論　文

ボルダルールの公理化定理に関して：Young の証明の再構成*

長　久　領　壱†

概　要

Young（1974）によるボルダルールの公理化定理の証明を再構成する。Young の証明はグラフ理論を援用するため、次の２点において理解の困難さを生み出している。第一に、投票票数をベクトル化し、ルールを線型空間上に定義し、更にこれをグラフに結びつける必要があるが、その接続の仕方が不明瞭であること、第二に、証明の一部に、多くの経済学徒にとって不案内な、グラフ理論の定理が使われていることである。

本稿では、この２点を改良する。すなわち、線型空間化を数学的により明確な形で行った上で、グラフ理論を一切使わない公理化の証明を与える。

キーワード：ボルダルール；公理化；線型代数；グラフ理論；Young

1　序論

Young（1974）によるボルダルールの公理化定理の証明を再構成する。Young の証明は一部グラフ理論に基づいている。これに対し、本稿はグラフ理論に依拠しない証明を与える。

証明は Young のそれと同じ着想に立つが、次の２点が異なっている。

1．相異なる二つの選択肢間での投票票数をベクトル化し、ルールを線型空間上に定義する必要がある。Young の場合、これを更にグラフに結びつける必要があるが、本稿の証明はこの操作を必要としない。

＊本稿は2018年度日本経済学学会秋季大会（於神戸大学）で栗原崇氏（早稲田大学）の報告（Kurihara 2018）の討論者を引き受けた際に準備したノートに基づいている。Young の証明に関しての栗原氏との意見交換は有益であった。原稿は３年前にはほぼ完成していたのであるが、その後私用にか悩殺され、刊行が遅れてしまった。ただ改めて草稿を読み直す機会に恵まれ、改訂すべき点が多々見つかったのは幸いであった。本稿がこの分野の研究を目指す研究者にとって良き資料として活用されることを期待したい。

†〒564-8680　吹田市山手町3-3-35。t940074@kansai-u.ac.jp

2．Young では主要定理の証明の一部（Young p49, See Harary for example,... のくだり）に、グラフ理論の定理を援用している。本稿ではこの方法に替えて、線型代数に関する基本的知識だけで証明する。

公理化定理は、ボルダルールが neutrality, faithfulness, consistency, cancellation を満たすただ一つのルールであることを主張する。証明で難しいのは一意性の部分である。Young（1974）でもこの部分の証明に紙面の大半を費やしている。本稿における証明の基本戦略は先の１と２の２点を除けば、Young のそれと同じである。但し構成上、証明の順序と配列は Young のそれとは一致しない。また Young において記述的に述べられている主張や命題のいくつかを、その重要性を鑑み、補題として述べた（補題１、２、４、５、６）。一意性の証明は Young の場合、一括して行われるのであるが、論理関係を明確にするため、これも複数の補題に切り分けた（補題７－11）。

証明は「consistency と cancellation を満たすルールは、選択対象同士の対ごと比較の得票数差だけで選択を決める」という主張から始まる（補題２）。よってルールの定義域は選好プロファイルの集合に替えて、選択対象同士の対ごと比較の得票数差からなるベクトルの集合をとることができる。選択対象が m 個あるので、対ごと比較の組み合わせは$\binom{m}{2}$通りある。故にベクトルは$\binom{m}{2}$次元の線型空間上にある。ただし、この空間内の全てのベクトルがプロファイルによって生み出される保証はない。しかし、そのベクトルの正の整数倍のスカラー積をとれば、それを生み出すプロファイルは必ず存在する（補題４）。投票者は潜在的には可算無限人存在し、このうち任意の有限人の集合が投票者の集合として立ち現れる。この設定がこのような操作を可能にする。この操作は有理数を係数体とする一般のベクトルに対してまで拡張できる（補題５）。従って、任意のベクトルに、この操作で対応するプロファイルでのルールの選択を対応させることによって、ルールの定義域を線型空間全体に広げることができる。これをルールの拡張と呼ぶ。以上が本稿での補題6までの流れであり、Young（1974）では p48の Proof of Theorem 1の前までがそれに対応している。ここまででは、先の１．の線型空間の構成以外は Young の証明と同じである。

さて、ルールをこのように拡張したうえで一意性の証明に入る。ここでは線型空間上のベクトルに対して、そのベクトルのボルダ数を対応させる写像を作る。証明の中では β で記号される写像である。この β 写像と先に定義した拡張されたルールは別個の概念であるが、ルールが四つの公理を満たす場合は、ルール（の拡張）は β 写像に基づいて決定を行うことが示される（補題11）。こうして、一意性の証明が完成していく。ルールと β 写像を結びつける特別なベクトルとして、$E^k(1 \le k \le m)$ と m サイクルがある。この二つの線型代数上の性質、及びこれらをルールと β 写像で移した際に成り立つ性質が明らかにされ（補題７－

10)、これらを使って証明が進んでいく。ここまでが補題７以下の展開であり、Young（1974）での p48の Proof of Theorem 1以下に対応している。

ここでの証明の基本戦略も Young のそれと、証明の順序を別として、大差ない。先の２.での違いがあるだけである。Young の p49, See Harary for example,... ではグラフと線型代数の関係に関する定理が使われている。定理の詳細に関しては、例えば Diestel Graph Theory（1997）などを参照されたい。翻訳版（2012）での p29定理1.9.6がそれである。定理の直接の帰結として、「m サイクル全ての張る空間の次元が $\binom{m}{2}-m+1$ である」ことが言え、これが証明に必要な関係である。しかし、グラフ理論に依拠しなくても、これは直接証明できる。ポイントは二つある。一つは全ての m サイクルが全ての $E^k(1 \leq k \leq m)$ と直交する（内積が０である）であること、もう一つは E^k 全ての張る空間の次元が $m-1$ であることである。この二つを証明すると部分空間の次元とその直交補空間の次元の和が空間全体の次元に等しいという線型代数でよく知られた定理を適用して次元が求まる。

このほか些細ではあるが、２点ほど本稿独自の貢献がある。

選択肢が２個の場合に関して：定理３（Young の主要結果）の証明に関連するが、Young の公理化定理の証明は選択肢が３個以上であることが暗黙裡に仮定されている。証明に使う概念である m サイクルでは $m \geq 3$ とされている。選択肢の数が２個の場合ではこの証明は通らない。そこで本稿では、選択肢が２個の場合での証明は別に与えることにした（定理２)。この場合、neutrality は不要になる。

公理の独立性：公理の独立性に関して Young は言及していない。いずれも平易ではあるが、４つの公理が互いに独立であることを示すルールの例を作った。

論文の構成について述べる。続く第２節は定義と記法であり、投票の仕組みとルール、公理が導入される。ボルダルールを定義し、ボルダルールが対ごと比較の得票数で定義可能であることを示す（補題１)。第３節で主要結果を述べる。ボルダルールが四つの公理を満たすこと、及び選択肢が２個の場合は、ボルダルールが四つの公理のうちの neutrality を除く三つで公理化できることを示す（定理１、２)。定理３は主要結果で、選択肢が三つ以上の場合、ボルダルールは四つの公理を満たすただ一つのルールであることを述べる。ただし証明は次節以降に延期される。最後に公理の独立性を示す。第４節は定理３の証明に入る前の準備である。ルールが対ごと比較に基づくこと（補題３）を受けて、ルールを線形空間上で定義された写像として構成する方法を述べ（補題４)、拡張されたルールに対する幾つか重要な性質を示す（補題５、６)。第５節で定理３の証明に入る。第６節は結論である。

2　定義と記法

2.1　モデル

集合 A の要素の個数は $\#A$ または $|A|$、集合 A と B の差は $A-B$ または A/B で表記する。有限個の選択肢（2個以上）があり、その集合を選択肢集合と呼び、A で記号する。潜在的に存在する投票者は可算無限人であり、この中の任意の有限人が集まって投票を行う。その投票者の集合を投票者集合と呼ぶ。各投票者の選好は A 上での線型順序（linear order）であると仮定する。しばしば$A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$とおき、選好を選択肢の列$a_1, a_2, ..., a_m$などと表す。この選好は a_1 を第一位、a_2 を第二位 ,..., a_m を第 m 位とする選好である。$\mathcal{L}$を A 上での線型順序全てからなる集合とする。

投票者集合 W を所与とする。プロファイル w とは W から$\mathcal{L}$への写像であり、$w(i) \in \mathcal{L}$ は、w が投票者$i \in W$ に指定する選好を表す。以下特に断らない限り、投票者集合を大文字、その上で定義されるプロファイルを小文字で表記する。

二つの投票者集合 W, W' が互いに疎であれば、プロファイル w, w' は互いに疎であるという。この場合、和 $w+w'$ をとることができる。$w+w'$ は投票者集合 $W \cup W'$ 上でのプロファイルであり、W の各メンバーに指定する選好は w のそれと一致し、W' の各メンバーに指定する選好は w' のそれと一致する。三つ以上のプロファイルの和も同様に定義する。w' が w のレプリカであるとは、w と w' が互いに疎であり、W から W' への全単射ψがあって、$w(i) = w'(\psi(i))$ for all $i \in W$が成り立つことをいう。定義から明らかなように、w が w' のレプリカでもある。w' が w の n レプリカであるとは、W' が n 個の等人数の投票者集合に分割され、その各々が w のレプリカであることを言う。このとき w' を nw と表記する。

2.2　ボルダルール

投票ルール f、以下では簡潔にルールと呼ぶ、とは各プロファイル w に対して、A の非空部分集合$f(w)$を対応させる写像である。本稿での考察の対象はボルダルールである。プロファイル w を所与とし、選択肢 $a \in A$ と投票者 $i \in W$ を任意にとる。ここで

$$B_i(a,w) = \#\{a' \in A : w \text{ において } i \text{ は } a \text{ を } a' \text{ より好む}\}$$

を i の w における a に対するボルダスコアという。そしてその合計

$$B(a,w) = \sum_{i \in W} B_i(a,w)$$

を w における a のボルダスコアと呼ぶ。ボルダルール f_B はボルダスコアの最も高い選択肢を選ぶルールである。形式的には、任意のプロファイル w に対して、

$$f_B(w) = \{a \in A : B(a, w) \geq B(b, w) \text{ for all } b \in A\} \tag{B.1}$$

となるルールである。w でのボルダスコアの最も高い選択肢のことを w でのボルダ勝者と呼ぶ。ボルダルールに関して、二つの留意事項がある。

第一に、スコアのつけ方には自由度がある。ボルダスコアに正のアフィン変換を施した値でボルダルールを定義することもできる。形式的には以下のとおりである。定数 k, h をとる。$k > 0$ であるとする。任意のプロファイル w と任意の投票者 $i \in W$、任意の選択肢 $a \in A$ に関して、$B_i'(a,w) = kB_i(a,w) + h$ 及び $B'(a,w) = \sum_{i \in W} B_i'(a,w)$ とする。このとき、$B(a,w) \geq B(b,w) \iff B'(a,w) \geq B'(b,w)$が成り立つ。

第二の留意点はより重要である。ボルダルールには別の表現、二つの選択肢間の対ごと比較のスコアの差での表現、を与えることができる。プロファイル w と二つの選択肢 a、a' を所与とする。$\pi_{aa'}(w)$は W のメンバーの中で a を a' より望ましいとする投票者の数であるとする。a の w における純ボルタスコア$\beta_a(w)$を

$$\beta_a(w) = \sum_{a' \neq a} (\pi_{aa'}(w) - \pi_{a'a}(w)) \tag{B.2}$$

と定義する。このとき

$$a \in f_B(w) \iff \beta_a(w) \geq \beta_b(w) \text{ for all } b \neq a \tag{B.3}$$

が成り立つ。つまり a が w においてボルダ勝者ならば、a は純ボルダスコアの対ごと比較においても、どの選択肢にも敗れず、その逆も真なのである。これを補題として纏めておく。$\beta_a(w) \geq \beta_b(w)$ for all $b \neq a$となる選択肢 a を w での純ボルダ勝者と呼ぶ。

補題 1　任意のプロファイル w において、w でのボルタ勝者は w での純ボルダ勝者でもあり、その逆も真である。

証明. 選択肢 a と投票者$i \in W$を任意にとる。i は自らの選好において、a を第 h_i 位にしているとしよう。以下は i の選好をイメージした図である。

$$\overbrace{\bigcirc, \cdots, \bigcirc}^{a\,\text{よりよい}}, \overset{h_i}{a}, \overbrace{\bigcirc, \cdots, \bigcirc}^{a\,\text{よりよくない}}$$

この図より $B_i(a,w) = m - h_i$ であり、また i が a より良いとする選択肢の数は $h_i - 1$ であることがわかる。二つの定数 k と h を、$k{=}2$ かつ $h{=}1{-}m$ とする。この定数で $B_i(a,w)$ をアフィン変換した値を $B_i'(a,w)$ としよう。簡単な計算で、$B_i'(a,w) = m - h_i - (h_i - 1)$ であることがわかる。つまり、$B_i'(a,w)$ は $m - h_i$ と $h_i - 1$ で表現できる。つまり、

$$B_i'(a,w) = \overbrace{m-h_i}^{a\text{ よりよくない選択肢の数}} - \overbrace{(h_i-1)}^{a\text{ よりよい選択肢の数}}$$

となっている。

ここで、

$$\sum_{i\in W}(m-h_i) = \sum_{a'\neq a}\pi_{aa'}(w)$$

及び

$$\sum_{i\in W}(h_i-1) = \sum_{a'\neq a}\pi_{a'a}(w)$$

であることを示そう。まず、$\sum_{i\in W}(m-h_i) = \sum_{a'\neq a}\pi_{aa'}(w)$であるが、次の表で考えればよい。

	a'	a''	a'''	$\cdots$	横に合計
i	0	1	1	$\cdots$	$B_i(a,w)=m-h_i$
j	1	0	0	$\cdots$	$B_j(a,w)=m-h_j$
k	0	0	1	$\cdots$	$B_k(a,w)=m-h_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
縦に合計	$\pi_{aa'}(w)$	$\pi_{aa''}(w)$	$\pi_{aa'''}(w)$	$\cdots$	$\sum_{i\in W}(m-h_i) = \sum_{a'\neq a}\pi_{aa'}(w)$

表の i, j, k 等は W に属する投票者、a' , a'' , a''' 等は a とは異なる選択肢である。i の行での数字の並び、0, 1, 1, … は i が a'' と a''' を a よりよいとし、それぞれに一票を入れ、a' はそれでないので入れなかったことを表している。ここで 0 や 1 は適当に当てはめられており、それ以上の意味はない。i にとって、a よりよい場合は 1 、そうでない場合は 0 が充てられている。他の行も同様に読む。

各行ごとに数字を合計したものが、投票者ごとのボルダ数$m-h_i$, $m-h_j$, $m-h_j$, であり、それを更に合計した値がボルダ数 $\sum_{i\in W}(m-h_i)$ である。同じく各列ごとに数字を合計したものが$\pi_{aa'}(w)$, $\pi_{aa''}(w)$, $\pi_{aa'''}(w)$であり、それを更に合計した値が $\sum_{a'\neq a}\pi_{aa'}(w)$ である。どちらの合計も表の数字 1 を全て合計して得られたのであるから、合計値は同じになる。よって $\sum_{i\in W}(m-h_i) = \sum_{a'\neq a}\pi_{aa'}(w)$ である。

一方の $\sum_{i\in W}(h_i-1) = \sum_{a'\neq a}\pi_{a'a}(w)$ は次の表で考えればよい。

	a'	a''	a'''	$\cdots$	横に合計
i	1	0	0	$\cdots$	$h_i - 1$
j	0	1	1	$\cdots$	$h_j - 1$
k	1	1	0	$\cdots$	$h_k - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
縦に合計	$\pi_{a'a}(w)$	$\pi_{a''a}(w)$	$\pi_{a'''a}(w)$	$\cdots$	$\sum\limits_{i \in W}(h_i - 1) = \sum\limits_{a' \neq a} \pi_{a'a}(w)$

数字の読み方を除いて先の表と同じに読む。今度は先と逆、つまり a よりよい選択肢には０、そうでないものには 1 が振られている。先と同様、表での数字の振り方には意味はない。各行の数字を合計すれば $h_i - 1$, $h_j - 1$, $h_k - 1$ となり、その更なる合計は $\sum\limits_{i \in W}(h_i - 1)$ である。各列の数字を合計すれば $\pi_{a'a}(w)$, $\pi_{a''a}(w)$, $\pi_{a'''a}(w)$ となり、その更なる合計が $\sum\limits_{a' \neq a} \pi_{a'a}(w)$ である。どちらの合計も表の 1 を全て合計して得られたのだから、$\sum\limits_{i \in W}(h_i - 1) = \sum\limits_{a' \neq a} \pi_{a'a}(w)$ である。

さて、以上を基に計算すると

$$
\begin{aligned}
B'(a, w) &= \sum_{i \in W} B'_i(a, w) \\
&= \sum_{i \in W} (m - h_i) - \sum_{i \in W} (h_i - 1) \\
&= \sum_{a' \neq a} \pi_{aa'}(w) - \sum_{a' \neq a} \pi_{a'a}(w) \\
&= \sum_{a' \neq a} (\pi_{aa'}(w) - \pi_{a'a}(w)) \overset{(B.2)}{\underset{\downarrow}{=}} \beta_a(w)
\end{aligned}
$$

となり、a の w におけるボルダスコアは純ボルダスコアと同じになる。以上から所望の結果を得る。 ■

以下の分析においてはボルダルールを純ボルダスコアで定義した方が便利なので、こちらを採用する。また $A = \{a_1, ..., a_m\}$ が想定されているとき、記号の簡潔化のため $\pi_{a_i a_j}$ を π_{ij} と表記する。

2.3　公理

ルールに対して四つの公理（ルールである以上、満たさねばならない規範的要請）を課す。その四つは neutrality、consistency、faithfulness、及び cancellation である[1)]。それぞれの公理の形式的定義に先立って、直観的意味を説明しよう。

1）適当な訳語が思いつかなかったので、原文のままとした。このうち neutrality と同じアイディアに立った公理は社会的選択理論の様々なコンテキストで登場する。これらは中立性と訳されることが多い。

neutrality は、一つの選択肢が選ばれるのは、その選択肢に内在する固有の物理的その他の特性からではなく、その選択肢が各投票者の選好において何番目に序列されているか、という選好における位置情報のみが理由であることを要請する。例えばあるプロファイルにおいてルールが a を選んでいるとする。他の選択肢 b を一つ任意にとる。各自の選好のランキングにおいて a と b のみを入れかえた新しいプロファイルを考える。ルールが neutrality を満たせば、この新しいプロファイルでは b を選ばなければならない。b 以外を選んだ場合には、選択において、選好における序列以外の情報が使われたことを意味する。neutrality は社会的選択において使われる情報は選好のみに限られることを要請する。いわば情報の節約性に関する要請であると解釈してよい。consistency は、二つの互いに疎な投票者集合においてルールが選ぶ選択肢集合に共通部分があるときでの要請である。その場合ルールはその二つの和の投票者集合での投票において、その共通部分のみを選ばなければならない。これが consistency である。ルールが faithfulness を満たすとは、投票者が一人だけの場合、その投票者が一番良いとする選択肢、そしてそれだけをルールは選ばなければならないことを意味する。最後に、ルールが cancellation を満たすとは、すべての選択肢の純ボルタスコアが同じ（すなわちボルタスコアが同じ）ならば、ルールは全ての選択肢を選ばなければならないことを意味する。

各公理に対してその形式的定義を与えよう。

neutrality：A 上での置換 σ を所与とする。選択肢を σ に従って置き換えれば、新しいプロファイルができる。これを $\widehat{\sigma}(w)$ と表記しよう[2)]。ルール f が neutrality を満たすとは、任意の σ と w に関して、$f(\widehat{\sigma}(w)) = \sigma(f(w))$ となることをいう。

consistency：ルール f が consistency を満たすとは、任意の互いに疎な w_1, w_2 に関して、$f(w_1) \cap f(w_2) \neq \emptyset$ ならば $f(w_1) \cap f(w_2) = f(w_1 + w_2)$ であることをいう。

faithfulness：ルール f が faithfulness を満たすとは、W が一人の投票者からなるならば、$f(w) = \{\widehat{a}\}$ となることをいう。ここで $\widehat{a}$ はその投票者の w におけるもっともよい選択肢を表す。

cancellation：ルール f が cancellation を満たすとは、任意の w に関して、$\pi_{ab}(w) = \pi_{ba}(w)$ for all a, b ならば $f(w) = A$ であることをいう。

備考1　さて、f が *consistency* を満たせば、$f(nw) = f(w)$ である。これは次のように考え

2）例えば投票者が2人で選択肢が四つ a, b, c, d であり、σ は $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$, $d \longrightarrow d$ と矢印の方向に選択肢を置換するとする。プロファイル w で1の選好が a, b, c, d, 2の選好が b, a, d, c であれば、プロファイル $\widehat{\sigma}(w)$ では二人の選好はそれぞれ、b, c, a, d、及び c, b, d, a となる。

ればよい：以下の命題の列を考える。

$$
\begin{array}{ll}
(\mathit{1}) & f(w) \cap f(w) \neq \emptyset \text{ ならば，} f(2w) = f(w). \\
(\mathit{2}) & f(w) \cap f(2w) \neq \emptyset \text{ ならば，} f(3w) = f(w). \\
\vdots & \vdots \\
(\mathit{n\text{-}2}) & f(w) \cap f((n-2)w) \neq \emptyset \text{ ならば，} f((n-1)w) = f(w). \\
(\mathit{n\text{-}1}) & f(w) \cap f((n-1)w) \neq \emptyset \text{ ならば，} f(nw) = f(w).
\end{array}
$$

consistency より、いずれの命題でも「○○ならば」が真であれば、真となる。よってドミノ倒しの要領で、(1) が真であることを言えばよい。これは自明である。

3　主要結果

3.1　ボルダルールの性質とその公理化

定理 1　ボルダルールは四つの公理全てを満たす。

証明. neutrality と faithfulness を満たすことは明らかである。

consistency：$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) \subset f_B(w_1 + w_2)$は明らかである。逆を示す。$a \in f_B(w_1 + w_2)$を任意にとる。ここで $a \notin f_B(w_1)$ であったとしてみよう（背理法）。$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) \neq \emptyset$ なので、$b \in f_B(w_1) \cap f_B(w_2)$ となる選択肢 b が存在する。すると $a \notin f_B(w_1)$ かつ $b \in f_B(w_1)$ であることから、w_1 における a のボルダスコアは b のそれよりも小さいことになる。同様に $b \in f_B(w_2)$ は、w_2 における a のボルダスコアは b のそれと同じかそれより小さいことになる。従って $w_1 + w_2$ において、a のボルダスコアは b のそれより小さいことになり、これは $a \in f_B(w_1 + w_2)$ に矛盾する。よって $f_B(w_1 + w_2) \subset f_B(w_1)$ である。同様にして $f_B(w_1 + w_2) \subset f_B(w_2)$ も言える。

cancellation：明らかに cancellation の前提が成り立てば、$\pi_{ab}(w) = \pi_{ba}(w) = \frac{|W|}{2}$ for all a, b であり、$\beta_a(w) = \sum_{a' \neq a} (\pi_{aa'}(w) - \pi_{a'a}(w)) = 0$ for all $a \in A$ が従う。補題 1 より、$f_B(w) = A$ となって所望の結果を得る。 ■

定理 2　選択肢が *2* 個の場合、ボルダルールは *faithfulness, consistency, cancellation* を満たすただ一つのルールである。

証明. 三つの公理を満たすルールを任意に取る。定理 1 を考慮すると、このルールが選ぶ選択肢集合がボルダルールが選ぶそれと一致することを示せばよい。投票者の数に関する帰納法を用いる。1 人の場合は faithfulness より明らか。$n-1$ 人まででの正しさを仮定して、n

人の場合を考える（数学的帰納法）。以下、場合分けで証明する。

ケース1．二つの選択肢に関して賛成票が同数の場合：

ルールが cancellation を満たすことから明らかである。

ケース2．同数ではない場合：

選択肢を a, b とし、a の方が票が多いとする。a を第一位にしている投票者を一人取り出し、これを i とする。i を除いた $n-1$ 人を考える。$n-1$ 人投票では a と b は賛成票が同数であるか、a の方が多いことになる。以下更に二つに分ける。

ケース2.1.　同数の場合：

cancellation より、$n-1$ 人投票で選ばれる選択肢の集合は $\{a, b\}$ であり、一方、faithfulness より i だけの投票で選ばれる選択肢の集合は $\{a\}$ である。よって consistency より、n 人の投票で選ばれる選択肢の集合は $\{a\}$ であり、これはボルダルールが選ぶ選択肢の集合と一致する。

ケース2.2.　a の方が多い場合：

$n-1$ 人投票で選ばれる選択肢の集合は $\{a\}$、一方 i だけの投票で選ばれる選択肢の集合も $\{a\}$ である。前者は帰納法の仮定、後者は faithfulness より従う。故に consistency より、n 人の投票で選ばれる選択肢の集合は $\{a\}$ であり、これはボルダルールが選ぶ選択肢集合と一致する。以上で、証明が完了した。 ■

次の定理が Young の主要結果である。

定理3　選択肢が *3* 個以上の場合、ボルダルールは *neutrality, faithfulness, consistency, cancellation* を満たすただ一つのルールである。

定理1を考慮すれば、唯一性の証明が残っている。続く各節でこの証明を行う。

3.2　公理の独立性

四つの公理のうち任意の三つを満たすルールで、ボルダルールと異なるルールは存在する。以下の表がそれを示している。

	neurality	consistency	faithfulness	cancellation
非中立的ボルダルール	no	yes	yes	yes
All or one ルール	yes	no	yes	yes
逆ボルダルール	yes	yes	no	yes
スコアリングルール	yes	yes	yes	no

例1　非中立的ボルダルール：

ある種の非厚生的規準を備えたボルタルールともいうべきルールである。このルールは、

ボルダスコア最大な選択肢が複数ある場合、但し全てが最大になるわけではない場合には、この規準を使って更なるセレクトをかけるルールである。A 上での線型順序$>_A$を$a_1 >_A a_2 >_A \cdots >_A a_{m-1} >_A a_m$と任意に一つ定める。これが非厚生的規準である。$\max f_B(w)$は$f_B(w)$ に属す選択肢で $f_B(w)$ 上で$>_A$に関して最大な選択肢であるとする。

ルール f を、任意の w に関して、

$$f(w) = \begin{cases} A & (f_B(w) = A \text{ のとき}) \\ \max f_B(w) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定義する[3)]。明らかにこのルールは *faithfulness* と *cancellation* を満たす。*neutality* を満たさないことも明らかである[4)]。*consistency* の成立は以下のとおりである：

$f(w_1) \cap f(w_2) \neq \emptyset$ とする。これは $f_B(w_1) \cap f_B(w_2) \neq \emptyset$ を意味する。二つのケースに場合分けする。

ケース *1*． $f_B(w_1 + w_2) = A$ *:*

このとき $f(w_1 + w_2) = A$ である。$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) \neq \emptyset$ とボルダルールが *consistency* を満たすことより、$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) = f_B(w_1 + w_2)$ が言える。故に $f_B(w_1) \cap f_B(w_2) = A$ であり、$f_B(w_1) = f_B(w_2) = A$ である他ない。よって $f(w_1) \cap f(w_2) = A \cap A = A \overset{f(w_1+w_2)=A}{\overset{\downarrow}{=}} f(w_1 + w_2)$ となり、所望の結果を得る。

ケース *2*． $f_B(w_1 + w_2) \neq A$

更に二つのサブケースに分ける。

ケース*2.1*　$f_B(w_1) = A$

ここで $f_B(w_2) = A$ とすると、ボルダルールが *consistency* を満たすことから、$f_B(w_1 + w_2) = A$ であり、矛盾する。故に $f_B(w_2) \neq A$ である。次の三つの関係が直ちに従う。

$$f(w_2) = \max f_B(w_2)$$
$$f(w_1) = A$$
$$\max f_B(w_2) = \max f_B(w_1 + w_2)$$

第 *1* 番目と *2* 番目の式は各々、$f_B(w_2) \neq A$、$f_B(w_1) = A$（ケース*2.1*）からの直接的帰結である。第 *3* 番目の導出は以下の通りである *:* ボルダルールが *consistency* を満たすことより、

3）正しくは、$\max f_B(w)$は$\{\max f_B(w)\}$と書くべきであるが、便宜上の都合でこのように表記した。

4）プロファイル w では投票者の数は偶数とする。w において、半数の選好は$>_A$と同じであり、残る半数は$>_A$でa_1とa_2を入れ替えた選好を持つとする。このとき、$f(w) = \{a_1\}$である。置換σはa_1とa_2を入れ替え、それ以外はそのままに保つとしよう。fが neutality を満たすとすると、$f(\widehat{\sigma}(w)) = \sigma(f(w)) = a_2$ でなければならないが、$f(\widehat{\sigma}(w)) = a_1$である。

$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) = f_B(w_1 + w_2)$ である。$f_B(w_1) = A$（ケース*2.1*）であるから、$f_B(w_2) = f_B(w_1 + w_2)$ であり、これより第3番目の式が出る。

所望の結果は以下の式変換から導かれる .

$$
\begin{aligned}
f(w_1) \cap f(w_2) &\overset{\substack{\text{2 番目の式} \\ \downarrow}}{=} f(w_2) \\
&\overset{\substack{\text{1 番目の式} \\ \downarrow}}{=} \max f_B(w_2) \\
&\overset{\substack{\text{3 番目の式} \\ \downarrow}}{=} \max f_B(w_1 + w_2) \\
&\overset{\substack{\text{ケース 2} \\ \downarrow}}{=} f(w_1 + w_2)
\end{aligned}
$$

ケース*2.2.*　$f_B(w_1) \neq A$

ケース*2.1*を考慮すると、$f_B(w_1) \neq A$ か $f_B(w_2) \neq A$ のケースだけが残っている。これより、次の四つの関係が従う。

$$
\begin{aligned}
f(w_1) &= \max f_B(w_1) \\
f(w_2) &= \max f_B(w_2) \\
\max f_B(w_1) &= \max f_B(w_2) \\
\max f_B(w_1) \cap \max f_B(w_2) &= \max f_B(w_1 + w_2)
\end{aligned}
$$

第 *1* 番目と *2* 番目の式は、$f_B(w_1) \neq A$、$f_B(w_2) \neq A$ から明らかである。第 *3* 番目は $f(w_1) \cap f(w_2) \neq \emptyset$ と第 *1*、*2* 番目の式からの直接的帰結である。第 *4* 番目の導出は次の通り：記号の便宜上、$a = \max f_B(w_1) = \max f_B(w_2)$ とおこう。$a = \max f_B(w_1 + w_2)$ を示せばよい。仮にそうでないとする（背理法）。第 *3* 番目の式より $f_B(w_1) \cap f_B(w_2) \neq \emptyset$ である。これとボルダルールが *consistency* を満たすことから、$f_B(w_1) \cap f_B(w_2) = f_B(w_1 + w_2)$ である。以上から $a \in f_B(w_1 + w_2)$ である。背理法の想定より、$b = \max f_B(w_1 + w_2)$ とすると、$b >_A a$ である。故に b は $f_B(w_1) \cap f_B(w_2)$ に属し、$b \in f_B(w_1)$ かつ $b >_A a$ で、$a = \max f_B(w_1)$ に矛盾する。以上で第 *4* 番目の式が証明できた。所望の関係は以下の式変換より従う。

$$
\begin{aligned}
f(w_1) \cap f(w_2) &\overset{\substack{\text{第 1, 2 番目の式} \\ \downarrow}}{=} \max f_B(w_1) \cap \max f_B(w_2) \\
&\overset{\substack{\text{第 4 番目の式} \\ \downarrow}}{=} \max f_B(w_1 + w_2) \\
&\overset{\substack{\text{ケース 2} \\ \downarrow}}{=} f(w_1 + w_2)
\end{aligned}
$$

例２　*All or one* ルール：

このルールは以下のように定義される：任意の w に関して、

$$
f(w) = \begin{cases} \{\hat{a}\} & \text{（}W\text{ が一人からなるとき。}\hat{a}\text{ はその投票者のベストな選択肢）} \\ \\ A & \text{（それ以外）} \end{cases}
$$

明らかに f は $consistency$ 以外すべてを満たす .

例 3　逆ボルダルール：

このルールの定義は次のとおり：任意のプロファイル w に関して、

$$a \in f(w) \Longleftrightarrow B(a,w) \leq B(b,w) \ for \ all \ b \in A.$$

明らかに f は $faithfullness$ 以外すべてを満たす。 $consistency$ の成立はボルダルールの場合と同様にして示せる：$f(w_1) \cap f(w_2) \subset f(w_1+w_2)$ は明らかである。逆を示す。$a \in f(w_1+w_2)$ を任意にとる。ここで $a \notin f(w_1)$ であったとしてみよう（背理法)。$f(w_1) \cap f(w_2) \neq \emptyset$ なので、$b \in f(w_1) \cap f(w_2)$ となる選択肢 b が存在する。すると $a \notin f(w_1)$ かつ $b \in f(w_1)$ であることから、w_1 における a のボルダスコアは b のそれよりも大きいことになる。同様に $b \in f(w_2)$ は、w_2 における a のボルダスコアは b のそれと同じかそれより大きいことになる。従って w_1+w_2 において、a のボルダスコアは b のそれより大きいことになり、これは $a \in f(w_1+w_2)$ に矛盾する。よって $f(w_1+w_2) \subset f(w_1)$ である。同様にして $f(w_1+w_2) \subset f(w_2)$ も言える。

例 4　スコアリングルール：

スコアリングルールにはいくつもの種類があるが、ここではボルダスコアの 2 乗を集計するルールを考えよう。形式的定義は以下のとおりである。任意のプロファイル w に関して、

$$a \in f(w) \Longleftrightarrow \sum_{i \in W} B_i(a,w)^2 \geq \sum_{i \in W} B_i(b,w)^2 \ for \ all \ b \in A.$$

明らかにこのルールは $neutrality$ と $faithfulness$ を満たす。$consistency$ の成立はボルダルールの場合と同様にして示される：ボルダルールでの証明での「ボルダスコア」という語を「ボルダスコアの二乗」と置き換えれば、そのまま証明になっている。次の例は $cancellation$ の不成立を示している。

$W = \{1,2\}$ とし、二人の選好は互いに正反対であるとする。例えば

1 の選好：$a_1, a_2, ..., a_m$

2 の選好：$a_m, a_{m-1}, ..., a_1$

となっているとする。任意の選択肢 a_k $(1 \leq k \leq m)$ に関して $B_1(a_k,w)^2 = (m-k)^2$ and $B_2(a_k,w)^2 = (k-1)^2$ である。もしルールが $cancellation$ を満たすならば、全ての k に関して、$(m-k)^2 + (k-1)^2$ は同じでなければならない。しかしこれは不可能である。

4 予備的考察

定理3の証明に必要な幾つかの補題を証明する。二つの小節に分ける。最初の小節ではルールが対ごと比較の得票数だけに依存することを示す（補題2）。この結果を受けて、次の小節ではプロファイルとルールを対ごと比較の得票数を成分とする線型空間の中で表現する仕掛けを構築する。

4.1 対ごと比較

任意の w と w' に関して、W から W' への全単射 ψ で $w(i)=w'(\psi(i))$ for all $i\in W$ が存在するとしよう。このとき $f(w)=f(w')$ が成り立つならば、ルール f が匿名性を満たすという。ルールが匿名性を満たせば、社会的選択は「その選好を誰が持っているのか」といった情報には依存しない。匿名性は「他の人がいうのはともかく、あの人がそういうのだからこうしよう」といった類の、人に依存する選択を許さないのである。[5)]

補題2 ルール f が *consistency* と *cancellation* を満たせば、f は匿名性を満たす。[6)]

証明. まず w' が w のレプリカである場合に関して、$f(w)=f(w')$ であることを示す。w^{-1} は w での投票者の選好を全て反対にしたプロファイルであり、w 及び w' と疎な関係にあるとする。[7)] 次の図式は $f(w)=f(w+w'+w^{-1})$ の成立を示している。

$$f(w)=f(w)\cap A \quad \overset{\substack{\text{cancellation}\\ \downarrow \\ f(w'+w^{-1})=A \\ \downarrow}}{=} \quad f(w)\cap f(w'+w^{-1}) \quad \overset{\substack{f(w)\neq\emptyset \\ \downarrow \\ \text{consistency} \\ \downarrow}}{=} \quad f(w+w'+w^{-1})$$

同じく、次の図式は $f(w')=f(w+w'+w^{-1})$ の成立を示している。

5）ここでの匿名性と同じ考えに立つ公理は広く anonimity という名で知られている。anonimity は先の neutrarily と対をなす公理である。前者は社会的選択が人に依存しないことを要請し後者は物（ないし事柄）に依存しないことを要請する。

6）多くの論脈では anonimity は公理として、つまりそれに先立つより根源的な公理はないとして、建てられるのであるが、ここでは consistency と cancellation の方が anonimity より根本的な公理であり、anonimity はこの二つから派生的に導き出されるのである。

7）構成により、w, w', w^{-1} は全て互いに疎である。

$$f(w') = f(w') \cap A \overset{\overset{\text{cancellation}}{\downarrow}\atop \overset{f(w+w^{-1})=A}{\downarrow}}{=} f(w') \cap f(w+w^{-1}) \overset{\overset{f(w')\neq\emptyset}{\downarrow}\atop \overset{\text{consistency}}{\downarrow}}{=} f(w'+w+w^{-1})$$

以上二つから $f(w)=f(w')$ が導かれる。

次に一般の場合を考える。w と w' は補題2の前提のとおりのプロファイルとする。いま w'' は w と w' のレプリカであるとしよう。先に示した関係より、$f(w)=f(w'')=f(w')$ であるから、$f(w)=f(w')$ となる。 ■

ルール f が対ごと比較に基づくとは、任意の w_1, w_2 に関して

$$\pi_{ab}(w_1) - \pi_{ba}(w_1) = \pi_{ab}(w_2) - \pi_{ba}(w_2) \text{ for all } a \neq b \tag{1}$$

であれば、$f(w_1)=f(w_2)$ となることをいう。

consistency と cancellation を満たすルールは、匿名性を満たすに留まらない。以下の補題で明らかなように、それは対ごと比較にも基づくのである。[8)]

補題 3　ルール f が *consistency* と *cancellation* を満たせば、f は対ごと比較に基づく。

証明. プロファイル w_1 と w_2 に関して（1）が成り立つとする。$f(w_1)=f(w_2)$ を言えばよい。相異なる二つの選択肢 a, b を任意にとる。各投票者は a を b より好むか、あるいはその逆であるので、

$$\begin{aligned} \pi_{ab}(w_1) + \pi_{ba}(w_1) &= |W_1| \\ \pi_{ab}(w_2) + \pi_{ba}(w_2) &= |W_2| \end{aligned} \tag{2}$$

となる。(2）を（1）に代入して、

$$2\pi_{ab}(w_1) + |W_2| = 2\pi_{ab}(w_2) + |W_1| \tag{3}$$

を得る。以下二つのケースに場合分けする。

ケース1．$|W_1| \neq |W_2|$.

一般性を失うことなく、$|W_1| - |W_2| > 0$ とおく。$n = |W_1| - |W_2|$ とすると、(3）より n は偶数である。プロファイル t とその投票者集合 T を次のように構成する。T は n 人の投票者からなり、$W_1 \cup W_2$ と共通するメンバーはいないとする。プロファイル t に関しては、T のうちの半数が $a_1, a_2, \ldots, a_m$ の順の選好を持ち、残りの半数がそれとは逆の選好 $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1$ を持つとする。当然ながら $\pi_{ab}(t) = \pi_{ba}(t) = n/2$ であり、cancellation より $f(t) = A$ である。故に $f(w_1) \cap f(t) \neq \emptyset$ なので、consistency を使い、

8）ルールが対ごと比較に基づけば、明らかに匿名性も満たす。しかし、その逆は必ずしも真ではない。補題3は consistency と cancellation を満たすルールに限ってみれば、逆も言えることを示している。

$$f(w_1+t)=f(w_1) \tag{4}$$

が成り立つ。同じく、$f(w_2)\cap f(t)\neq\emptyset$ なので、consistency を使い、

$$f(w_2+t)=f(w_2) \tag{5}$$

も成り立つ。また、その構成から、

$$|W_2\cup T|=|W_1| \text{ and } \pi_{ab}(w_2+t)=\pi_{ab}(w_1) \tag{6}$$

$$\pi_{ba}(w_2+t)=\pi_{ba}(w_1) \tag{7}$$

が従う。

⑹、⑺ の導出 : ⑺ は ⑹ の直接的帰結である。⑹ を示す。まず、前半の $|W_2\cup T|=|W_1|$ は以下の式転換より明らかである。

$$|W_2\cup T| \overset{\substack{W_2 \text{と } T \text{ は互いに疎} \\ \downarrow}}{=} |W_2|+|T| \overset{\substack{|T|=n \\ \downarrow}}{=} |W_2|+n=|W_2|+|W_1|-|W_2|=|W_1|.$$

後半は以下の式変換から従う。

$$\begin{aligned}\pi_{ab}(w_2+t) &\overset{\substack{W_2 \text{と } T \text{ は互いに疎} \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_2)+\pi_{ab}(t)\\ &\overset{\substack{(3) \\ \downarrow \\ \pi_{ab}(w_2)=\pi_{ab}(w_1)-\frac{n}{2} \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_1)-\frac{n}{2}+\pi_{ab}(t) \overset{\substack{\pi_{ab}(t)=\frac{n}{2} \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_1).\end{aligned}$$

プロファイル u, v は w_1 のレプリカであり、互いに疎であるとする。更に、U と V は $W_1\cup W_2\cup T$ と交わりを持たないとする。プロファイル v^{-1} は v での選好をすべて逆にして得られるとする。このとき、

$$\pi_{ab}(w_2+t+v^{-1})=\pi_{ba}(w_2+t+v^{-1}). \tag{8}$$

が成り立つ。

⑻ の導出：まず、以下の式変換より、$\pi_{ab}(w_2+t+v^{-1})=\pi_{ab}(w_1+v^{-1})$が導かれる。

$$\begin{aligned}\pi_{ab}(w_2+t+v^{-1}) &\overset{\substack{W_2\cup T \text{ と } V \\ \text{互いに疎} \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_2+t)+\pi_{ab}(v^{-1})\\ &\overset{\substack{(6) \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_1)+\pi_{ab}(v^{-1}) \overset{\substack{W_1 \text{と } V \\ \text{互いに疎} \\ \downarrow}}{=} \pi_{ab}(w_1+v^{-1})\end{aligned}$$

同様に、以下の式変換より、$\pi_{ba}(w_2+t+v^{-1})=\pi_{ba}(w_1+v^{-1})$が導かれる。

$$\pi_{ba}(w_2+t+v^{-1}) \overset{\substack{W_2\cup T\text{ と }V\\ \text{互いに疎}\\ \downarrow}}{=} \pi_{ba}(w_2+t)+\pi_{ba}(v^{-1})$$
$$\overset{\substack{(7)\\ \downarrow}}{=} \pi_{ba}(w_1)+\pi_{ba}(v^{-1}) \overset{\substack{W_1\text{と }V\\ \text{互いに疎}\\ \downarrow}}{=} \pi_{ba}(w_1+v^{-1})$$

v^{-1}の定義より、$\pi_{ab}(w_1+v^{-1})=\pi_{ba}(w_1+v^{-1})$なので、この二つの式より、(8) が従う。

(8) と cancellation より、

$$f(w_2+t+v^{-1})=A=f(u+v^{-1}) \tag{9}$$

は明らかである。

そして、(9) は

$$f(w_2+t)=f(u) \tag{10}$$

を導く。その導出は以下のとおりである。まず、$f(u)=f(u+w_2+t+v^{-1})$が以下の式変換から従う。

$$f(u)=f(u)\cap A \overset{\substack{(9)\\ \downarrow}}{=} f(u)\cap f(w_2+t+v^{-1})$$
$$\overset{\substack{f(u)\neq\emptyset\\ \downarrow\\ \text{consistency}\\ \downarrow}}{=} f(u+w_2+t+v^{-1})$$

同様に、$f(w_2+t)=f(u+w_2+t+v^{-1})$が以下の式変換から従う。

$$f(w_2+t)=f(w_2+t)\cap A \overset{\substack{(9)\\ \downarrow}}{=} f(w_2+t)\cap f(u+v^{-1})$$
$$\overset{\substack{f(w_2+t)\neq\emptyset\\ \downarrow\\ \text{consistency}\\ \downarrow}}{=} f(u+w_2+t+v^{-1})$$

この二つより、(10) が言える。

最後に、以下の式変換がケース 1 での証明を完成させる。

$$f(w_1) \overset{\substack{\text{補題 }2\\ \downarrow}}{=} f(u) \overset{\substack{(10)\\ \downarrow}}{=} f(w_2+t) \overset{\substack{(5)\\ \downarrow}}{=} f(w_2)$$

ケース 2．$|W_1|=|W_2|$.

w_1に二人の投票者を加える。その二人の選好は互いに正反対であるとする。こうしてできたプロファイルを w_1' とすると、w_1' と w_2 の間でも (1) が成り立ち、ケース 1 に帰着する。よって、

$$f(w_1')=f(w_2)$$

である。さて、加えた二人のみから成るプロファイルを u としよう。consistency と cancellation より、

$$f(w_1)=f(w_1)\cap A \overset{\text{cancellation}}{\overset{\downarrow}{=}} f(w_1)\cap f(u) \overset{\text{consistency}}{\overset{\downarrow}{=}} f(w_1+u)=f(w_1')$$

である。この二つより、$f(w_1)=f(w_2)$となる。■

4.2　線型空間化

ルールが対ごと比較に基づくならば、ルールはプロファイルの代わりに、対ごと比較での得票数を用いて定義できる。以下ではプロファイルを、対ごと比較での投票数を成分とするベクトルで表すことを考える。

Q は有理数の集合とする。$\binom{m}{2}$次元の線型空間 $Q^{\binom{m}{2}}$を用意する。この空間の係数体は Q である。記号の便宜上、この空間を$\mathcal{D}$と記法する。任意のベクトル $D\in\mathcal{D}$ は、通常の表記に従えば$D=(D_1,\ldots,D_{\binom{m}{2}})$であるが、$\binom{m}{2}$は A から相異なる二つの選択肢を取り出す組み合わせの数であることを考慮すると、以下のような表記が便利である。組み合わせを順に並べ (1, 2), (1, 3),..., (1, m), (2, 3),..., (2, m),..., ($m-1$, m) とおき、D の各座標1, 2,..., $\binom{m}{2}$を (1, 2), (1, 3),..., ($m-1$, m) と同一視するのである。よって $D=(D_{(i,j)})_{1\leq i<j\leq m}$ などと表記される。ここで $D_{(i,j)}$ を D の第(i,j)成分と呼ぶことにする。(i,j)は a_i と a_j を取り出す組み合わせである。e^{ij} は単位ベクトルである。その第(i,j)成分は１、それ以外の成分は０である。成分表示においては、常に $i<j$ であることにも留意されたい。

プロファイル w をこの線型空間内でのベクトルとして表現する。w の投票表現 $D(w)\in\mathcal{D}$ を

$$D(w)=\sum_{1\leq i<j\leq m}\left(\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\right)e^{ij} \tag{D.1}$$

で与える。$D(w)$ を縦ベクトルで表記をすると、

$$D(w)=\begin{bmatrix}\pi_{12}(w)-\pi_{21}(w)\\ \vdots \\ \pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\\ \vdots \\ \pi_{m-1m}(w)-\pi_{mm-1}(w)\end{bmatrix}$$

となる。$D(w)$ はプロファイル w のもとで相異なる二つの選択肢 a_i、a_j の間で対ごと比較を行い、得票差を縦に並べたリストに他ならない。但し選択肢の比較は $i<j$ の順で固定されている。プロファイルの和 w_1+w_2 に関しては、$D(w_1+w_2)=D(w_1)+D(w_2)$ が成り立つ。三つ以上のプロファイルの和も同様の式が成り立つ。特にレプリカ nw に関しては $D(nw)=nD(w)$が成り立つ。

$D\in\mathcal{D}$ を所与とする。プロファイル w が $D\in\mathcal{D}$ に投票構造を与えるとは、$D=D(w)$、

すなわち

$$D=\sum_{1\leq i<j\leq m}\left(\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\right)e^{ij} \tag{D.2}$$

が成り立つことをいう。すなわち D の各(i,j)成分の値が $\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)$ となるとき、w が $D\in D$ に投票構造を与えるというのである。

D.2のより直観的な表記を考える。任意の $i<j$ に関して、$(a_i,a_j),(a_j,a_i)$を

$$(a_i,a_j)=e^{ij},(a_j,a_i)=-e^{ij}$$

と定める。これより、$(a_j,a_i)=-(a_i,a_j)$である。このとき D.2は

$$D=\sum_{i\neq j}\pi_{ij}(w)(a_i,a_j) \tag{D.3}$$

とも表現できる。証明は以下のとおり：$\sum_{i\neq j}\pi_{ij}(w)(a_i,a_j)$ は $\mathcal{D}$ に属するベクトルである。その第(i,j)成分は $\pi_{ij}(w)(a_i,a_j)+\pi_{ji}(w)(a_j,a_i)$ である。これを計算すると

$$\begin{aligned}\pi_{ij}(w)(a_i,a_j)+\pi_{ji}(w)(a_j,a_i)&=\pi_{ij}(w)e^{ij}-\pi_{ji}(w)e^{ij}\\&=\left(\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\right)e^{ij}\end{aligned}$$

であり、D.2の右辺の第(i,j)成分に一致する。

数学的には（D.2）の方が標準ではある。しかし、対ごと比較で何票がどちらの選択肢の方に入ったか、という情報を直観的に掴めるのは（D.3）の方である。以下では状況に応じて二つを使い分けていく。

任意の $D\in D$ も（D.3）に従った表記ができる。まず $D=\sum_{1\leq i<j\leq m}q_{ij}e^{ij}$ と表現できることは明らかである。ここで q_{ij} は有理数である。そこで、各 $i<j$ に関して、$q_{ij}e^{ij}=q_{ij}(a_i,a_j)=q_{ij}(a_i,a_j)+0(a_j,a_i)$なので、$q_{ji}=0$ とおくと、

$$D=\sum_{i\neq j}q_{ij}(a_i,a_j) \tag{D.4}$$

と表現してよい。要するに、$\sum_{1\leq i<j\leq m}q_{ij}e^{ij}$ での各 q_{ij} に、$q_{ji}=0$ となる q_{ji} を加えて、(D.4)を定義するのである。以上の構成からわかるように、この表記の仕方は一意である。この表記も以下で使用する。

何らかのプロファイルによって投票構造が与えられる D の集合を D' とする。$D'\subset D$ ではあるが、$D'=D$ ではない。しかし次の関係が成り立つ。

補題 4　任意の$D\in\mathcal{D}$に関して、正の整数 n があって nD に対して投票構造を与えるプロファイル w が存在する、すなわち、$D(w)=nD$ となるプロファイル w が存在する：D に投票構造を与えることはできなくても、D のある正の整数倍のベクトルに対しては投票構造

を与えることが可能なのである。このときも、w は D に投票構造を与える、と呼ぶ。

証明. 段階に分けて証明する。$\mathcal{D}$での零ベクトル、単位ベクトル、および単位ベクトルにマイナスをかけたもの、等々に対して補題が成り立つことを順次示し、そして最終的に一般のベクトルへと証明を広げていく。

ステップ1．$D=0$に関して補題は成り立つ。

プロファイル w は二人の投票者から構成され、彼らの選好は互いに正反対であるとする。例えば

$$\text{投票者1：} a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m$$
$$\text{投票者2：} a_m, a_{m-1}, ..., a_2, a_1$$

であるとする。相異なる任意の二つの選択肢 a_i, a_j に関して、$\pi_{ij}(w) = 1 = \pi_{ji}(w)$であるので、

$$D = 0 = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\pi_{ij}(w) \overset{\substack{\text{全て }0\\ \downarrow}}{-} \pi_{ji}(w) \right) e^{ij} = D(w)$$

となり、w は（D.2）を満たす。以上で証明は完成である。また、w は D の任意の正数倍のベクトル nD に対しても投票構造を与えることにも留意されたい（以下の証明で使う）。

ステップ2．$D = e^{ij}$ に関して補題は成り立つ。

ステップ1でのプロファイルにおいて、投票者1の選好では a_i をトップに、a_j をその次に配置換えし、投票者2の選好においては a_i を下から2番目に、そして a_j をボトムに配置換えする。このプロファイルを w としよう。w は以下の表のとおりである。

$$\text{投票者1：}\quad a_i, a_j, \overbrace{a_1, ..., a_m}^{a_i, a_j\text{は除く}}$$
$$\text{投票者2：}\quad \overbrace{a_m, ..., a_1}^{a_i, a_j\text{は除く}}, a_i, a_j$$

対ごと比較の得票数は以下のとおりとなる：

$$\pi_{ij}(w) = 2$$
$$\pi_{ji}(w) = 0$$

この二つ以外は全て1

よって $D(w)$ を計算すると、

$$D(w) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w) \right) e^{ij} = 2e^{ij} = 2D$$

となり、w は$2D$ に投票構造を与えることとなり、証明は完了する。

ステップ３．$D=-e^{ij}$ に関して補題は成り立つ。

ステップ２でのプロファイルで二人の選好において a_i と a_j の位置を入れ替えたものを w とする。すなわち、

$$\begin{array}{ll} \text{投票者1：} & a_j, a_i, \overbrace{a_1, \ldots, a_m}^{a_i, a_j \text{は除く}} \\ \text{投票者2：} & \overbrace{a_m, \ldots, a_1}^{a_i, a_j \text{は除く}}, a_j, a_i \end{array}$$

対ごと比較の得票数は以下のとおりとなる：

$$\pi_{ij}(w)=0$$
$$\pi_{ji}(w)=2$$

この二つ以外は全て１

よって $D(w)$ を計算すると、

$$D(w)=\sum_{1\leq i<j\leq m}\left(\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\right)e^{ij}=-2e^{ij}=2(-e^{ij})=2D$$

となり、w は$2D$ に投票構造を与えることとなり、証明は完了する。

ステップ４．$D=ke^{ij}$（k は正の整数）に関して補題は成り立つ。

ステップ２でのプロファイルの k レプリカを w としよう。対ごと比較の得票数は以下のとおりとなる：

$$\pi_{ij}(w)=2k$$
$$\pi_{ji}(w)=0$$

この二つ以外は全て k

よって$D(w)$を計算すると、

$$D(w)=\sum_{1\leq i<j\leq m}\left(\pi_{ij}(w)-\pi_{ji}(w)\right)e^{ij}=2ke^{ij}=2D$$

となり、w は$2D$ に投票構造を与えることとなり、証明は完了する。

ステップ５．$D=ke^{ij}$（k は負の整数）に関して補題は成り立つ。

ステップ３でのプロファイルの k レプリカを w としよう。対ごと比較の得票数は以下のとおりとなる：

$$\pi_{ij}(w)=0$$
$$\pi_{ji}(w)=-2k$$

この二つ以外は全て $-k$

よって $D(w)$ を計算すると、

$$D(w) = \sum_{1 \le i < j \le m} \left(\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w)\right) e^{ij} = 2ke^{ij} = 2D$$

となり、w は$2D$ に投票構造を与えることとなり、証明は完了する。

ステップ6．成分がすべて整数である D に関して、補題が成り立つ。

$D = \sum_{1 \le i < j \le m} k_{(i,j)} e^{ij}$としよう。ここで$k_{(i,j)}$は D の第(i,j)成分であり、すべて整数である。各$k_{(i,j)}e^{ij} \in \mathcal{D}$に対して、$k_{(i,j)}$の値が0、正、負に応じて、ステップ1、ステップ4、ステップ5のプロファイルをとる。それを$w^{(i,j)}$としよう。これまでの証明から、$D(w^{(i,j)}) = 2k_{(i,j)}e^{ij}$が全ての$w^{(i,j)}$に対して成り立っている（ステップ1での留意事項も参照されたい）。全ての$w^{(i,j)}$の和$w = \sum_{1 \le i < j \le m} w^{(i,j)}$をとる。これが求めるプロファイルである。証明は以下の式転換から従う。

$$\begin{aligned}
D(w) &= \sum_{1 \le i < j \le m} \left(\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w)\right) e^{ij} \\
&= \sum_{1 \le i < j \le m} \left(\pi_{ij}(w^{(i,j)}) - \pi_{ji}(w^{(i,j)})\right) e^{ij} \\
&= \sum_{1 \le i < j \le m} D\left(w^{(i,j)}\right) \\
&= \sum_{1 \le i < j \le m} 2k_{(i,j)} e^{ij} \\
&= 2 \sum_{1 \le i < j \le m} k_{(i,j)} e^{ij} \\
&= 2D
\end{aligned}$$

ここで、一段目から二段目への式転換が可能なのは、任意の$i < j$に関して、$\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w) = \pi_{ij}(w^{(i,j)}) - \pi_{ji}(w^{(i,j)})$であるからである。$w^{(i,j)}$以外のプロファイルも w の定義に参加しているが、これらのプロファイルは$\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w)$の計算には影響しない。例えば$w^{(i',j')}$, $i' \neq i$または$j' \neq j$、では、これまでのステップの計算で分かるように$\pi_{ij}(w^{(i',j')}) - \pi_{ji}(w^{(i',j')}) = 0$である。

ステップ7．任意のベクトル $D \in \mathcal{D}$ に関して、補題は成り立つ。

D の第(i,j)成分は、二つの整数 p_{ij}、q_{ij} に関して $\frac{p_{ij}}{q_{ij}}$ と表すことができる。q をすべての$|q_{ij}|$の積であるとする。ステップ6より、あるプロファイル w と正の整数 n があって$D(w) = nqD$となる。nq も正の整数であるから、所望の結果を得る。■

かくして、ルール f は投票表現の集合を定義域とすることが可能となった。以下では f を線型空間全体、すなわち$\mathcal{D}$上で定義できるように拡張する。f の $\mathcal{D}$ 上への拡張 $\widehat{f}$ を次のように定義する。任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して、$\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(D) = f(w)\ s.t.\ D(w) = nD\ \exists n \tag{D.5}$$

とする。w の存在は補題4によって保証されている。ルール f が consistency と cancellation を満たせば、$\widehat{f}$ は w の選択には依存しない：w 以外の w' があって、ある正の整数 n' に関して $D(w') = n'D$ であったとしてみる。$f(w) = f(w')$ を示せばよい。w のレプリカ $n'w$ と、w' のレプリカ nw' を考えると、

$$D(n'w) = n'D(w) \quad \overset{D(w)=nD}{\overset{\downarrow}{=}} \quad n'nD \quad \overset{n'D=D(w')}{\overset{\downarrow}{=}} \quad nD(w') = D(nw')$$

であり、$D(n'w) = D(nw')$ となる。f は対ごと比較に基づく（補題3）から、$f(n'w) = f(nw')$ である。また $f(n'w) = f(w)$ かつ $f(nw') = f(w')$ となる（2.3節の備考1）。故に $f(w) = f(w')$ である。

補題5　ルール f は *consistency* と *cancellation* を満たすとする。このとき、任意の正の有理数 λ に関して、$\widehat{f}(\lambda D) = \widehat{f}(D)$。

証明. まず、λ が正の整数の場合について証明する。D.5より、プロファイル w と正の整数 n があって、$\widehat{f}(D) = f(w), D(w) = nD$ が成り立っている。一方、

$$D(\lambda w) = \lambda D(w) \quad \overset{D(w)=nD}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \lambda nD = n\lambda D$$

なので、$D(\lambda w) = n\,(\lambda D)$ である。よって

$$\widehat{f}(\lambda D) \overset{D.5}{\overset{\downarrow}{=}} f(\lambda w) \overset{\text{備考 1}}{\overset{\downarrow}{=}} f(w)$$

となる。故に $\widehat{f}(\lambda D) = f(w) = \widehat{f}(D)$ となり、正の整数の場合での証明が完了した。

次に、一般の場合での証明を行う。D.5により、プロファイル w と正の整数 n があって、$\widehat{f}(\lambda D) = f(w), D(w) = n\lambda D$ となる。ここで $\lambda = \frac{p}{q}$, p と q は正の整数、とおくと、$\frac{qD(w)}{np} = D$ である。w のレプリカ qw を考えると、$D(qw) = qD(w)$、つまり $D(w) = \frac{D(qw)}{q}$ である。これを先の $\frac{qD(w)}{np} = D$ に代入して、$\frac{D(qw)}{np} = D$、つまり $D(qw) = npD$ となる。故に

$$f(w) \overset{\text{備考 1}}{\overset{\downarrow}{=}} f(qw) \quad \overset{\overset{D(qw)=npD}{\downarrow}}{\overset{D.5}{\overset{\downarrow}{=}}} \quad \widehat{f}(npD) \quad \overset{\text{正の整数の場合}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \widehat{f}(D)$$

よって $f(w) = \widehat{f}(D)$ であり、先の $\widehat{f}(\lambda D) = f(w)$ と併せて、$\widehat{f}(\lambda D) = \widehat{f}(D)$ となり、所望の結果を得る。 ■

consistency も f の拡張に遺伝する。

補題 6　ルール f は *consistency* と *cancellation* を満たすとする。このとき、$\widehat{f}$ に関して以下の性質が成り立つ。

任意の $D^1, D^2 \in \mathcal{D}$ に関して、$\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) \neq \emptyset$ ならば、$\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) = \widehat{f}(D^1+D^2)$。

三つ以上に関しても、この関係は成り立つ。

証明. $\widehat{f}$ の定義より、プロファイル w^1、w^2、整数 n^1, n^2 が存在して、$\widehat{f}(D^1) = f(w^1)$、$D(w^1) = n^1 D^1$、かつ $\widehat{f}(D^2) = f(w^2)$、$D(w^2) = n^2 D^2$、が成り立つ。補題 2 より w^1、w^2 に対応する投票者集合は互いに疎であるとしてよい。

補題 6 は以下の式変換から従う。

$$\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) = f(w^1) \cap f(w^2) \overset{\text{備考 1}}{\overset{\downarrow}{=}} f(n^2 w^1) \cap f(n^1 w^2)$$

$$\overset{\text{consistency}}{\overset{\downarrow}{=}} f(n^2 w^1 + n^1 w^2) \overset{D(n^2 w^1 + n^1 w^2) = n^1 n^2 (D^1 + D^2)}{\overset{\downarrow}{\overset{D.5}{\overset{\downarrow}{=}}}} \widehat{f}(D^1 + D^2).$$

三つ以上の場合は次のとおり：

$D^1, ..., D^n \in \mathcal{D}$ に関して、$\widehat{f}(D^1) \cap \cdots \cap \widehat{f}(D^n) \neq \emptyset$ とする。$\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) \neq \emptyset$ なので $\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) = \widehat{f}(D^1+D^2)$ である。故に $\widehat{f}(D^1+D^2) \cap \widehat{f}(D^3) \neq \emptyset$ なので、$\widehat{f}(D^1 + D^2) \cap \widehat{f}(D^3) = \widehat{f}(D^1 + D^2 + D^3)$ である。先に示した $\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) = \widehat{f}(D^1+D^2)$ より $\widehat{f}(D^1) \cap \widehat{f}(D^2) \cap \widehat{f}(D^3) = \widehat{f}(D^1+D^2+D^3)$ である。この手順を繰り返せばよい。 ■

以上で準備が完了した。次節で定理 3 の証明を始める。

5　定理 3 の証明

四つの公理を満たすルール f を任意にとる。これがボルダルールであることをいえばよい。$\widehat{f}$ は f の拡張である。証明には三つの鍵概念がある。まず第一の鍵概念を導入しよう。$E^k \in D, (1 \leq k \leq m)$ を

$$E^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} 1(a_k, a_j) \tag{1}$$

とする。これは書き換えると、

$$E^k = 1(a_k, a_1) + \cdots + 1(a_k, a_{k-1}) + \overbrace{1(a_k, a_k)}^{\text{除く}} + 1(a_k, a_{k+1}) + \cdots + 1(a_k, a_m)$$

となっている。E^kは$\mathcal{D}$内のベクトルとして、第$(1,k),...,(k-1,k)$成分が全て-1、第$(k,k+1)$, $...,(k,m)$成分が全て１、残りの成分は全て０となっている。

E^kは一つの投票構造を与える。これをルールの拡張$\widehat{f}$で写像した場合にどの選択肢が選ばれるか、が問いとしてある。次の補題７はこの問いに対する答えである。

補題７　各$k\,(1 \leq k \leq m)$に関して、

$$\widehat{f}(E^k) = \{a_k\} \tag{2}$$

及び

$$\widehat{f}\left(\sum_{i \leq k} E^i\right) = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \tag{3}$$

が成り立つ。

証明.（2）を示す。二人の投票者から構成されるプロファイルwを、以下のようにとる。二人ともにa_kをトップにし、それ以外の選択肢に関する選好は互いに逆向きになっているとする。例えば

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{一人の選好：} & a_k, & a_1, & a_2, & ..., & a_{k-1}, & a_{k+1}, & ..., & a_{m-1}, & a_m \\ \text{もう一人の選好：} & a_k, & a_m, & a_{m-1}, & ..., & a_{k+1}, & a_{k-1}, & ..., & a_2, & a_1 \end{array}$$

とする。

wによって与えられる投票構造$D(w)$を（D.3）に従って計算すると、

$$D(w) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} 2(a_k, a_j)$$

である。計算は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} D(w) &= \sum_{i \neq j} \pi_{ij}(w)(a_i, a_j) \\ &= \overbrace{\sum_{k \neq j}^{m} \pi_{kj}(w)(a_k, a_j)}^{i\text{ が }k\text{ である項の合計}} + \overbrace{\sum_{i \neq k}^{m} \pi_{ik}(w)(a_i, a_k)}^{j\text{ が }k\text{ である項の合計}} + \overbrace{\sum_{i \neq k, j \neq k}^{m} \pi_{ij}(w)(a_i, a_j)}^{\text{それ以外の項の合計}} \end{aligned}$$

iがkである項は全て$2(a_k, a_j)$、jがkである項はすべて０である。それ以外の項はiとjを一組のペアにして、$\pi_{ij}(w)(a_i, a_j) + \pi_{ji}(w)(a_j, a_i)$ごとに分類できる。このペアは全て０である。これより、所望の結果を得る。

よって、wは$E^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} 1(a_k, a_j)$に投票構造を与える。故に、$\widehat{f}\left(E^k\right) = f(w)$である。次に$f(w) = \{a_k\}$を示す。$w$での２人を切り離し、一人からなるプロファイルを二つ作る。

faithfulness より、どちらでも f は a_k のみを選ぶ。故に consistency より、$f(w)=\{a_k\}$ である。先に示した $\widehat{f}\left(E^k\right)=f(w)$ と合わせると、$\widehat{f}\left(E^k\right)=\{a_k\}$ を得る。以上で（2）の証明が完成した。

（3）を示す。まず $\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)\subset\{a_1,a_2,...,a_k\}$ を示す。この証明は $m-k$ に関する帰納法に基づく。詳細を予め説明しておく。まず $m-k=0$ の場合を証明する。次に一般の m と k について証明する。この時 $m-k$ より、差が小さくなる全ての $m', k', m'', k'', ...$ ここで $m'-k', m''-k''$ は全て $m-k$ より小さい、に関して（3）が証明されていると想定する。これがここでの帰納法である。

差が0のとき。$k=m$ なので、各 $(a_i,a_j), 1\le i,j\le k$、は $\sum_{i\le k}E^i$ の中に一回だけ登場する。(a_j,a_i) も然りである。両者のウエイトは1であることを考慮すれば、$\sum_{i\le m}E^i$ に投票構造を与えるプロファイル w として、2人の投票者からなり、互いに正反対の選好を持つ場合をとることができる。cancellation より $f(w)=A$ である。よって $\widehat{f}(\sum_{i\le m}E^i)=A$ となり、所望の結果を得る。

差が正の場合を考える。その差を $m-k$ で与えよう。まず $\sum_{i\le k}E^i$ に投票構造を与えるプロファイル w を次のように構成する。各 $E^i, i\le k,$ に投票構造を与えるプロファイルは、(2) で証明したとおり、二人の投票者から構成される以下のようなものであった。

$$\text{一人の選好：}\quad a_i,\quad \overbrace{a_1,...,a_{k-1},a_k}^{a_i\text{は除く}},\quad a_{k+1},...,a_{m-1},a_m$$

$$\text{もう一人の選好：}\quad a_i,\quad a_m,a_{m-1},...,a_{k+1},\quad \overbrace{a_k,a_{k-1},...,a_1}^{a_i\text{は除く}}$$

そこで、$i\le k$ となる E^i 毎に、このようなプロファイルを取り、その和を w とすればよい。

さて、$\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)\subset\{a_1,a_2,...,a_k\}$ の証明に取り掛かる。そうでないとしよう（背理法）。ある $j>k$ で $a_j\in\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)$ であるとする。A 上の置換 σ を次のとおり定義する。σ は $a_1,...,a_k$ は動かさない。$a_{k+1},...,a_m$ は一つずつ右にずらす。つまり σ は選択肢を $a_{k+1}\longrightarrow a_{k+2}\longrightarrow a_{k+3}\longrightarrow\cdots\longrightarrow a_{m-1}\longrightarrow a_m\longrightarrow a_{k+1}$ の矢印に従って選択肢を置換する。このような置換に従って w からプロファイル $\widehat{\sigma}(w)$ を作る。構成から明らかなように、$\widehat{\sigma}(w)$ も $\sum_{i\le k}E^i$ に投票構造を与える。これは次の要領で確認できる。プロファイル $\widehat{\sigma}(w)$ は、先の二人のペアに対して以下の選好を割り当てる。

$$\text{一人の選好：}\quad a_i,\quad \overbrace{a_1,\ldots,a_{k-1},a_k}^{a_i\text{は除く}},\quad a_{k+2},\ldots,a_m,a_{k+1}$$

$$\text{もう一人の選好：}\quad a_i,\quad a_{k+1},a_m,\ldots,a_{k+2},\quad \overbrace{a_k,a_{k-1},\ldots,a_1}^{a_i\text{は除く}}$$

明らかに、このプロファイルが与える投票構造は E^i である。これがどの E^i に対しても成り立つので、$\widehat{\sigma}(w)$ も $\sum_{i\le k}E^i$ に投票構造を与えることが言える。

f が neutrality を満たすから、$a_{j+1}\in f(\widehat{\sigma}(w))$、$a_j$ が a_m の場合は$a_{j+1}=a_{k+1}$、である。以上の置換操作に基づく議論を何回か繰り返し、$a_{k+1}\in f(\widehat{\sigma}(w))$ かつ $\widehat{\sigma}(w)$ も $\sum_{i\le k}E^i$ に投票構造を与えるとしてよい。故に $a_{k+1}\in\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)$である。故に、

$$\widehat{f}\left(\sum_{i\le k+1}E^i\right)\overset{\text{補題 6}}{\overset{\downarrow}{=}}\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)\cap\widehat{f}\left(E^{k+1}\right)\overset{(2)}{\overset{\downarrow}{=}}\{a_{k+1}\}.$$

補題 6 の適用は、$a_{k+1}\in\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)$と（2)、$\widehat{f}(E^{k+1})=\{a_{k+1}\}$、の二つから可能となることに留意されたい。以上から、$\widehat{f}\left(\sum_{i\le k+1}E^i\right)=\{a_{k+1}\}$が従う。一方、帰納法の想定は、$\widehat{f}\left(\sum_{i\le k'}E^i\right)=\{a_1,a_2,\ldots,a_{k'}\}$が m' と k' の差が $m-k$ より小さいければ成り立つことを意味する。m と $k+1$の差は明らかにこの条件を満たすので、これは矛盾である。以上から、$\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)\subset\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ であることがわかった。

次に＝であることを示す。$a_i\in\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)$であるとする。先に証明した⊂の関係より

$$a_i\in\widehat{f}\left(\sum_{i\le k}E^i\right)\subset\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$$

となっている。

A 上の置換 σ' を次のとおり定義する。まず σ' は $a_{k+1},\ldots,a_m$ は動かさない。$a_1,\ldots,a_k$は一つずつ右にずらす。つまり σ' は$a_1\longrightarrow a_2\longrightarrow a_3\longrightarrow\cdots\longrightarrow a_{k-1}\longrightarrow a_k\longrightarrow a_1$の矢印に従って置換する。このような置換に従って w からプロファイル$\widehat{\sigma}'(w)$を作る。$\widehat{\sigma}'(w)$ も $\sum_{i\le k}E^i$ に投票構造を与える。これは次のようにして確認できる。

各 E^i、$i \le k$、に投票構造を与えるプロファイルの一つは、(2) の証明で使った、二人の投票者から構成される以下のようなものであった。そしてこれらの和 w が $\sum_{i\le k} E^i$ に投票構造を与えるのであった。

$$\begin{array}{llll} \text{一人の選好：} & a_i, & \overbrace{a_1,\ldots,a_{k-1},a_k}^{a_i\text{は除く}}, & a_{k+1},\ldots,a_{m-1},a_m \\ \text{もう一人の選好：} & a_i, & a_m,a_{m-1}\ldots,a_{k+1}, & \overbrace{a_k,a_{k-1},\ldots,a_1}^{a_i\text{は除く}} \end{array}$$

これが σ' によって、次のように変換される。

$$\begin{array}{llll} \text{一人の選好：} & a_{i+1}, & \overbrace{a_2,\ldots,a_k,a_1}^{a_{i+1}\text{は除く}}, & a_{k+1},\ldots,a_{m-1},a_m \\ \text{もう一人の選好：} & a_{i+1}, & a_m,a_{m-1},\ldots,a_{k+1}, & \overbrace{a_1,a_k,\ldots,a_2}^{a_{i+1}\text{は除く}} \end{array}$$

ただし、$i=k$ ならば、$i+1=1$。

このプロファイルでは二人が a_{i+1} をトップにし、それ以外の選択肢に関する選好は互いに正反対となっている。よってこのプロファイルの与える投票構造は E^{i+1} に他ならない。以上のことは任意の E^i について成り立つので、σ' によって$E^1, E^2, \ldots, E^{k-1}, E^k$はそれぞれ$E^2, E^3, \ldots, E^k, E^1$となり、和を取れば同じになる。

以上から、

$$a_{i+1} \overset{\substack{\text{neutrality}\\ \downarrow}}{\in} f(\hat{\sigma}'(w)) \overset{\substack{\hat{\sigma}'(w)\text{ は}\sum_{i\le k}E^i\text{に投票構造を与える}\\ \downarrow}}{=} \hat{f}\left(\sum_{i\le k} E^i\right)$$

となり、$a_{i+1} \in \hat{f}\left(\sum_{i\le k} E^i\right)$が言える。以上の置換操作から始まる議論を繰り返すと、$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \hat{f}\left(\sum_{i\le k} E^i\right)$が言えて、所望の結果を得る。 ■

第二の鍵概念は、任意の$D \in \mathcal{D}$に対して、その「純ボルダスコア」を対応させる線型写像である。この写像を β と記号する。その定義は以下のとおりである。まず、(D.4) の表記に従い、$D = \sum_{i\ne j} q_{ij}(a_i, a_j)$とおき、各$k(1 \le k \le m)$に関して、

$$\beta_k(D) = \sum_{j\ne k} (q_{kj} - q_{jk}) \tag{4}$$

とし、β を

$$\beta(D) = (\beta_1(D), \beta_2(D), \ldots, \beta_m(D)) \tag{5}$$

と定義する。β_k は全て $\mathcal{D}$ から Q への線型写像であるので、β は $\mathcal{D}$ から Q^m への線型写像で

ある。次の補題8は線型代数から見たβの性質を述べている。

補題8　βに関して、以下の性質が成り立つ。

(i)　各$k\,(1 \le k \le m)$に関して、

$$\beta(E^k) = (-1, -1, ... -1, \overbrace{m-1}^{k}, -1, ..., -1, -1)$$

(ii)　$\beta(E^1), ..., \beta(E^m)$の組は一次独立ではないが、この中の任意の$m-1$個の組は一次独立である。

(iii)　任意の$D \in \mathcal{D}$に関して、$\sum_{k=1}^{m} \beta_k(D) = 0$が成り立つ。

(iv)　$E^1 + \cdots + E^m = 0$.

(v)　$E^1, ..., E^m$の中の任意の$m-1$個のベクトルは一次独立である。

(vi)　$E^1, ..., E^m$の張る空間の次元はmである。

(vii)　$\beta(E^1), ..., \beta(E^m)$が張る線型部分空間、以下部分空間と略す、の次元は$m-1$である[9]。

(viii)　$image\beta$と$kernel\beta$をそれぞれ

$$image\beta = \{\beta(D) : D \in \mathcal{D}\}$$
$$kernel\beta = \{D \in \mathcal{D} : \beta(D) = 0\}$$

と定義する。それぞれの次元は$m-1$、$\binom{m}{2} - m + 1$である[10]。

証明.（i）導出は以下のとおり：E^kは次の二通りに表現できる

$$E^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{m} 1(a_k, a_j)$$

$$= 1(a_k, a_1) + 1(a_k, a_2) + \cdots + 1(a_k, a_{k-1}) + \underset{\text{除く}}{\overset{\downarrow}{}}1(a_k, a_k) + 1(a_k, a_{k+1}) + \cdots + 1(a_k, a_m)$$

$$E^k = \sum_{i \ne j} q_{ij}(a_i, a_j)$$

前者は（1）であり、後者は（D.4）である。前者を参考にして後者の係数q_{ij}を求めると、

$$\overbrace{q_{k1}, ..., q_{kk-1}}^{\text{全て }1}, \overbrace{q_{kk}}^{\text{なし}}, \overbrace{q_{kk+1}, ..., q_{km}}^{\text{全て }1};\ \text{残りは全て }0$$

となっている。これに基づいて$\beta(E^k)$を計算する。$\beta_k(E^k)$とそれ以外$\beta_h(E^k), h \ne k$、に分け

9）この空間が線型空間であること：線型空間内の任意の有限個のベクトル$v^1, .., v^k$をとる。これらベクトルの一次結合全体は一つの線型空間である（佐武2015、p99）。

10）βは線型写像なので、両者ともに線型空間である。佐武（2015）、p108を参照。

て計算する。まず$\beta_k(E^k)$に関しては、先に求めた係数を代入すればよい。

$$\begin{aligned}\beta_k(E^k) &= \sum_{j\neq k}(q_{kj}-q_{jk})\\ &= \sum_{j<k}(\overbrace{q_{kj}}^{\text{全て 1}}-\overbrace{q_{jk}}^{\text{全て 0}})+\sum_{j>k}(\overbrace{q_{kj}}^{\text{全て 1}}-\overbrace{q_{jk}}^{\text{全て 0}})\\ &= m-1\end{aligned}$$

$\beta_h(E^k), h\neq k$に関しては、(4) に従うと、

$$\beta_h(E^k)=\sum_{j\neq h}(q_{hj}-q_{jh})$$

である。ここで、q_{hj}の項は$h\neq k$なので、全て 0 である。一方、q_{jh} の項は $j=k$ の項以外全て 0 である。よって q_{kh} の項のみが残る。故に $\beta_h(E^k)=-1$ である。

(ii) (i) より、$\beta(E^1)+\cdots+\beta(E^m)=0$ なので、前半は明らかである。後半を示す。$\beta(E^1),...,\beta(E^{m-1})$の場合を示す。$\alpha_1\beta(E^1)+\cdots+\alpha_{m-1}\beta(E^{m-1})=0$とする。列ベクトルで表示すると、

$$\alpha_1\begin{bmatrix} m-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} -1 \\ m-1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}+\cdots+\alpha_{m-1}\begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ m-1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\alpha_1(m-1)-\left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i-\alpha_1\right)&=0\\ \alpha_2(m-1)-\left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i-\alpha_2\right)&=0\\ &\dots\\ \alpha_{m-1}(m-1)-\left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i-\alpha_{m-1}\right)&=0\end{aligned}$$

を得る。どの式も移項して整理すると、$m\alpha_j=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i$ $(j=1,...,m-1)$であることがわかる。よって α_j は全て等しい。故に、この式から、$m\alpha_j=(m-1)\alpha_j$が従う。これより$\alpha_j=0$[11]。これが任意の$j=1,...,m-1$に関して成り立つので、所望の結果を得る。

(iii) 計算は以下のとおりである。

11) $m\geq 2$の仮定がここで効いている。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}\beta_k(D) &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j\neq k}(q_{kj}-q_{jk})\right)\\
&= \sum_{j\neq 1}(q_{1j}-q_{j1})+\sum_{j\neq 2}(q_{2j}-q_{j2})+\cdots+\sum_{j\neq m}(q_{mj}-q_{jm})\\
&\overset{(*)}{\downarrow}{=} \sum_{j=1}^{m}(q_{1j}-q_{j1})+\sum_{j=1}^{m}(q_{2j}-q_{j2})+\cdots+\sum_{j=1}^{m}(q_{mj}-q_{jm})\\
&= \sum_{j=1}^{m}(q_{1j}+q_{2j}+\cdots+q_{mj})-\sum_{j=1}^{m}(q_{j1}+q_{j2}+\cdots+q_{jm})\\
&\overset{(**)}{\downarrow}{=}\ 0
\end{aligned}
$$

(∗)：$q_{11},...,q_{mm}$があったとして計算する。相殺して 0 になるから式には影響なし.

(∗∗)：どの q_{ij} も $\sum_{j=1}^{m}(q_{1j}+q_{2j}+\cdots+q_{mj})$ と $\sum_{j=1}^{m}(q_{j1}+q_{j2}+\cdots+q_{jm})$ の中で 1 回ずつ登場することに留意すればよい。

（iv）計算は以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
E^1+\cdots+E^m &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}1(a_1,a_j)+\cdots+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{m}1(a_m,a_j)\\
&\overset{(*)}{=}\sum_{j=1}^{m}1(a_1,a_j)+\cdots+\sum_{j=1}^{m}1(a_m,a_j)\\
&=\sum_{i,j}^{m}1(a_i,a_j)\\
&\overset{(**)}{=}0
\end{aligned}
$$

(∗)（$(a_1,a_1),...,(a_m,a_m)$がとあったとして計算。

(∗∗)（(a_i,a_j)と(a_j,a_i)が一回ずつ登場。相殺して 0 である。

（v） $E^1,...,E^{m-1}$の一次独立性を示す。他の場合も同様にして示せる。

$$\alpha_1E^1+\cdots+\alpha_{m-1}E^{m-1}=0$$

とする。この式の両辺の値を β で写像する。β は線型写像なので

$$\alpha_1\beta\left(E^1\right)+\cdots+\alpha_{m-1}\beta\left(E^{m-1}\right)=\beta(0)$$

となる。(ii) より、$\beta\left(E^1\right),...,\beta\left(E^{m-1}\right)$は一次独立である。故に、$\beta(0)=0$を示せば、$\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$となり、所望の結果を得る。D.4の表記に従えば、0（零ベクトル）は全ての q_{ij} を 0 とおくことになる。故に$\beta(0)=0$である。

（vi）$E^1,...,E^m$の張る空間に属する一次独立なベクトルの組を任意にとる。$y^1,...,y^s$がそ

れであるとする。定義により、$y^1,...,y^s$ は全て $E^1,...,E^m$ の一次結合となる。先に示したように $E^1,...,E^{m-1}$ は一次独立、これに E^m を加えると一次独立ではない（iv）から、E^m は $E^1,...,E^{m-1}$ の一次結合としてよい。結局 $y^1,...,y^s$ は全て $E^1,...,E^{m-1}$ の一次結合となる。これと線型代数に関する一般的事実[12]より、$s \leq m-1$ となる。これと（v）より、$E^1,...,E^m$ の張る空間の次元は $m-1$ となる。

（vii）。この部分空間を $\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ と記号する。（ii）より、この空間の次元は $m-1$ 以上（そして Q^m の部分空間であるから m 以下）である。次に、この空間が Q^m の真部分集合であることを示す。これが言えれば、部分空間に関する一般的性質[13]より、$\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ の次元は $m-1$ であることになる。$\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ 内の任意のベクトルは、係数 $v_1,...v_m$ を使って、$v_1\beta(E^1)+\cdots+v_m\beta(E^m)$ と表現できる。故に

$$v_1\beta(E^1)+\cdots+v_m\beta(E^m) \quad \overset{\beta\text{は線型写像}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \beta\left(v_1E^1+\cdots+v_mE^m\right)$$

である。（iii）より、$\beta\left(v_1E^1+\cdots+v_mE^m\right)$ の全ての成分の和（第1成分から第 m 成分までの和）は常に0である。このことから $\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ は Q^m の部分空間 $H=\left\{x\in Q^m : \sum_{k=1}^{m} x_k = 0\right\}$ 内にあることになる。つまり $\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ は Q^m の真部分集合であることになり、証明が完結する。

（viii）先の（vii）での図式を見れば、$\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ 内の任意のベクトルは image β に属していることがわかる。また（vii）より、image β は空間 H 内にあることになる。つまり、

$$\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right] \subset \mathrm{image}\beta \subset H \subsetneq Q^m$$

である。$\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ の次元が $m-1$ であること（vii）、image$\beta \subsetneq Q^m$、及び（vii）の脚注で触れた部分空間に関する一般的性質を考えあわせれば、image β の次元は $m-1$ となる[14]。

kernel β の次元は線型代数での広く知られた定理（f を V^m から V^n への線型写像とすれば、image$f$ の次元 $= m-$ kernel$f$ の次元である、佐武（2015）、p109定理7）から求まる。β は

12）「$a_1,...,a_p$ が一次独立、かつ各 a_i（$1 \leq i \leq p$）が $\{b_1,...,b_s\}$ に一次従属であるとすれば、$p \leq s$。」（佐武2015、p95系1）。ここで「a_i（$1 \leq i \leq p$）が $\{b_1,...,b_s\}$ に一次従属である」は、a_i が $b_1,...,b_s$ の一次結合となるという意味である。これに関しては佐武2015、p93補題2の証明を参照せよ。

13）W_1、W_2 をそれぞれ r_1 次元、r_2 次元の部分空間とする。このとき、$W_1 \subsetneq W_2 \Longrightarrow r_1 < r_2$ である（佐武2015、p101）。

14）もう一つの一般的事実として、$W_1 \subset W_2 \Longrightarrow r_1 \leq r_2$ がある（佐武2015、p101）。よって、実は $\left[\beta(E^1),...,\beta(E^m)\right]$ =imageβ が成立していることになる。

$Q^{\binom{m}{2}}$上で定義された写像であり、image β の次元は $m-1$ であるから、kernel β の次元は $\binom{m}{2}-m+1$ となる。 ■

第三の鍵概念は m サイクルと呼ばれる、全ての選択肢から構成された D におけるベクトルである。これは以下の形をしている。

$$(a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + (a_{i_m}, a_{i_1}).$$

次の補題 9 は線型代数から見た m サイクルの性質を述べている。

補題 9　m サイクルの集合の張る空間は$E^1, ..., E^m$の張る空間の直交補空間であり、それは *kernel* β に等しい。

証明. 証明は三つのステップを経て行われる。

ステップ１．m サイクルの集合の張る空間$\subset$kernelβ.

C を m サイクルとする。$C = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + (a_{i_m}, a_{i_1})$とおく。(4) に従って $\beta_k(C)$ を計算する。k は$i_1, ..., i_m$の中のどれかである。一般性を失うことなくi_kであるとしよう。

$$\begin{aligned}\beta_k(C) &= \sum_{j\neq k}(q_{kj} - q_{jk}) = \sum_{j\neq i_k}(q_{i_k j} - q_{j i_k}) \\ &= (q_{i_k i_1} - q_{i_1 i_k}) + (q_{i_k i_2} - q_{i_2 i_k}) + \cdots + \left(q_{i_k i_{k-1}} - q_{i_{k-1} i_k}\right) \\ &+ \overbrace{(q_{i_k i_k} - q_{i_k i_k})}^{\text{除く}} \\ &+ \left(q_{i_k i_{k+1}} - q_{i_{k+1} i_k}\right) + \left(q_{i_k i_{k+2}} - q_{i_{k+2} i_k}\right) + \cdots + (q_{i_k i_m} - q_{i_m i_k}).\end{aligned}$$

ここで C の構成を見ると、続き番号$i_1 i_2, i_2 i_3, ..., i_{m-1} i_m, i_m i_1$の係数が１、それ以外は 0 である。従って上の式の項で１になるのは、$q_{i_{k-1} i_k}$ と $q_{i_k i_{k+1}}$ のみである。よって$\beta_k(C) = 0$である。これが任意の k に関して成り立つので、$\beta(C) = 0$であり、$C \in$kernelβ、つまり m サイクルは全て kernel β に属すことになる。

m サイクルの集合の張る空間に属するベクトルを任意に取り、D とする。D は全ての m サイクルの一次結合として表される。すなわち、C_h を任意の m サイクルとして、

$$D = \sum_h a_h C_h$$

である。ここで h は全ての m サイクルに関してとられている。D の定義に参加しない m サイクルに関しては$a_h = 0$であると考えればよい。β は線型写像なので、$\beta(D) = \beta\left(\sum_h a_h C_h\right)$

$=\sum_{h} a_h \beta(C_h) \overset{\substack{C_h \in \mathrm{kernel}\beta \\ \downarrow}}{=}$ 0となる。つまり、$D \in \mathrm{kernel}\beta$ となる。以上でステップ1の証明は完了する。

ステップ2．m サイクル全てが張る空間は $E^1, ..., E^m$ の張る空間の直交補空間である。

最初に、$E^k (1 \leq k \leq m)$ は全ての m サイクルと直交する（内積が0である）ことを示す。m サイクル C を $C = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + (a_{i_m}, a_{i_1})$ とする。任意の E^k をとる。計算の便宜上、$E^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} 1(a_k, a_j)$ における記号を以下のように変える。

$$j = 1, 2, ..., m \to i_j = i_1, i_2, ..., i_m$$

$$k \to i_k$$

よって、E^k は $E^{i_k} = \sum_{\substack{i_j = i_1 \\ i_j \neq i_k}}^{i_m} 1(a_{i_k}, a_{i_j})$ となる。故に、

$$E^{i_k} = (a_{i_k}, a_{i_1}) + \cdots + (a_{i_k}, a_{i_{k-1}}) + \overbrace{(a_{i_k}, a_{i_k})}^{\text{除く}} + (a_{i_k}, a_{i_{k+1}}) + \cdots + (a_{i_k}, a_{i_m})$$

となる。内積 $\langle C, E^{i_k} \rangle$ を計算する。C で係数が0でない項はすべて番号が隣接している。一方 E^{i_k} で隣接しているのは $(a_{i_k}, a_{i_{k-1}})$ と $(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$ だけである。よってこの二つの成分だけを考えればよい。すると内積は

$$\langle C, E^{i_k} \rangle = \overset{\substack{C\text{ での }(a_{i_{k-1}}, a_{i_k})\text{ の係数} \\ \downarrow}}{1} \times \overset{\substack{E^{i_k}\text{での }(a_{i_k}, a_{i_{k-1}})\text{ の係数} \\ \downarrow}}{-1} + \overset{\substack{C\text{ での }(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})\text{ の係} \\ \downarrow}}{1} \times \overset{\substack{E^{i_k}\text{での }(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})\text{ の係数} \\ \downarrow}}{1}$$

であり、その値は0となり[15]、所望の結果を得る[16]。

この計算を使って、ステップ2の証明を完成させる。D, D' はそれぞれ $E^1, ..., E^m$ の張る空間に属するベクトル、m サイクル全てが張る空間に属するベクトルとする。D と D' はそれぞれ

$$D = \sum_{k=1}^{m} a_k E^k, D' = \sum_{h} b_h C^h$$

と表現できる。ここで $\sum_h$ は全ての m サイクルを走っているとする。D' の定義に参加していない C^h に関しては $b_h = 0$ となっていると考えればよい。D も同様に考える。直積 $\langle D', D \rangle$ は $a_k b_h \langle C^h, E^k \rangle$ をすべての k, h にわたってとり、その和をとったものである。先の計算より $\langle C^h, E^k \rangle$ は全て0なので、直積は0となる。D, D' は任意にとれることを考えれば、これでステップ2の証明は完了する。

15）E^{i_k} での $(a_{i_k}, a_{i_{k-1}})$ の係数に関して：ベクトルの成分としては第 $(k-1, k)$ 成分であることに留意する。

16）$m=2$ だと、ここの証明は通らなくなる。$C = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_1})$ であり、$E^{i_2} = (a_{i_2}, a_{i_1})$ をとると $\langle C, E^{i_2} \rangle = -1$ である。

ステップ3．kernelβに等しい。

まず、部分空間の次元とその直交補空間の次元の和は空間全体の次元に等しい（佐武(2015)、p107、定理6）ことに着目しよう。ステップ2を考慮すると、この等式は

$$m\text{サイクル全てが張る空間の次元}+E^1,...,E^m\text{の張る空間の次元}=\text{空間全体の次元}$$

となる。空間全体の次元は$\binom{m}{2}$，$E^1,...,E^m$の張る空間の次元は$m-1$（補題8）なので、mサイクル全てが張る空間の次元は$\binom{m}{2}-m+1$となり、これはkernelβの次元と同じである（補題8）。さて、以上で以下の二つの事実が得られた。

$$m\text{サイクル全てが張る空間の次元}=\text{kernel}\beta\text{の次元}$$

$$m\text{サイクル全てが張る空間}\subset\text{kernel}\beta\text{（ステップ1）}$$

この二つと線型代数でよく知られた関係[17)]からmサイクル全てが張る空間 =kernelβとなって、補題の証明が完了する。 ■

さて、mサイクルも投票構造である。投票構造としてのmサイクルの性質は次の補題10で与えられる。

補題10 *(i)* 任意の$D\in$*kernel*βに関して、Dはmサイクルの一次結合として、

$$D=\sum_r q_rC^r,\ C^r\text{は}m\text{サイクル、}q_r>0\text{は有理数、}$$

として表現できる。ここで、$\sum_r$のrは必ずしもmサイクル全てでとられる必要はない。

(ii) 任意のmサイクルC^rに関して、

$$\widehat{f}(C^r)=A$$

である。

証明. (i) $D\in$kernelβを所与とする。補題9より、$D=\sum_r q_rC^r$、C^rはmサイクル、となる。この段階ではまだ$q_r>0$（全てのrに関して）の保証はない。以下、二つに場合分けする。

ケース1．全てのq_rに関して、$q_r=0$。

明らかに$D=0$である。二つのmサイクルとして$C=(a_1,a_2)+(a_2,a_3)+\cdots+(a_{m-1},a_m)+(a_m,a_1)$と$C^{-1}=(a_2,a_1)+(a_3,a_2)+\cdots+(a_m,a_{m-1})+(a_1,a_m)$をとる。$C^{-1}$が$m$サイクルであることは$C^{-1}$が$C$の各項を逆さまにして得られたことを考えればよい。$C$では$a_1\longrightarrow$

17) W_1とW_2は線型空間、各々の次元をr_1,r_2とすると、$W_1\subset W_2\Longrightarrow r_1\leq r_2$かつ$W_1\subsetneq W_2\Longrightarrow r_1<r_2$となる（佐武（2015)、p101)。

$a_2 \longrightarrow a_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{m-1} \longrightarrow a_m \longrightarrow a_1$であるが、矢印を反対にしたのが$C^{-1}$である。明らかに$D = 1C + 1C^{-1}$であり、所望の結果を得る。

ケース２．それ以外。

$q_r \neq 0$となるrが少なくとも一つあることになる。一般性を失うことなく、$\sum_r q_r C^r$でのq_rは全て$q_r \neq 0$としてよい。任意の$q_r C^r$は

$$q_r C^r = q_r(a_{i_1}, a_{i_2}) + q_r(a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + q_r(a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + q_r(a_{i_m}, a_{i_1})$$

と表現できる。ここで

$$C^r = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + (a_{i_m}, a_{i_1})$$

である。ここでC^rの各項の順序を入れ替え、

$$C^{r'} = (a_{i_2}, a_{i_1}) + (a_{i_3}, a_{i_2}) + \cdots + (a_{i_m}, a_{i_{m-1}}) + (a_{i_1}, a_{i_m})$$

としよう。$C^{r'}$もmサイクルである。先と同様、C^rでは$a_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{i_{m-1}} \longrightarrow a_{i_m} \longrightarrow a_{i_1}$となっているが、$C^{r'}$では矢印が逆になっていると考えればよいからである。明らかに$q_r C^r = (-q_r) C^{r'}$であるから、$q_r < 0$ならば、C^rに替えて$C^{r'}$をとればよい。

（ii）二つに場合分けする。

ケース１．C^rが$(a_1, a_2) + (a_2, a_3) + \cdots + (a_{m-1}, a_m) + (a_m, a_1)$の場合。

C^rを投票構造にするプロファイルwには、例えば次がある。各(a_i, a_{i+1})、$i = 1, ..., m,$ ここで$m+1=1$、毎に二人の投票者がいて、

$$\begin{array}{ll} \text{一人の選好：} & a_i, a_{i+1}, \overbrace{a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m}^{a_i, a_{i+1}\text{は除く}} \\ \text{もう一人の選好：} & \overbrace{a_m, a_{m-1} ..., a_2, a_1}^{a_i, a_{i+1}\text{は除く}}, a_i, a_{i+1} \end{array}$$

とするプロファイルwである。二人ともにa_iをa_{i+1}より好んでいるが、それ以外の選択肢のペアに関する二人の選好は互いに真逆になっている。故に$\widehat{f}(C^r) = f(w)$となる。いま$a_k \in f(w)$、$1 \leq k \leq m$であるとする。置換σは$a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{m-1} \longrightarrow a_m \longrightarrow a_1$と矢印に従って選択肢を置換するとしよう。$w$にこの置換$\sigma$を施してできるプロファイルを$\widehat{\sigma}(w)$とする。neutralityより、$a_{k+1} \in f(\widehat{\sigma}(w))$である（ここで$k=m$ならば、$a_{k+1} = a_1$）。この置換により、上の表での二人の選好は以下のように変わる。

$$\begin{array}{ll} \text{一人の選好：} & a_{i+1}, a_{i+2}, \overbrace{a_2, a_3, ..., a_m, a_1}^{a_{i+1}, a_{i+2}\text{は除く}} \\ \text{もう一人の選好：} & \overbrace{a_1, a_m, ..., a_3, a_2}^{a_{i+1}, a_{i+2}\text{は除く}}, a_{i+1}, a_{i+2} \end{array}$$

この表は$\widehat{\sigma}(w)$が与える投票構造はwのそれを置換によって動かしたものと同じであること

を示している。a_iの立場をa_{i+1}、a_{i+1}の立場をa_{i+2}が占める、といったようにひとつづつ右にずらして考えればよい。

各(a_i, a_{i+1})ごとに、このような二人の選好の組があるので、置換を施しても、全体としてみれば、投票構造は変わらない。$\widehat{\sigma}(w)$の与える投票構造は w のそれと同じである。故に f が対ごと比較に基づく（補題３）ので、$f(\widehat{\sigma}(w)) = f(w)$であり、$\widehat{f}(C^r) = f(w)$と先の $a_{k+1} \in f(\widehat{\sigma}(w))$ より、$a_{k+1} \in \widehat{f}(C^r)$ となる。後はこの置換操作に基づく議論を繰り返し適用することによって、$\widehat{f}(C^r) = A$が言える。以上でケース１の証明が完了した。

ケース２．C^r が一般の場合。

$C^r = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) + \cdots + (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) + (a_{i_m}, a_{i_1})$とする。置換$\sigma$は、$1 \longrightarrow i_1, 2 \longrightarrow i_2, ..., m \longrightarrow i_m$と写すとする。$D = (a_1, a_2) + (a_2, a_3) + \cdots + (a_{m-1}, a_m) + (a_m, a_1)$に投票構造を与えるプロファイルを w とする。σ を w に作用させてできるプロファイルを $\widehat{\sigma}(w)$ とすると、$\widehat{\sigma}(w)$ は C^r に投票構造を与えることになる。以下の式変換が $\widehat{f}(C^r) = A$ を導く。

$$\widehat{f}(C^r) \overset{\widehat{\sigma}(w)\text{ は }C^r\text{の投票構造}}{\overset{\downarrow}{=}} f(\widehat{\sigma}(w)) \overset{\text{neutrality}}{\overset{\downarrow}{=}} \sigma(f(w)) \overset{w\text{ は }D\text{ の投票構造}}{\overset{\downarrow}{=}} \sigma\left(\widehat{f}(D)\right) \overset{\text{ケース 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \sigma(A) = A$$

以上で（ii）の証明は完了した。■

さて、$\widehat{f}$ と β はまったく別個の概念であるが、以下の補題11は$\widehat{f}$ が$\beta(D)$に依存することを主張する。

補題11　任意の $D, D' \in \mathcal{D}$ に関して、$\beta(D) = \beta(D')$ならば、$\widehat{f}(D) = \widehat{f}(D')$。

証明. まず、任意の$D \in$kernelβに関して、$\widehat{f}(D) = A$であることを示す。これは以下の式転換から出る。

$$\widehat{f}(D) \overset{\text{補題 10}}{\overset{\downarrow}{=}} \widehat{f}\left(\sum_r q_r C^r\right) \overset{\text{補題 6}}{\overset{\downarrow}{=}} \bigcap_r \widehat{f}(q_r C^r) \overset{\text{補題 5}}{\overset{\downarrow}{=}} \bigcap_r \widehat{f}(C^r) \overset{\text{補題 10}}{\overset{\downarrow}{=}} A.$$

$\overset{\text{補題 6}}{\overset{\downarrow}{=}}$ に関して：任意の r に関して、$\widehat{f}(q_r C^r) \overset{\text{補題 5}}{\overset{\downarrow}{=}} \widehat{f}(C^r) \overset{\text{補題 10}}{\overset{\downarrow}{=}} A$であるから、$\bigcap_r f(q_r C^r) \neq \emptyset$ である。故に補題６が使える。

これを使って、補題を証明する。まず $f(D - D') = A$ を示す。

$\beta(D - D') \overset{\beta\text{は線型写像}}{\overset{\downarrow}{=}} \beta(D) - \beta(D') = 0$なので、$D - D' \in$kernel$\beta$である。故に、先に証明した結果から、$\widehat{f}(D - D') = A$となる。

補題は以下の式変換より従う。

$$\widehat{f}(D)=\widehat{f}(D'+(D-D'))\overset{\text{補題6}}{\overset{\downarrow}{=}}\widehat{f}(D')\cap\widehat{f}(D-D')\overset{f(D-D')=A}{\overset{\downarrow}{=}}f(D')\cap A=f(D').$$

$\overset{\text{補題6}}{\overset{\downarrow}{=}}$ に関して：$D-D'\in$kernelβより、最初に示した関係から$\widehat{f}(D-D')=A$となる。よって$\widehat{f}(D')\cap\widehat{f}(D-D')\neq\emptyset$となって補題6が使える。

以上で、全ての準備が整った。

定理3の証明. $D\in D$を所与とする。一般性を失うことなく、$\beta_1(D)\geq\beta_2(D)\geq\cdots\geq\beta_m(D)$とおく。補題8より，$m$個の有理数$\lambda_1,...,\lambda_m$があって、$\beta(D)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\beta(E^j)$とできる。更に、$\beta(D)$は次のように書き換えられる。

$$\beta(D)=\beta\left(\sum_{j=1}^{m-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right)\tag{6}$$

(6) の導出：βは線型写像であるから、

$$\beta(D)=\beta\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_jE^j\right)$$

である。故に、

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_jE^j=\sum_{j=1}^{m-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i$$

を示せばよい。右辺は$(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i$を$j=1,...m-1$にわたって合計している。任意の右辺の項$(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i$とそのすぐ右に隣接する項$(\lambda_{j+1}-\lambda_{j+2})\sum_{i\leq j+1}E^i$に注目する。$-\lambda_{j+1}\sum_{i\leq j}E^i$と$\lambda_{j+1}\sum_{i\leq j+1}E^i$は互いに打ち消しあって、$\lambda_{j+1}E^{j+1}$だけが残ることがわかる。全体としては

$$\text{右辺}=(\lambda_1-\overbrace{\lambda_2)\sum_{i\leq1}E^i+(\lambda_2}-\overbrace{\lambda_3)\sum_{i\leq2}E^i+(\lambda_3}-\lambda_4)\sum_{i\leq3}E^i+\cdots$$
$$\cdots+(\lambda_{m-2}-\overbrace{\lambda_{m-1})\sum_{i\leq m-2}E^i+(\lambda_{m-1}}-\lambda_m)\sum_{i\leq m-1}E^i$$

のようにカッコで括った項が互いに打ち消しあう。故に、右辺は両端と相殺されて残る項の合計なので

$$\text{右辺}=\lambda_1\sum_{i\leq1}E^i+\lambda_2E^2+\cdots+\lambda_{m-1}E^{m-1}-\lambda_m\sum_{i\leq m-1}E^i$$

である。$-\sum_{i\leq m-1}E^i=E^m$（補題8）を考慮して、これを計算すると、左辺が導かれる。以

上が（6）の導出である。

更に、$\beta_i(D)-\beta_j(D)=m(\lambda_i-\lambda_j)$が成り立つ。導出は以下のとおりである。説明の便宜上、記号を変え、$\beta(D)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\beta(E^j)$を$\beta(D)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\beta(E^k)$に置き換える。

$$\beta(D)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\beta(E^k)\overset{\text{補題 }8}{\overset{\downarrow}{=}}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(-1,...,\overset{k}{m-1},...,-1\right)$$

である。故に、$\beta(D)$は各$k=1,...,m$に関する$\left(-1,...,\overset{k}{m-1},...,-1\right)$を$\lambda_k$倍したもの全ての和である。よってその第$i$成分の値$\beta_i(D)$は$\lambda_i\,(m-1)-\sum_{k\neq i}^{m}\lambda_k$である。同じく$\beta_j(D)=\lambda_j\,(m-1)-\sum_{k\neq j}^{m}\lambda_k$である。これを計算して、$\beta_i(D)-\beta_j(D)=m(\lambda_i-\lambda_j)$を得る。以上が導出である。

故に、$\beta(D)$に関する想定により、

$$\lambda_j-\lambda_{j+1}\geq 0,\ (1\leq j\leq m-1) \tag{7}$$

となる。これより、

$$\{j:\beta_j(D)=\beta_1(D)\}=\{j:\lambda_j=\lambda_1\} \tag{8}$$

が成り立つ。

ここで、$j=1,...,m-1$に関して、$\widehat{f}\left((\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right)$を求める。(7) より、$\lambda_j-\lambda_{j+1}=0$または$\lambda_j-\lambda_{j+1}>0$である。$\lambda_j-\lambda_{j+1}=0$のとき、$(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i$は0ベクトルであり、補題4の中で示したように、0ベクトルに投票構造を与えるプロファイルとして、互いに正反対の選好を持つ二人の投票者からなるものが考えられる。cancellation を考慮すれば、$\widehat{f}\left((\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right)=A$である。

$\lambda_j-\lambda_{j+1}>0$のときは、以下の式転換が可能となる。

$$\widehat{f}\left((\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right)\overset{\text{補題 }5}{\overset{\downarrow}{=}}\widehat{f}\left(\sum_{i\leq j}E^i\right)\overset{\text{補題 }7}{\overset{\downarrow}{=}}\{a_1,...,a_j\}$$

以上をまとめると、$j=1,...,m-1$に関して、

$$\widehat{f}\left((\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right)=\begin{cases}A & \text{if } \lambda_j-\lambda_{j+1}=0\\ \{a_1,...,a_j\} & \text{if } \lambda_j-\lambda_{j+1}>0\end{cases} \tag{9}$$

となる。

さて f がボルダルールであることを示す。プロファイル w をとる。以下の関係を証明する。

$$f(w) = \bigcap_{j=1}^{m-1} \widehat{f}\left((\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sum_{i \le j} E^i\right) \tag{10}$$

（10）の証明：w が与える投票構造を D とする。（D.4）での議論から明らかなように、$f(w) = \widehat{f}(D)$ である。更に $\widehat{f}$ が $\beta(D)$ のみによって決まる（補題11）ので、（6）より、$\widehat{f}(D) = \widehat{f}\left(\sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sum_{i \le j} E^i\right)$ である。この二つの式より、$f(w) = \widehat{f}\left(\sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sum_{i \le j} E^i\right)$ となる。ここで（9）を考慮すれば、補題6が適用でき、（10）が従う。

さて、（9）と（10）を重ねると、

$$f(w) = \{a_j : \lambda_j = \lambda_1\}$$

である。（8）より、$f(w)$ はボルダルールが選ぶそれと一致している。以上で証明は完了した。■

6　結論

線型代数を使わない証明として Hansson and Sahlquist（1976）がある。本稿では、線型代数はともかく、グラフ理論は証明においては overload であることが示されたといえよう。最後に公理化定理の内容面に関して2点ほど述べる。

（1）一般に、公理はできるだけボルダルールから遠く離れた位置に建てられるべきである。この点で問題になるのは cancellation であろう。この公理は「全ての選択肢のボルダ数が同じであるならば、ボルダルールに従うべし」という要請である。要するに、この公理は、全ての選択肢のボルダ数が同じという非常に特殊な状況ではあるが、この状況であればルールはボルダルールであることを言っているに等しい。ボルダ数を使わない公理で cancellation を代替できるかどうかは残された主題である。

更に言うと、cancellation は果たしてよい公理なのかという疑問も残る。投票者が二人いて選択肢が10個あり、二人の選好が正反対であるとする。このプロファイルでは、cancellation は全ての選択肢を選ぶことを指示する。しかし、厚生格差などを考慮すると、2人が一致して5番目に選好する選択肢を選ぶのが直観的にはよいように思える。ボルダ数で定義されたレキシミンルールとでもいうべきルールはこの選択を可能にする。相異なる二

人の投票者と一つの選択肢 a を任意に取り、この選択肢に二人がつけるボルダ数の差をとる（大きい方から小さい方を引いて差をとる）。投票者の対ごとにこの差がとれる。そこで、これらの差の中で最大となるものを a の厚生格差と呼ぼう。各選択肢ごとに厚生格差が定義でき、ルールはこの格差を最小にする選択肢を選ぶのである。このルールはスコアのつけ方が凸性を満たすようにしたスコアリングルールかもしれない。凸性とは i 番目と j 番目の選択肢、ここで $i<j$ とする、に対するスコアが $s_i > s_j$ とする。$i<k<j$ となる k 番目の選択肢のスコア s_k に関しては、$s_k > \frac{k-i}{j-i}s_i + \frac{j-k}{j-i}s_j$ となることである。スコアのつけ方には自由度があり、つけ方に応じて、異なったスコアリングルールが得られるのであるが、以上の洞察は、ボルダルールを離れ、正しいスコアのつけ方、そして正しいスコアリングルールの探求、という新たな問題へと我々を導く。

スコアリングルールの公理化は Young（1975）にある。anonymity, neutrality に加えて continuity がその公理系である。continuity は以下のとおりである：投票者集合 W が２つの異なるプロファイルを持つ集団から構成されているとする。そのうちの片方のレプリカを W に繰り返し加えていくと、どこかでその加えたレプリカだけを投票者集合とする場合と同じ結果となる。ただし、この公理化は、スコアのつけ方が必ずしも単調ではないスコアリングルールも対象としている。ここで単調であるとは、より好ましい選択肢に対して、より低いスコアはつけない、ということである。従って単調でないスコアリングルールは、選好上より劣位になる選択肢により高いスコアをつけて投票するといった意味不明なルールである。故に、このようなスコアリングルールを全て含めたうえでの公理化であることは留意すべきである。ただ、以下の二つを公理として追加すれば、それらしいスコアリングルールの公理化になることが知られている。[18)]

monotonicity（MO）：集計すると a が選ばれるプロファイルが存在し、誰か少なくとも一人が a のランクを上げ、それ以外は変更しなかった場合、a は依然として選ばれる。

non-trivial（NT）：集計結果として選択肢集合全体が選ばれないようなプロファイルが存在する。

（2）投票者集合が、投票者が有限人という制約があるだけで、自在に取れるという設定が証明に大きく貢献している。しかし、投票者集合を固定するほうが、この分野では主流である。アロウの不可能性定理をはじめ多くの議論がこの設定を採用している。Young はイントロあたりで、アロウの不可能性定理に決別を告げて、別の道を開拓するのだ、とはっきり

18）ただ、これは周知の内容のようで、改まって公理化した論文を出す研究者はいないとのことである。この点は栗原崇氏からご教示いただいた。Young の貢献に比べると、あまりにささやかすぎるのかもしれない。

宣言している。実に爽快ではある。しかし、やはりアロウの定理との互換性がないのは残念である。これが関連研究が多くは生まれなかった理由の一つであろう。アロウと同じ設定でボルダルールの公理化を考える仕事が残っている。独立性系の公理（アロウのそれより弱く、中立性よりも強い何か）とアロウの残りの公理でボルダルールを公理化する仕事である。

参考文献

［1］佐武一郎「線型代数学（新装版）」2015裳華房

［2］Diestel R. Graph Theory 1997 Springer-Verlag New York（根上・太田訳ディーステル「グラフ理論」2012丸善出版）

［3］Hansson B, Sahlquist H（1976）A proof technique for social choice with variable electorate. J Econ Theory 13: 193-200.

［4］Kurihara T（2018）Net Borda rules with desirability mimeo

［5］Young HP（1974）An axiomatization of Borda's rule. J Econ Theory 9: 43-52.

［6］Young HP（1975）Social Choice Scoring Functions. SIAM Journal on Applied Mathematics 28: 824-838.