〔研究紹介〕

不完全公的観測の無限回繰り返しゲーム

太田　勝憲*

1　はじめに

本稿は，筆者がこれまで研究してきた「不完全公的観測下の無限回繰り返しゲーム」に関する研究について，学部生にも読んでもらえるように紹介する．予備知識がない読者を想定して，まずは，「ゲーム理論」，「無限回繰り返しゲーム」と「不完全公的観測」について説明し，この研究分野の問題意識を読者と共有したい．

1.1　ゲーム理論

ゲーム理論とは，複数の意思決定主体（プレイヤー）が，他者の行動を予測しながら意思決定を行う状況（相互依存のある意思決定問題）を分析する理論であり，相互依存のある意思決定の状況そのものをゲームという[1)]．簡単に言うと，ゲーム理論とは，他者との「駆け引き」を分析する理論である．ライバル企業との価格競争，オークションでの入札，経済制裁を脅しにした国際交渉などの経済問題は，全て相互依存のある意思決定問題である．

プレイヤーは，目的を最大限達成しようと試みるという意味で合理的であると考える．プレイヤーの合理性は，各プレイヤーの意思決定（戦略）の結果に関する選好を表す利得と呼ばれる数値の最大化問題として表現される．相互依存のある意思決定問題では，利得は自分の戦略だけでなく，他のプレイヤーの戦略にも依存する．相手の特性、行動が正確には分からない不確実性や，天候などの自然の不確実性が意思決定問題に存在するときは，プレイヤーは利得の期待値（期待利得）の最大化を目指すとして分析を行う．

ゲームにおけるプレイヤーの行動を予測する方法として均衡を考える．均衡とは，安定的に観察される状態（戦略の組み合わせ）を表す[2)]．ゲームの種類に応じて，いくつかの均衡概念があるが，最も基本的な均衡概念がナッシュ均衡である．ナッシュ均衡とは，全てのプレイヤーについて，他のプレイヤーがナッシュ均衡通りに戦略をプレーするとき，自分だけ戦略を変更しても得にならない戦略の組み合わせのことをいう．

---

*関西大学総合情報学部

1）例年，「ゲーム」の意味を勘違いして，ゲーム理論を履修する学生がいるが，ゲーム理論のゲームは遊戯としてのゲームではない．

2）どのようにして均衡に到達するかという調整過程については触れない．

1.2　無限回繰り返しゲーム

無限回繰り返しゲームとは，文字通り，同じゲーム（ステージゲームという）を無限回繰り返す動学ゲーム（dynamic game）の一種である．無限回繰り返しゲームが描くのは，プレイヤーの間にある長期的関係である．長期的関係とは，プレイヤーの間の関係が一度きりではなく，（いつ終わるかも分からないくらいに）長く続く関係性を持つことを意味する．無限回繰り返しゲームには，同じステージゲームを何回繰り返そうとも，その時点から先に，常に同じステージゲームが無限回繰り返される「続きのゲーム」が存在する．プレイヤーたちは，続きのゲームという未来に対して現在の行動選択がもたらす結果を予想しながら，毎回の意思決定を行う．

繰り返しゲームのような動学ゲームでは，遠い未来の利得は割り引いて評価する．割引因子を $\delta \in (0, 1)$ とすると，１期先の利得には δ を掛けて割り引き，２期先の利得には δ^2 を掛けて割り引き，t 期先の利得には δ^t を掛けて割り引く．割引因子 δ は１より小さい正の数なので，遠い未来ほど大きく割り引いて評価する事になる．無限回繰り返しゲームの利得は，毎期得られる利得の割り引かれた値（割引現在価値）の総和で表現する．

長期的関係では，一度きりの関係ではできないような結果，とりわけ協調的な結果が実現可能であることが知られている．明日以降も続く関係性を考慮して，今日の日和見主義的な行動を控えることは読者の多くも体験したことがあるだろう．そのような状況で，我々は，現在の協調からの逸脱の利益と逸脱によって生じる明日以降の損を天秤にかけている．そして，割引因子が十分大きく将来の利得を重視するならば，損が得を上回り，協調は守られる．つまり，長期的関係による暗黙の協調を考えることは，逸脱による損を生み出す「お仕置き（処罰）」を考えることと言っても過言ではない．

1.3　不完全公的観測

相手の行動を正しく観測できる状況では，過去に相手がとった行動を基に，毎期の行動を決定すれば良い．自分が協調している状況で相手の協調からの逸脱を発見したとき，来期以降の続きのゲームの均衡[3)]として執行可能な中で強力なお仕置きを発動するように戦略を設計しておけば，十分割引因子が大きい時に協調は維持可能である．しかしながら，長期的関係があるとしても，相手の行動を直接観測できないことがある．例えば，寡占市場での企業間の価格カルテル[4)]を考えてみると，顧客に対して店頭価格よりも安い価格でこっそりと販売することができる（Secret price cutting）．このような状況では，毎日の価格設定がカルテルの約束通りになっているか正確に把握することは難しい．また，共同研究を考えると，遠い場所にいる共同

3）続きのゲームも無限回繰り返しゲームになっているので，お仕置きの行動様式も繰り返しゲームの均衡でなければ，執行可能ではない．

4）カルテルとは，寡占市場の少数の企業が競争を制限する行為全般のことで，これは独占禁止法に違反する行為である．

研究者の努力を観察できないのは自然な設定である．

相手の行動を観測できない状況でも，相手の行動に関する何らかの情報を受け取ることはできる．例えば，企業間の数量カルテルでは，ライバル企業の供給量を観察することはできないが，市場全体の供給量で決まる市場価格は観察できる．市場価格から，ライバル企業が約束した供給量（高い利潤を実現するために必要な高価格を実現するような競争状態よりも低水準の供給量）を守っているか，推測することができる．しかし，市場価格には観察不可能な需要変動というノイズが入るために，市場価格はライバル企業の供給量に関する正確なシグナルとはならない．今日観察した低価格はライバル企業のカルテル破りによるものなのか，一時的な需要低下によるものなのかは識別できない．

この識別不可能性が，完全観測にはない新しい問題を提示する．完全観測では，協調が維持されるとき，処罰は実際には観察されない脅しであるが，不完全公的観測の世界では，協調を守っていても処罰が発動される．先のカルテルの例を使って説明すると，カルテルの約束通り低水準の供給量を守っていても，観察不可能な需要ショックによって低価格が実現する可能性があり，そのとき必ず，競争的な高水準な供給量による処罰が発動される．仮に低価格が実現したとき，処罰が発動されない状況を考えてみよう．相手がカルテルの約束を守っている時に，自分だけこっそりと供給量を増やして利益を上げられる一方，それに対するお咎めがないため，カルテル破りによる一切の損がない．つまり，協調的行動をとるインセンティブを与えるためには，たとえ相手が逸脱していなくても，悪いシグナルを見たら規律づけのために処罰を発動しなければならない．

規律づけのための処罰は協調を壊すため，効率性の損失を生む．不完全観測の繰り返しゲームの研究では，損失を生むが規律づけに必要な処罰を工夫することで，いかに損失を抑えるかという問題意識のもと、様々な研究が行われてきた．次節では，シンプルなモデルを提示して，不完全公的観測特有の問題意識を説明する．

2　例：パートナーシップ

二人のパートナー（プレイヤー）が共同でプロジェクトを行うパートナーシップゲームを例にして，不完全公的観測におけるお仕置きの工夫について説明する．毎期プレーされるステージゲームは，以下の通りである．

- 各パートナーの選択可能な行動は「努力する（W）」か「怠ける（S）」のどちらか
- S の選択はコストがかからないが，W にはコスト $c > 0$ がかかる
- チームの成果は「成功（G）」か「失敗（B）」の２種類
- どちらの成果が実現するかは，二人のパートナーの行動プロファイルに応じて，確率的に決まる

- 成果の条件付き確率 $P(\omega | a_1, a_2)$（$\omega \in \{G, B\}$, a_i はパートナー i の行動）は以下の通りである
  - $P(G | W, W) = p_2$, $P(G | W, S) = P(G | S, W) = p_1$, $P(G | S, S) = p_0$
  - 仮定：$1 > p_2 > p_1 > p_0 = 0$
- 成果の金銭的価値は成功すると $2x(>0)$，失敗するとゼロ
- 各パートナーのステージゲームで実現する利得は，成果の価値の半分から，自分の選択した行動のコストを引いたもの

$1 > p_2$ は，二人が努力していても失敗する可能性があること，$p_1 > 0$ は，相手が努力しているときに自分だけ怠けても成功する可能性があることを意味する．$p_2 > p_1 > p_0$ は，努力はプロジェクト成功の可能性を高める生産的行動であることを意味する．最後に，問題を簡単にするために $p_0 = 0$ とする．

以上の設定のもと，各パートナーの期待利得を計算できる．以下の表1（利得表という）は，パートナー1（2）が行（列）を選択するプレイヤーで，表の中の数値は，各パートナーが選択した行動の組み合わせ毎の期待利得を表し，左（右）側がパートナー1（2）の期待利得を表す．

表1　パートナーシップゲーム

		パートナー2	
		W	S
パートナー1	W	$p_2x - c$, $p_2x - c$	$p_1x - c$, p_1x
	S	p_1x, $p_1x - c$	0, 0

$p_2x > c > (p_2 - p_1)x$ のとき，このゲームの利得構造は「囚人のジレンマ」になる．つまり，(i) $c > (p_2 - p_1)x$ より，二人とも，相手の行動が W だろうが S だろうが，S の方が常に大きい利得をもたらし（このとき，S は支配戦略という），(ii) $p_2x > c$ より，その支配戦略均衡 $(a_1, a_2) = (S, S)$ よりも，$(a_1, a_2) = (W, W)$ のときの方が二人とも利得が高い（(W, W) は (S, S) をパレート支配するという）．この状況は，お互いが真面目に努力することが望ましいが，一回限りの関係では，それを達成することはできないことを意味する．以後，$p_2x > c > (p_2 - p_1)x$ を仮定する．

以上の囚人のジレンマ型のパートナーシップを，割引因子 $\delta \in (0, 1)$ の下で，時点 $t = 0, 1, 2, \cdots$ のタイミングで無限回繰り返すことを考える．繰り返しゲームの利得について，ここでは，毎期得られる利得の割引現在価値の総和に $1 - \delta$ を掛けた平均割引利得（Averaged discounted payoff）を利用する．「平均」とは1期間当たりの平均（Average per period）を表す．均衡で得られる利得を1期間当たりの平均で見ることで，1回限りの関係で達成できることと

長期的関係で達成できることを比較することが可能になり，長期的関係のご利益が理解できる．ステージゲームの利得関数を u_i として，毎期の行動プロファイルの列 $\{a(t)\}_{t=0}^{\infty}$ が与えられたとき，パートナー i の平均割引利得を表す式は以下の通りである．

$$(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_i(a(t)).$$

続いて，繰り返しゲームの公的戦略と均衡を定義する．公的戦略は，(i) ゲームのスタートである第 0 期にとる行動と (ii) 任意の $t \geq 1$ について，第 0 期から第 $t-1$ 期までに観察した公的シグナルの列（公的歴史という）に応じて，第 t 期にどの行動を取るかを全て書き下した行動計画である．「全て書き下した行動計画」の意味を，ここでのパートナーシップゲームの第 2 期の行動計画を例にとって説明する．$t=2$ における公的歴史の集合は，$t=0$ と $t=1$ に実現した公的シグナル（プロジェクトの成果）の列なので，全部で 4 つの要素からなる．第 t $(=0, 1)$ 期の公的シグナルを $\omega(t)$ とすると，この集合は，$(\omega(0), \omega(1)) \in \{(G, G), (G, B), (B, G), (B, B)\}$ である．行動計画とは，$t=2$ の時点で，この 4 つの公的歴史それぞれが実現したときに W と S のどちらを選ぶかを全て決めておくことを意味する．この行動計画を $t=0$ から無限期先まで全て決めることが戦略の設計である．

ゲームの解としての均衡として，ここでは完全公的均衡（Perfect Public Equilibrium）を利用する．完全公的均衡とは，(i) $t=0$ において，公的戦略の組み合わせがナッシュ均衡であり，(ii) 任意の $t \geq 1$ と t における任意の公的歴史について，続きのゲームでナッシュ均衡になっている戦略の組み合わせである[5]．

完全観測の場合，相手の S を観察したら，以後永久に S をプレーし続ける「トリガー戦略」[6] によって，δ が 1 よりも小さいある下限を上回れば，毎期，効率的な (W, W) を均衡の結果として実現できる．一方，不完全観測においては，相手が怠けているか努力しているか観察できない．この場合，怠けるとプロジェクトの成功確率が下がるので，プロジェクトが失敗したら努力をやめるトリガー戦略ならば，ある程度の協調が実現できそうである．そこで，次のような戦略を考えてみる．

5) 戦略の定義を見ればわかる通り，繰り返しゲームでは全ての戦略をしらみつぶしに均衡かどうかチェックすることは不可能である．均衡の発見は“guess and verify”の方法で行う．すなわち，均衡になりそうな戦略を作ってみて，それが均衡かどうか調べる．

6) 完全観測でのトリガー戦略は，以下のような戦略である．ターゲットとする行動（この例なら W）を選択する協調局面と，ステージゲームのナッシュ均衡戦略（この例なら S）をプレーする処罰局面の 2 局面からなる戦略で，(i) まず協調局面からスタート（過去のない $t=0$ は W をプレー）し，(ii) 任意の $t \geq 1$ について，前の期までの過去のプレーの履歴が全てターゲットとする行動の組み合わせが実現していたら（前の期までのプレーが全て (W, W) ならば），協調局面に留まりターゲットとする行動を選択する，(iii) 一度でもターゲットとする行動が取られていない期があるならば，永遠に処罰局面に留まる．

- $t = 0$ では，W をプレーする
- 任意の $t \geq 1$ について，
  - プロジェクトが失敗したら，確率 q で以降永遠に S をプレーする（努力をやめる）
  - そうでなければ，努力を続ける

プロジェクトが失敗したとき確率 q で努力をやめるとは，シグナル B を見たら，確率 q で二人で怠ける処罰局面に移行することを意味する．言い換えると，確率 $1 - q$ で，たとえプロジェクトが失敗しても，二人とも努力を続けることを意味する．これは，利得とは無関係な何らかの確率変数（例えば，天候や株価）を利用して，確率的に処罰を発動することである（確率的な処罰発動のような行動様式を公的ランダム化という）．

上記のトリガー戦略は，処罰局面の続きのゲームでナッシュ均衡になっている．なぜなら，常に S を取る相手に対して，W をとっても得にならないからである．従って，上記のトリガー戦略が完全公的均衡であることを確かめるには，努力する（W をとる）局面の公的歴史（$t = 0$ も含む）において，W をプレーするインセンティブがあるかチェックすれば良い．相手がこの戦略に従っているとき，自分もこの戦略通りにプレーするときのパートナー $i (= 1, 2)$ の利得（v_i とする）は

$$\begin{aligned} v_i &= (1 - \delta)\,[p_2 x - c] + \delta[1 - (1 - p_2)q]v_i \\ &= p_2 x - c - \frac{\delta}{1 - \delta}(1 - p_2)q v_i \end{aligned} \tag{1}$$

である．１行目の式の説明は以下の通りである．今期 $p_2 x - c$ の利得を得て，来期以降は，確率 $(1 - p_2)q$ で以降永遠に S を取り続ける状態に突入し，利得はゼロになる．残りの確率 $1 - (1 - p_2)q$ の確率で協力関係が維持されので，来期以降 δv_i の利得が得られる．

今期 W の代わりに S をとってトリガー戦略から逸脱することが得にならない条件（インセンティブ条件）は，

$$v_i \geq (1 - \delta)p_1 x + \delta[1 - (1 - p_1)q]v_i$$

である．右辺は，相手が上記のトリガー戦略に従っていることを所与として，今期 S を選んでトリガー戦略から逸脱したときの利得を表している．これを，v_i の式を使って書き換えると

$$\delta q(p_2 - p_1)v_i \geq (1 - \delta)[c - (p_2 - p_1)x] \tag{2}$$

となる．(2)式の左辺は，今期 S をとってトリガー戦略から逸脱することによる来期以降の損失の期待値であり，右辺は今期 W ではなく S を取ることによる逸脱の利益の期待値を表している．左辺の損失は，怠けることで成功確率が下がるために処罰発動の確率が上昇することを表している．右辺は，怠けることによる今期の努力コスト c の節約から，成功確率が下がること

による金銭的価値の減少分が差し引かれた逸脱の純利益である．$q > 0$ とすると，十分 1 に近い δ について，$p_2 > p_1$，$v_i > 0$，$c > (p_2 - p_1)x$ より，⑵の不等式は成立する．言い換えると，十分大きな δ について，W を取る局面で S を取って逸脱するインセンティブはない．

続いて，⑵式を使って⑴式を書き換えると，トリガー戦略で得られる均衡利得の上限が導出できる．

$$
\begin{aligned}
v_i &\leq (p_2 x - c) - \frac{1 - p_2}{p_2 - p_1}\left[c - (p_2 - p_1)x\right] \\
&= (p_2 x - c) - \frac{c - (p_2 - p_1)x}{\dfrac{1 - p_1}{1 - p_2} - 1}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

⑶式は，インセンティブ条件が等式で成立するとき v_i と等しくなるので，プロジェクトの失敗を観察したとき努力をやめる確率をそのようにうまく調整することで上限を均衡の利得として達成できる．公的ランダム化の確率が $q = 1$ で⑵式を等式にする割引因子を $\underline{\delta}$ とすると，任意の $\delta \geq \underline{\delta}$ について，⑵を等式にする確率 $q \in (0, 1]$ が存在する．さらに，⑶式の値が 0 を超えるならば，上記のトリガー戦略は完全公的均衡である．

⑶式の右辺はステージゲームの「協調利得」から均衡経路上で起こる処罰によって生じる「効率性の損失」を差し引いた形になっている．完全観測では，実行可能なお仕置きを脅しとして用意することで，常に協調が維持できるが，不完全公的観測では，公的シグナル（ここではプロジェクトの成果）にノイズが入るため，二人が努力していても，いつか必ずプロジェクトは失敗し，いつか必ず処罰が発動される．処罰は協調利得を壊す行為なので，効率性の損失を免れない．

さらに，この式は効率性の損失の大きさを決定する要因を特定している．⑶式の第 2 項の分子は，「協調からの逸脱の純利益」を表している．つまり，逸脱によって得られる利益が大きいほど，効率性の損失は大きい．第 2 項の分母に登場する確率は尤度比で，逸脱することでプロジェクトが失敗する確率が何倍増えるかを表している．これは公的シグナルの精度（accuracy）を表現していて，シグナルの精度が高い（尤度比が大きい）ほど，効率性の損失は低く抑えられることを表している．

3　お仕置きの工夫

不完全公的観測での処罰は，プレイヤーたちにとって，規律づけのための必要悪であることが分かった．それでは，どのようにしてこの必要悪である処罰をコントロールして，効率性の損失を軽減するのか．この節では，3 つのお仕置きの工夫を紹介する．最後の一つが筆者が考案した工夫である．

3.1　工夫１：有限期間の処罰

公的ランダム化はいつでも利用可能であるとは限らない。公的ランダム化が使えない状況で，協調にとって必要悪な処罰を抑制する方法を考えることは重要である．(3)式の右辺の上限そのものは達成できないかもしれないが，処罰の期間の長さを協調のインセンティブをぎりぎり与える最小期間に調整することで，効率性の損失を小さくすることができる．有限期間の処罰を終えたら，また協調に戻るようなトリガー戦略は，十分大きい割引因子の下で均衡になる．これは，現実に観察される，崩壊と再生を繰り返すカルテルの行動様式を説明している（Green and Porter（1984））.

3.2　工夫２：非対称な処罰

２節の例のシグナル B は「協調からの逸脱が起きた可能性」を伝えるが，「誰が逸脱した可能性が高いか」というより詳細な情報を含んでいない．それ故，規律づけのために必要な処罰は両方のプレイヤーを同時に罰する形態になり，プレイヤーたちは効率性の損失から免れることができない．

もし，（行動の数に比べて）公的シグナルの数が十分多い（先の例ならば三つ以上）とすると，公的シグナルは「誰が協調から逸脱した可能性が高いか」まで情報を有する．このとき，逸脱した可能性の高いプレイヤーの利得を小さくして，その利得の減少分を他のプレイヤーに報酬として与えるような非対称な処罰を続きのゲームの戦略として用意することで効率性の損失を小さくできる．公的シグナルの数が行動の数に比べて十分多いとき，割引因子 δ が十分１に近いならば，効率性の損失を無視できるくらい小さくすることができる．言い換えると，近似的に協調利得を実現できる（Fudenberg, Levine and Maskin（1994））.

3.3　工夫３：関係を厚くする

最後に，筆者自身の研究について触れる．２節の例のようなシグナルが少ないため非対称な処罰が利用できない状況で，いかにして効率性の損失を軽減できるかという問題に対して，筆者と小林創氏（関西大学経済学部教授）は，カルテルの温床として古くから問題視されていた「多市場接触（multimarket contact）」が効果的であることを示した（Kobayashi and Ohta（2012））.

多市場接触とは，同一の企業同士が複数の市場で競合している状況のことである．戦前日本の財閥のような複数の市場で競合するコングロマリット企業，複数路線で競合する大手航空会社などがこの例である．コーウィン・エドワーズ[7)]は，多市場接触の状況では，局所的なカルテル破りが全市場での大域的な報復を招く恐れがあるため，カルテルが維持されやすいであろうという仮説を提示した．しかしながら，完全観測の世界では，エドワーズの仮説は支持され

7）彼は，第二次世界大戦後に，経済学者として，GHQ から財閥調査団団長に任命され日本に派遣された経歴を持つ．

ない．なぜなら，カルテルからの逸脱は必ずすぐに発見され，全ての市場での報復を招くので，どうせ逸脱するなら全市場で逸脱して逸脱の利益を最大化することが合理的だからである．私と小林氏の研究は，不完全観測の状況でこそエドワーズの仮説が支持されることと，１市場でのカルテルと比較して多市場接触は効率性の損失を小さくすること，さらには、損失をどの程度小さくするかまで示した．

Kobayashi and Ohta (2012) のエッセンスを，長期的関係を２個に増やして「関係を厚くした」パートナーシップのモデルを使って説明する．二人のパートナーが，２節で紹介したプロジェクトを２つ同時に行う状況を考える[8]．２つのプロジェクトをプロジェクト A，プロジェクト B と呼び，それぞれのプロジェクトは，互いに他のプロジェクトには影響を与えないとする．つまり，プロジェクト A の成果とプロジェクト B の成果は独立に決まる．さらに，プロジェクト A の努力は，プロジェクト B の成功確率に影響しないし，プロジェクト B の努力はプロジェクト A の成功確率に影響しない．まとめると，ω^k をプロジェクト $k(=A, B)$ の成果，a_i^k をパートナー $i(=1, 2)$ のプロジェクト $k(=A, B)$ における行動，$P^k(\omega^k \mid a_1^k, a_2^k)$ をプロジェクト $k(=A, B)$ の成果の条件付き確率分布とすると，２つのプロジェクトの成果の同時分布は，

$$P(\omega^A, \omega^B \mid a_1, a_2) = P^A(\omega^A \mid a_1^A, a_2^A) \times P^B(\omega^B \mid a_1^B, a_2^B)$$

である．ただし，$a_i = (a_i^A, a_i^B)$ は，パートナー i の２つのプロジェクトでの行動の組である．また，簡単化のために，プロジェクトの成功確率，成果の金銭的価値と努力コストは２つのプロジェクトの間で等しいとする．上付きの文字でプロジェクトを表すとすると，$p_l^A = p_l^B = p_l\ (l = 0, 1, 2)$，$x^A = x^B = x$，$c^A = c^B = c$ が成立すると仮定する．

この無限回繰り返しゲームの利得は，２つのプロジェクトにおける期待利得の合計の平均割引利得で表される．

$$(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\left(u_i^A(a^A(t)) + u_i^B(a^B(t))\right).$$

ただし，$a^k(t) = (a_1^k(t), a_2^k(t))$ はプロジェクト $k(=A, B)$ での両パートナーの行動の組，u_i^k はプロジェクト k におけるパートナー i のステージゲームの利得関数である．

２節で説明した通り，割引因子が十分大きいプレイヤーたちにとって，不完全公的観測における処罰は規律づけのための必要悪であった．できるだけ処罰を行わずに協調のインセンティブを与えることを意識すれば，割引因子が十分１に近いとき，次のようなトリガー戦略が最適なトリガー戦略になることが理解できるだろう．

8）Kobayashi and Ohta (2012) は，利得構造と情報構造が異なる状況も含んだ m 個の囚人ジレンマを同時にプレーする多市場接触を分析している．

- $t = 0$ では，両方のプロジェクトで W をプレーする
- 任意の $t \geq 1$ について，
  — プロジェクトが両方とも失敗したら，確率 q で以降永遠に両方のプロジェクトで S をプレーする（努力をやめる）
  — そうでなければ，両方のプロジェクトで努力を続ける

両方のプロジェクトが失敗したときのみ処罰をするということは，どちらか一方しか失敗していないならば，そのまま W をプレーし続けるということである．つまり，$(\omega^A, \omega^B) = (B, G)$，$(G, B)$ が実現した場合，成功した方のプロジェクトのみならず，失敗したプロジェクトについても確率１で努力を継続する．

相手がこの多市場接触版のトリガー戦略に従っているとき，自分もこのトリガー戦略通りにプレーするときのパートナー i の利得（v_i^m とする）は

$$\begin{aligned} v_i^m &= (1-\delta)2(p_2x-c) + \delta[1-(1-p_2)^2q]v_i^m \\ &= 2(p_2x-c) - \frac{\delta}{1-\delta}(1-p_2)^2qv_i^m \end{aligned} \tag{4}$$

である．ここでも，２節同様に，１行目の式の説明を与える．今期２つのプロジェクトの協調利得を得て，来期以降は，確率 $(1-p_2)^2q$ で以降永遠に S を取り続ける状態に突入し，利得はゼロになる．残りの確率 $1-(1-p_2)^2q$ の確率で協力関係が維持されので，来期以降 δv_i^m の利得が得られる．

続いて，上記のトリガー戦略が均衡になる条件を調べるために，両方のプロジェクトで努力するインセンティブがあるかチェックをする．２節のインセンティブ条件との違いは，逸脱のパターンが２つになることである．つまり，トリガー戦略が均衡であるためには，１つのプロジェクトだけ怠ける逸脱と両方のプロジェクトで怠ける逸脱の２種類の逸脱を防がなければならない．それぞれの逸脱を防ぐインセンティブ条件は，以下の通りである．

$$\delta q(1-p_2)(p_2-p_1)v_i^m \geq (1-\delta)[c-(p_2-p_1)x], \tag{5}$$

$$\delta q[(1-p_1)^2-(1-p_2)^2]v_i^m \geq 2(1-\delta)[c-(p_2-p_1)x]. \tag{6}$$

⑸式が１つのプロジェクトで怠ける逸脱を防ぐインセンティブ条件であり，⑹式が２つのプロジェクトで怠ける逸脱を防ぐインセンティブ条件である．

２節の１つのプロジェクトのモデルと同様に，δ が十分１に近ければ，この２つの不等式は成立するが，どちらが有効なインセンティブ条件（より厳しい条件）なのかを見つけなければ，均衡利得の上限を得ることはできない．結論から先に述べると，有効なインセンティブ条件は⑸式である．つまり，片方のプロジェクトのみ怠ける逸脱さえ防げれば，両方のプロジェクト

で怠ける逸脱は防げる．この結果は，⑸式と⑹式の右辺を $(1-\delta)[c-(p_2-p_1)x]$ に揃えて左辺の大小を比較することで理解できる．つまり，

$$\frac{(1-p_1)^2-(1-p_2)^2}{2}-(1-p_2)(p_2-p_1)=\frac{(p_2-p_1)(2-p_1-p_2)}{2}>0$$

より，⑸式が成立するならば，⑹式が成立することが分かる．

この結果の直観は以下の通りである．両方のプロジェクトで怠けると逸脱の利益は，一つだけ怠ける時と比べて２倍に増える一方，逸脱の発見しやすさを表す尤度比は指数的に上昇する（２乗になる）ため，処罰が発動される可能性が非常に高まる．従って，両方のプロジェクトで怠けることは，片方だけ怠けるよりも得にならない．言い換えると，一つのプロジェクトだけでこっそり怠けるのが，（防ぐことが難しい）より手強い逸脱である．数値例として，$p_2=0.9$，$p_1=0.5$ を考えてみよう．このとき，１つのプロジェクトでのみ怠けた場合，努力したときと比べて，両方のプロジェクトで失敗する確率は５倍に上がる．

$$\frac{P(B,B\mid(S,W),(W,W))}{P(B,B\mid(W,W),(W,W))}=\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_2)^2}=\frac{1-p_1}{1-p_2}=5.$$

一方，２つのプロジェクトで怠けると両プロジェクトで失敗する確率は25倍に跳ね上がる．

$$\frac{P(B,B\mid(S,S),(W,W))}{P(B,B\mid(W,W),(W,W))}=\frac{(1-p_1)^2}{(1-p_2)^2}=25.$$

この数値例より，厚い関係による情報の蓄積が，今期の逸脱の純利益を大きくするような大域的な逸脱を挫くことが分かる．

⑸式が有効なインセンティブ条件だと分かったので，これを使って，⑷式を整理すると，トリガー戦略によって得られる均衡利得の上限が得られる．

$$\begin{aligned}v_i^m &\le 2(p_2x-c)-\frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)(p_2-p_1)}[c-(p_2-p_1)x]\\&=2(p_2x-c)-\frac{c-(p_2-p_1)x}{\dfrac{1-p_1}{1-p_2}-1}.\end{aligned}\tag{7}$$

⑺式も，２節と同様に，公的ランダム化の確率をうまく調整することで上限を均衡利得として達成できる．そして，δ が十分１に近いとき，⑺が０より大きいならば，上記のトリガー戦略は均衡になる．

⑺式も，⑶式と同様に，協調利得から効率性の損失を差し引いた形になっている．ここで注目すべきは，協調利得は１プロジェクト分の２倍になっているにも関わらず，効率性の損失が

１プロジェクト分しかないことである．これは，あたかも，２つのうちの１つのプロジェクトは効率性の損失なしで協調できることを表す．つまり，２つのプロジェクトを異なるパートナーで行うよりも，同じ相手と２つのプロジェクトを同時並行でやる「厚い長期的関係」の方がより大きな協調の利益を享受できる可能性を秘めている9)．

4 結び

ここまで，不完全公的観測の無限回繰り返しゲームについて，研究の問題意識といくつかの理論研究のエッセンスを紹介した．ここで紹介した以外にも，この研究テーマの理論研究は，様々なお仕置きの工夫が考案し,多くのことが明らかになっている．また，理論研究がカルテルのメカニズムの解明にも多くの貢献をしているなど，応用研究でも多くの成果を上げている．

一方で，繰り返しゲームの理論に関する先端的な研究は，さらに協調が難しい「不完全私的観測」の研究にある．不完全私的観測とは，相手の行動の推測に利用するシグナルが公的情報ではなく，私的情報になっているゲームである．共有されていない情報で，お互いに相手の行動を推測する状況では，協調を維持することは公的観測よりも難しい．この難問に対しても，経済学は多くの研究成果を上げている．今後は，私的観測モデルも含めた不完全観測モデルを利用して，様々な経済・社会問題，特に協力を必要としているにも関わらずうまくできていないような問題（例えば，気候変動に関する国際協調など）への応用研究が活発に行われると考えている．

参考文献

1）Fudenberg, D., D. Levine, and E. Maskin（1994）“The Folk Theorem with Imperfect Public Information,” *Econometrica*, 62, 997-1039.

2）Green, E. and R. Porter（1984）“Noncooperative Collusion under Imperfect Price Information,” *Econometrica*, 52, 87-100.

3）Kobayashi, H., and Ohta, K（2012）“Optimal Collusion under Imperfect Monitoring in Multimarket Contact,” *Games and Economic Behavior*, 76, 636-647.

9）厚い関係による協調利得達成には，１つの長期的関係のケースと比べて，より大きな割引因子（忍耐力）が必要であることを付け加えておく．１つのプロジェクトでの失敗を水に流すという寛容な戦略を採用するには、それなりの忍耐力が必要だからである．