}$$

$(\Sigma W_i g_i/\Sigma W_i=\bar{g})$ とせよ。しかるとき

$$Q=\frac{\sum W_i g_i(y_i+t_i)}{\sum W_i g_i}=(\bar{y}+\bar{t})+\{COV_{gy}+COV_{gt}\}\frac{1}{\bar{g}}$$

ここでクロス・コリレーションは無視され $t=0$ とする。これより $Q=y$ とする。この誘導的仮定は更に続けられる。

T については類推可能であるから、I についてのみ検討することにしよう。上述の(ii)と $Q=\bar{y}$ とより

$$p_i=\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}\{\varphi_i(y_i-\bar{y})+\varphi_i t_i\}$$

$t_i'=t_i-\bar{t}(=t_i)$ および $y_i'=y_i-\bar{y}$ とすると $\Sigma W_i y_i'=\Sigma W_i t_i'$ となり (iii)の次式で表現されるようになる。

$$p_i=\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0}\{\varphi_i(y_i'+t_i')\}$$

(iv)より直ちに次のようになる。

$$I=\frac{1}{\bar{Q}_0}\cdot\frac{\sum W_i p_i y_i}{\sum W_i}=\frac{\bar{P}_0}{\bar{Q}_0^2}\{\varphi VAR_y+COV_{\varphi y}{}^2+\bar{y}(COV_{\varphi y}+COV_{\varphi t})+$$

$$\varphi COV_{yt}+COV\varphi_{yt}\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(\text{v})$$

もし最初のカッコ内の項を無視するときは

$$I=\varphi\bar{P}_0\frac{VAR_y}{\bar{Q}_0^2}=\varphi\bar{P}_0 y^2$$

ここで添字のない φ は $\Sigma W_i\varphi_i/\Sigma W_i$ に対応し、Vy^2 は所得効果の相対的分散度をあらわす。かくして、無視されたあらゆる項の和はゼロかあるいは小であるとの内定に立つのである。その符号は正又は負となるのは偶然による。

註（1）高木「ヒックスの物価指数理論」—消費者余剰と物価指数—関西大学経済論集第六巻、第五号　三十一年九月

（2）R.L. Marris, Professor Hicks' Index Number Theorem, The Review of Economic Studies, Vol. xxv (1), No. 66, Oct. 1957

（4）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 25　5, J. R. Hicks, A Revision of Demand Theory, Oxford. 1956. P.182—P.183 早取訳「需要理論」、岩波現代叢書　一九五八年　二三頁—二三五頁

（6）J. R. Hicks, ibid. a. a. o. p. 185—p. 186　訳書　二三九頁

(7) R. L. Marris. ibid. a. a. o. p.26

(8) A. McFarlane Mood, Introduction to the Theory of Statistics. First Edition, N.Y, 1950, p. 167, A. Bowley, Earnings and Pirces, 1904, 1914, 1937～6, Studies in Official St., No. 1. H. M. S. O., 1949, p. 19

(9) R. L. Marris, ibid. a. a. o. p. 27

(10) R. L. Marris. ibid. a. a. p. 28

(11) R. G. D. Allen, The Concept of Arc Elasticity of Demand., Review of Economic Studies, 1. p. 226—p. 228, H. Wald, Demande Analysis, 1953, p. 99 では

$$E_x f = -e_x f \sim \frac{f_1 - f_0}{f_1 + f_0} \cdot \frac{x_1 + x_0}{x_1 - x_0}$$

(12) この問題は通常いわゆる函数論的指数論でとりあつかわれるのであるが、原子論的立場より取扱つたものとしては、次のものがあり筆名はいずれ他日これをも紹介するつもりである。

I. H. Siegel, The Difference Between the Paashe and Laspeyres Index-Number Formulas, American Journal of Statistical Association. Vol., 36, 1941, p. 343—p.350

(13) あらゆる E<O について

$$\lim_{n \to os} P[lXn - Xl > E] = O$$

のとき変量の連続〔Xn〕は変量Xに収束又は収斂するといわれる。 M. G. Kendall and W R. Buckland, A Dictionary of Statistical Terms., 1957. p. 280, Wealherburn, A Eirst Course in Mathematical Statistics. Second Edition, Cambridge Univ. Press, 1952, p.33—p. 34, 国沢清典「確率論に於け極限限定理」一九五〇年 二八頁以下

(14) R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 29—p 30.

(15) R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 30

(16) I. R. Hicks, Revision, p. 186—p. 189. 訳書二四〇頁—二四一頁

(17) W. E. Johnson, The Pure Theory of Utilty Curves, Economic Journal, 1913.

（18）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p.30
（19）J. R. Hicks. Revison. p.59　訳書　七九頁
（20）Marshall Lectures delivered Cambridge England, 1955/56. para. 22. 但し Marris. ibid. a. a. o. p. 31—p. 32 より引用
（21）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 180.　訳書二三一頁
（22）J. R. Hicks, Revision. p. 81,「価値と資本」訳書Ⅱ　追加補論三九頁
（23）J. R. Hicks, Revision. p. 102
（24）J. R. Hicks. Value and Capital.
（25）訳書Ⅱ　追加補論　三九頁
（26）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 32
（27）R- G. D. Allen, Mathematical Analysis For Economist
高木訳　三五九頁—六頁、四六〇頁—一頁
（28）J. R. Hicks. Revision. p. 82
（29）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 33
（30）R. L. Marris ibid, a. a. o. p. 33
（31）R. L. Marris ibid. a. a. o. p. 34
（32）R. L. Marris, ibid. a. a. o. p. 35
（33）R. L. Marris ibid. a. a. o. p. 35
（34）L. R. Klein and H. Rubin. A Constant-Utility Index of The Cost of Living, Review of Economic Studies. Vol. XV. No, 38 (1947—8)
（35）R. L. Marris. ibid. a. a. o. p. 36
（36）Marris. ibid. a. a. o. p. 36, Hicks. Revision. p. 76, M. Friedmann. Marshallian Demand Curves, Essays in Positive Economics.

（37）S. S. Buscheguennce. Mathematisheskii Shornik. Moskva, Izdatelistvo Akademii Nauk, S. S. S. R. XXXⅡ. 1924. p. 625 "Sur une Classes des Hypersurfaces.-a propos Lindice Ideal de M. Irv. Fisher

（38）P. Samuelson. Foudations of Economic Analysis, p.155—

（39）R.L. Marris. ibid. a. a. o. p. 58

（40）A. C. Pigou, The Eonomics of Welfane. 永田監修訳　第一巻、八四頁

（41）R. L. Marris ibid. a. a. o. p.38