

構造方程式モデリングによる多集団分析¹⁾清水 和 秋²⁾

Multiple-Group Analysis Using Structural Equation Modeling

Kazuaki SHIMIZU

Abstract

There are discrepancies between the expressions of terms in the structural equation modeling in Japanese and English. In this regard, the following three points are summarized examining their contents. One is the difference in the frequency of occurrence of the terms used. In Japan, the term “covariance structure analysis” is much more common than “structural equation modeling.” Another point is that the terms related to multi-group analysis are diverse in both English and Japanese. Particularly noteworthy is the frequent explicit expression of the term “population” in Japan. Finally, there is a situation where one English expression corresponds to two Japanese expressions. In this paper, by examining the definitions and actual usage of these terms, the following conclusions are discussed. First, when the objective of the research is to explore differences in the means of factor scores among groups under the research, it is advisable to combine the factorial invariance (strict factorial invariance, strong factorial invariance and factor pattern invariance) with the analysis of the mean structure of factor score using structural equation modeling. Second, configural invariance is considered effective as a method for exploring the structure of factors among groups under the research. Keywords : factor analysis, Structural Equation Modeling, multi-group analysis, factorial invariance, mean structure.

抄 録

構造方程式モデリングの用語の表現に関して、日本語と英語との間に不一致がみられる。これに関して、次の三つポイントでまとめ、それらの内容を検討した。一つは、使用される用語の出現頻度に違いがあることである。日本では共分散構造分析のほうが、構造方程式モデリングよりも圧倒的に多い。もう一つは、多集団分析に関する用語が、英語でも日本語でも多様であることである。その中でも特徴的なことは、日本では母集団であることを明示する表現が多いことである。そして最後に、一つの英語表現が二つの日本語表現となっていることである。本稿では、これらの内容について、定義式や実際の用法を検討することにより、次のような結論を導き出した。まず、研究の対象とした集団間での因子得点の平均値の違いを探索することを研究の目的とする場合には、構造方程式モデリングにより因子的不変性（厳格な因子的不変性、強因子的不変性、そして、因子パターン不変性）と平均構造とを組み合わせることで分析することである。次に、配置不変性は、研究対象である集団間での因子の構造を探索する方法として有効である。

キーワード：因子分析、構造方程式モデリング、多群分析、因子的不変性、平均構造

1) 本稿は、応用心理測定研究会の第6回研究会（2023年2月11日、京都先端科学大学経済経営学部で開催）で発表した内容をまとめたものです。

2) 関西大学社会学部・名誉教授
連絡先：shimizu.kz.au@gmail.com

0. はじめに

心理測定 of 専門用語の中で、オリジナルの英語表記が一意的に日本語表記に対応したものがあつた。たとえば、reliability (信頼性) や validity (妥当性) などである。日本に紹介された頃には、訳語として一対一の対応とはなつていなかった専門用語もあつた。たとえば、factor score である。この訳語を“因子評点”として Google Scholar で“心理学”を加え、この二つを検索語としてみると記事の件数は約33件で、これらは1966年代から1980年頃までに発表された著作物で使用されていた (検索日は2023年8月23日、以下同じ)。これに対して、“因子得点”と“心理学”で検索すると約7,780件で、この表記は1950年代から使用されており、1970年代以降は、これが心理測定 of 専門用語として20年程度の期間で定着したようである。このように、オリジナルな専門用語が我が国に紹介され始めた頃には、複数の訳語が並存することはよくあることで、時間の経過とともに、そのような用語についての知識が普及することにより、最終的には、適切であると研究者の間で了解されるようになった一つの訳語に収束していくのではないだろうか。

本稿では、いまだに複数の一意的ではない日本語の表記がみられる Structural Equation Modeling とこれに関連する用語 (「構造方程式モデリング」, 「多集団分析」そして「布置不変性 (configural invariance)」) を取り上げ、次の3点で整理をしてみたい。まず、英語表記と日本語表記がそれぞれ一つであり、その意味も含めてほぼ対応していても、これらの用語の使用に混乱がみられる場合である。次に、英語表記が複数あり、これらに対応する日本語表記も複数ある場合である。さらに、英語表記は一つではあるが日本語表記が複数の場合である。これらの用語の適切性について検討する中で、本稿のタイトルである「構造方程式モデリングによる多集団分析」をこの分野の用語として提案した理由について議論してみたい。

1. 構造方程式モデリング、共分散構造分析、平均構造分析

1. 1 検索からみえる様相

本格的な議論に入る前に、検索から見える日本語と英語での使い方について、その様相を簡単に紹介してみることにする。まず、“共分散構造分析”を検索すると記事の数が約52,500件と表示された。これに対して“構造方程式モデリング”とすると約15,700件であつた。次に、これらの用語について、オリジナルの英語表記で検索すると、“covariance structure analysis”は約90,500件であり、“structural equation modeling”は約1,500,000

件であった。

日本での実際の研究での使われ方に焦点を当てるために、検索語を“心理学研究”と“共分散構造分析”そして“covariance structure analysis”の3個とすると約760件がヒットした。さらに、最後の検索語を“structural equation modeling”に変更してみると約倍の1,300件となった。このヒットした中には、日本語の本文では「共分散構造分析」を使い、英文抄録では“structural equation modeling”をこれに対応したものとした論文がみられた。

日本語と英語とが一对一对応することが必ずしも必要であるとは考えていない。日本での研究の多くが「観測変数間の共分散」だけを分析の対象としており、構造方程式モデリングで推定できる潜在変数間の関係性や平均構造を研究の対象としておらず、方法としての違いを明示するために「共分散構造分析」としているのかもしれない。しかしながら、このように大きな使用頻度に差があることや本文と抄録で違いがあることには、違和感があると言わざるを得ない。

1. 2 二つの school

議論に入る前に、伝統的な心理学的特性のモデルとその探索の方法との関係を簡単に紹介しておきたい。よく知られているように、C. Spearman により、1904年に因子分析法は知能の構造を探索するための方法として考案された。彼の理論と方法は、知能を一つの一般因子と観測に使用した変数の独自因子から説明できるとする「一般因子モデル」であった。これに対して、L.L. Thurstone は、1931年に「多因子モデル」と多因子を抽出し斜交回転する方法を提案した。この多因子の因子間相関から上位に2次因子を抽出し、これを一般因子として報告することで、ある意味では、この二人の論争は、「階層的モデル」として知能をとらえることで落ち着いたともいえた。その一方で、1939年のK.J. Holzinger と F.A. Swineford は、一般因子と多因子を並存させた「bifactor モデル」を新たに提案した。

1930年代以降、因子分析の各種の手法の開発をおこないながら、得られた結果を解釈することから、それぞれの研究者が独自のモデルを、因子分析の方法論とともに提案することが心理学研究の一つの流れとなった。このように、因子分析法は構成概念の探索的分析の道具としての地位を獲得し、性格など特性レベルの研究に応用されるようになった。そして、観測変数を項目として、次元の探索とこれに引き続く尺度構成のための項目分析の手法としても使われるようになった。

1950年代には、因子分析結果から構成した尺度を対象にして、測定の信頼性と妥当性の検討へと歩みを進めることが、心理学の研究手法として一般化したと考えることができるのではないだろうか。妥当性分析には、重回帰分析、判別分析に代表されるような多変量解析が利用されてきた。伝統的な心理測定の理論の教育では、線形代数学、固有分解、逆行列、そして、最小二乗法などの数学的内容が取り上げられていた。

ここで概略を紹介した心理測定の方法論は成功を収めたようではあった。たとえば、R.B. Cattell、H.J. Eysenck や J.P. Guilford などのパーソナリティ研究の big name として評価されている研究者たちは、因子分析法を活用しながら、それぞれがユニークでオリジナリティのある独自の理論、あるいはモデルを知能、性格などの分野において提案し、そして、応用心理学で活用されている心理テストも独自の立場から刊行している。このようなモデルや心理測定の道具は、データから得られる数値を細部にわたって緻密に解釈することにより構築されたものであった。この研究の過程に、研究者のそれぞれの理論とデータの探索の結果が反映されることにより、それぞれの研究成果が独立したままとっている。

時には激しい論争ともなった。このような議論に収束する可能性があることを示したのが、因子分析法に統計的推測の理論と道具を提供した最尤法であった。因子解の推定にこの最尤法を最初に導入したのは Lawley (1940) であったが、実際の計算として応用研究に使用するには無理があると長い間にわたってみなされてきた。この状況を打破したのが Jöreskog (1967) であった (丘本, 1986)。

Jöreskog (2007) は、因子分析の100年を記念する論集の中で、相関行列を対象とした方法の発展に貢献してきた psychometric school と母集団を対象とした統計的推測をこの分野に導入した statistical school の2つを紹介している。彼は、この区分を1950年代としているが、D. Sörbom とともに作り上げた structural equation modeling の代表的なソフトである LISREL の第6版が応用研究でも普及した1980年代ではないかと考えている (清水, 1994)。

清水 (1989, 1994) では「構造方程式モデル」を、清水 (2003) では「構造方程式モデリング」をこの方法論の紹介で使用したことがある。これは、原典の用語が model から modeling へと変化したことに合わせたからであった。なお、清水 (1989) でも紹介したように、この分野の初期には、「構造方程式モデリング」ではなく、観測変数の「測定モデル」と潜在変数の「構造モデル」についての「共分散構造分析」と呼ばれていた。ここに、「平均構造分析」が加わることによって、本格的に「構造方程式モデル」となった

（清水（1994）など）。この1980年代では、ある意味では数理的な model を構築する志向性が強かったようであった。その後、実証的なデータを解析する方向へと利用が展開する中で “modeling” が使用されるようになったのではないかと考えている。ちなみに、この分野の専門誌である *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal* が創刊されたのが1994年であった。Schumacker（1994）は、創刊号の Editor's note にこの雑誌の話題として理論的課題の他に “to testing for equal factor structures, equal regression coefficients, and mean latent variable differences between groups (p.1)” などにも言及している。

「構造方程式モデリング」の分野で、英語表記が並存してきたもう一つが structured mean と mean structure であり、これと対応して、日本語表記では「構造平均」と「平均構造」がある。ここでも同じようにこれらの用語の使用頻度を Google Scholar で検索してみると、“structured mean” と SEM とを検索語とすると約117件、“mean structure” と SEM では約3,040件となった。なお、SEM は、検索エンジンが “Structural Equation Modeling” を自動的に略したものである。

Jöreskog（1988）が “The LISREL Model with Structured Means (p.226)” としているように、構造方程式として平均をモデルに組み込んでいることを強調する表現として structured mean が使用されてきたこともあった。他には、たとえば、Yuan & Bentler（1997）や Muthén（1984）などである。現在は mean and covariance structure のように、共分散と並列の関係として記述されるようになったようである（たとえば、Yuan & Bentler（2000）や Jamshidian & Mata（2007）など）。そこで、以下では、「平均構造」とする。

心理学では、集団間の違いを観測変数の平均の分析から明らかにしてきた。時間経過において起きる変動についても同じであった。潜在変数の平均について、集団を対象として Sörbom（1974）が、そして、Bollen（1989）が時間経過の変動を捉える方法を提案している。これらはある意味で、分散分析からの新しい方法論の提案でもあった（狩野, 2002a,b）。

ここで結論を書くと、「共分散構造分析」は「構造方程式モデリング」の下位モデルである。この点については、清水（1989, 1994, 2003, 2013）などで紹介した。その詳細については、これらの論文を参照してもらうこととして、本稿では、構造方程式モデリングの測定モデルである「因子分析法」を中心として議論をおこなうことにする。これについては、これまでに紹介してきたことであり、重複するところもあるが、伝統的な因子分析

法と比較することにより、「構造方程式モデリング」が心理学研究にもたらした方法論的革新の本質を明らかにしてみたい。ここでのキーワードは、「因子的不変性」であり、「平均構造」である。

1. 3 測定モデル

以下では、構造方程式モデリングの測定モデルについて、最尤法によって実現できたことを中心に、清水（1989, 1994, 2013）で紹介した内容を簡単に整理する。まず、ここでは、statistical school による因子分析モデルと psychometric school の伝統的な方法とを比較し、後者の方法論的限界について検討してみることにする。

1. 3. 1 観測変数を素点とする因子分析モデル

ある一群の観測変数（ n 個）からなるベクトル \mathbf{x} を確率変数とし、観測変数の切片のベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ とし、そして、因子の数を m として、因子分析モデルを簡潔に定義してみることにする。

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{A}_x は $(n \times m)$ 次の因子パターン行列であり、 $\boldsymbol{\xi}$ は因子得点ベクトル（ m ）次、 $\boldsymbol{\sigma}$ は独自性得点のベクトル（ n ）次である。

次に、この変数間の母集団の $(n \times n)$ 次の共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を

$$E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau})'\} = \boldsymbol{\Sigma} \quad (2)$$

とする。ここで、 $\boldsymbol{\Phi}$ （ $m \times m$ ）次を因子間の共分散行列とし、 $\boldsymbol{\Theta}$ を $(n \times n)$ 次の対角項を観測変数の独自性とする対角行列とすると、以上から(1)式の共分散行列を次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_x \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}_x' + \boldsymbol{\Theta} \quad (3)$$

簡潔にまとめれば、因子分析法は、 \mathbf{A}_x 、 $\boldsymbol{\Phi}$ 、そして、 $\boldsymbol{\Theta}$ の各行列の要素の母数（あるいはパラメータ）の値を推定する方法といえる（市川（2010）、Mulaik（2010）など）。

1. 3. 2 観測変数を標準得点とする因子分析モデル

psychometric school の研究者たちによる因子分析法は、その始まりにおいては、観測変数間の共分散行列ではなく、相関行列 \mathbf{R} （ $n \times n$ ）次を対象としていた。この相関行列の固有分解から因子数を決定し、因子解を計算し、同時に、共通性を計算した。そして、初期の因子行列を単純構造への回転することによって、因子パターン行列を求めた。

共分散を対象とした場合、(1)式の観測変数のベクトル \mathbf{x} は別な表現では素点ベクトルでもある。これに対して、観測変数間の相関行列 \mathbf{R} は、観測変数の標準得点ベクトル \mathbf{z}

の積でもある。ここで、標準得点からの因子分析法のモデル式を、 \mathbf{V} を $(n \times m)$ 次の因子パターン行列とし、 \mathbf{f} を標準得点の下での因子得点ベクトル (m) 次とし、 \mathbf{d} を独自性得点のベクトル (n) 次として、(1)式のように表すとこの場合は次のようになる。

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{f} + \mathbf{d} \quad (4)$$

この式でのポイントは、観測変数を標準化していることである。すべての観測変数の平均はゼロであるので、該当するベクトルの項は省略している。伝統的な因子分析法では因子パターン行列 \mathbf{V} を、このように相関行列から求める方法を開発してきた。この(4)式の因子得点も、平均がゼロで分散が1であることを仮定している。なお、独自性 \mathbf{d} の各要素については、1から共通性の値を引くことによって得ることができるので、これを推定の対象とすることはなかった。(1)式の \mathbf{A}_x を標準化したのが、(4)式の \mathbf{V} でもある。この因子解の標準化の詳細については、市川（2010）が因子分析全般を含め詳しいので、これを参照してもらうこととして、ここでは省略する。

1. 4 平均構造

共分散構造では、(1)式のように観測変数の切片（平均）もモデルの式に組み込んでいた。しかしながら、(3)式のように定義された推定する各母数には、潜在変数の平均が組み込まれていない。ここでは、「平均構造分析」として、潜在変数の平均を求める方法について、この問題を最初に定式化したSörbom（1974）に従いながら説明をおこなう。その際、Jöreskog & SörbomによるLISRELの開発過程を紹介した清水（1994）も部分的に引用する。

まず、分析対象の集団が g 個あるとする。ここで、ある集団を表す記号を l として、(1)式から次のようにして(3)式を導いてみることにする。なお、第 l 集団であることを示すために観測変数ベクトルに添字を付けて \mathbf{x}_l とし、因子パターン行列にも同様に添字を付けて \mathbf{A}_{xl} とする。ただし、観測変数の切片は分析対象の全ての集団で同一とするので、添字を付けずに (n) 次のベクトル $\boldsymbol{\tau}$ とする。そして、第 l 集団の潜在変数 $\boldsymbol{\xi}_l$ の期待値のベクトルを \mathbf{k}_l (m) 次とする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_l &= E[(\mathbf{x}_l - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}_{xl}\mathbf{k}_l)(\mathbf{x}_l - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}_{xl}\mathbf{k}_l)'] \\ &= \mathbf{A}_{xl}\boldsymbol{\Phi}_l\mathbf{A}_{xl}' + \boldsymbol{\Theta}_l \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Phi}_l$ は第 l 集団の潜在変数間の共分散行列である。そして、 $\boldsymbol{\Theta}_l$ が独自性の対角行列である。観測変数の期待値ベクトルは、ここでは、

$$E[\mathbf{x}_l] = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}_{xl}\mathbf{k}_l \quad (6)$$

と表す。なお、ここでは独自性の平均はゼロとして、Meredith (1993) のような推定の対象とはしていない。

この関係を推定において識別するために、まず、観測変数の切片が全集団 (g 個) で同じとする。次に、分析対象の全集団の因子パターン行列の全ての要素を同一とする。そして、どれかの集団の因子の平均がゼロとする。以上をまとめると次のようになる。

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \cdots = \boldsymbol{\tau}_l = \cdots = \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{\tau} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{x1} = \mathbf{A}_{x2} = \cdots = \mathbf{A}_{xl} = \cdots = \mathbf{A}_{xg} = \mathbf{A}_x \quad (8)$$

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{0} \quad (9)$$

(9)式は、第 g 番目の集団の因子の平均ベクトルの要素をゼロとしていることを表しており、この拘束により、それ以外の \mathbf{k}_1 から \mathbf{k}_{g-1} の平均ベクトルを推定することができる。このように定義したモデルは、後ほど 2. 3 で説明する「因子的不変性」に該当する。

因子分析での因子のような潜在変数の平均を取り扱うには、観測変数の素点のデータが必要となる。素点が入手できない場合、この平均構造分析の対象は、LISREL のような構造方程式モデリングのソフトでは、共分散行列ではなく、共分散行列と平均ベクトルとからなるモーメント行列となる（詳しくは、清水 (1994) の p.19 を参照）。ここまでは、共分散行列としてきたが、正確には、分散を対角線とする分散・共分散行列のことであり、分散の平方の標準偏差を計算すれば、相関行列へも変換可能である。

潜在変数の平均を識別するには、ここで説明しているように、観測変数を同じとした調査で収集した g 個の複数の集団とするか、あるいは、集団が一つの場合には同じ観測変数での縦断的測定としなければならない。縦断については、清水 (2003) や清水・三保・西川 (2021) などを、そして、潜在成長モデル (清水, 1999) などを参考にしてもらうことにして、ここまでは、2 で説明する「多集団分析：因子的不変性」の「不変性」の議論の準備として複数の集団を対象として簡単に説明してきた。

Sörbom (1974) に敬意を払って、ここではさらに、“Sörbom” と “structured mean” とを検索してみた。その結果は17件であった。後者を “mean structure” に変更すると918件であり、“factor mean” では、890件であった。これまでは「構造平均」としたこともあったが、これからは、前にも述べたように「平均構造」とする。

1. 5 構造モデル

心理学研究では、信頼性と妥当性の報告が求められる。psychometric school では、信頼性のある尺度を構成して、その尺度の妥当性を検討することがおこなわれてきた。この

確立された伝統的な方法は、構成概念についての因子分析的研究から尺度を構成し、この尺度の標準化資料を整えて、心理診断などの応用利用に供するという一連の流れにおいて使用されてきた。標準化や応用利用を目的としない研究でも、同じような手順で信頼性と妥当性の報告がおこなわれている。このような研究の流れでは、尺度構成の研究から信頼性・妥当性の研究へと2段階の手順を踏むことになる。このため、構成した尺度の妥当性であっても、本来の因子の妥当性とはいえないのではないだろうか。これに対して、「構造方程式モデリング」では、測定モデルを因子とすれば、構造モデルは、因子間の関係性を、共分散関係（相関関係）からあるいは因果的な影響の度合いから明らかにしてくれる。そして、観測変数と潜在変数とを一つのモデル図式の上で、このような関係性だけでなく、潜在変数である因子の平均も特定することができる。

ここまでは構造モデルについては、十分に説明してこなかった。そこで、構造方程式モデリングの全体像を示すために LISREL のフルモデル（Jöreskog & Sörbom, 1989）を、清水（1994）を参照しながら簡単に紹介してみることにする。なお、ここでは、LISREL に従って、観測変数については、経済学の構造方程式の伝統に従い外生変数と内生変数を区別し、それぞれの潜在変数において、共分散や因果的關係を想定し、さらに、平均構造も推定の対象としてみることにする。

以下では、外生潜在変数 ξ と内生潜在変数 η との関係を次のように表す。ここで、まず、外生変数について、観測変数のベクトルを \mathbf{x} (n_x) 次とし、この切片のベクトルを $\boldsymbol{\tau}_x$ とする。外生潜在変数を ξ (m_x) 次とし、因子パターン行列については、 \mathbf{A}_x ($n_x \times m_x$) 次とし、 $\boldsymbol{\sigma}$ を独自性得点のベクトル (n_x) 次とする。次に、内生変数については、観測変数のベクトルを \mathbf{y} (n_y) 次とし、この切片のベクトルを $\boldsymbol{\tau}_y$ とする。内生潜在変数を η (m_y) 次とし、因子パターン行列については、 \mathbf{A}_y ($n_y \times m_y$) 次とし、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を独自性得点のベクトル (n_y) 次とする。さらに、 \mathbf{B} を ($m_y \times m_y$) 次の内生潜在変数間の係数行列とし、 $\boldsymbol{\Gamma}$ を ($m_y \times m_x$) 次の内生潜在変数と内生潜在変数間の係数行列とする。そして、 \mathbf{a} を (m_y) 次の構造モデルの切片ベクトルとし、 $\boldsymbol{\zeta}$ を (m_y) 次の同じく独自性（残差）ベクトルとする。以上の関係から、構造モデルを次のように表す。

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (10)$$

ここでは、外生変数の測定モデルと内生変数の測定モデルは、それぞれ、

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{A}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{A}_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

と表す。なお、潜在変数間の共分散は、 $Cov(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{O}$ 、 $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{O}$ 、 $Cov(\boldsymbol{\sigma},$

ξ) = $\mathbf{0}$ と互いに独立とし、各独自性 ζ 、 σ 、 ε は互いに相関しないものとする。さらに、各期待値について、 $E[\zeta] = \mathbf{0}$ 、 $E[\varepsilon] = \mathbf{0}$ 、 $E[\sigma] = \mathbf{0}$ とおき、 $E[\xi] = \mathbf{k}$ とする。そして、 $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ が正則であるとする、内生潜在変数の切片は

$$E[\boldsymbol{\eta}] = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{k}) \quad (13)$$

と表すことができる。ここでは、内生観測変数と外生観測変数の期待値を、

$$E[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{A}_y(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{k}) \quad (14)$$

$$E[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{A}_x\mathbf{k} \quad (15)$$

とする (Jöreskog & Sörbom (1989)、清水 (1994) など)。

以上では、経済学の構造方程式の伝統に従い外生変数と内生変数を区別し、それぞれの潜在変数において、共分散や因果的關係を想定し、さらに、平均構造も推定の対象としてみた。このような区別は LISREL のモデルの特徴であり、Bentler (1986) が紹介しているように、このような区別を設定しないより包括的なモデルも RAM のように提案されている (清水、1989)。

ここで紹介した LISREL のフルモデルにおいても、因子の不変性を確保しながら、潜在変数の平均を多集団を対象とした分析によって推定することができる。構造方程式モデリングが確立したこのような方法を構成概念の妥当性研究に活用することができるのではないだろうか (狩野, 2002a)。

1. 6 数学的計算 (固有分解) と数理統計学的推測 (最尤法)

1. 6. 1 固有分解をベースとする psychometric school の計算の方法

ここでは、因子分析の二つの方法の違いを明確にするために、まず、伝統的な因子分析の手順を簡単に整理してみる。なお、ここで紹介する手順については、清水 (2018) で注意点や誤用などをまとめたので参照されたい。

相関行列 \mathbf{R} を対象とした古典的な因子分析は、この行列の固有分解により m 個の固有値と固有ベクトルを計算する手法でもあった。固有値の一般的な計算方法では、まず、最大の固有値とこれに対応する固有ベクトルを算出し、これらの値を差し引いた残差の相関行列から次の固有値と固有ベクトルを計算する。通常はこの計算を繰り返して、 n 個の固有値を得る。因子 m の数は、これらの固有値の減衰から決定する Scree が一般的である。

共通性は、次のような計算の過程から得られる。まず、相関行列の対角項を、仮の共通性を最初は1.0として、計算された因子行列 (主因子解) \mathbf{V} から共通性を算出し、これを次の共通性として相関行列の対角項に代入し、次に \mathbf{V} を計算する。前の共通性の値と次

の値との差が0.001などのような指定した値よりも小さくなった時に、共通性が収束したとして、この過程を終えることになる。

主因子法の計算では、相関行列 \mathbf{R} から因子の分散が大きいものから順に因子を抽出する。この因子の分散は固有値に対応しており、その大きさという数学的基準に従う方法でもある。心理学にこのような数学的基準を Thurstone (1935) が主軸法 (principal axes) として因子解の計算に導入したのは、相関行列に潜在する因子 (潜在変数) を m 次元の因子空間における n 個の観測変数の関係性から探し出すためであった。この基準に従う方法は、 n 個の変数に潜在する一つの因子だけを解釈することを目的とする場合には、知能の一般因子のように、意義があったといえよう。この時代は手計算であった。固有値・固有ベクトルの計算の負荷は大きかったようである。そこで、彼は、近似的な結果を得る方法としてセントロイド法を導入している。さらに、潜在する多因子を心理学的に解釈するために、因子軸の回転の基準として単純構造を提案した。

その後、この分野では、さまざま因子分析法についての理論的な研究がおこなわれてきた。一つは、因子数の決定に関するものであり、主因子法に替わる因子解の推定方法であり、もう一つは、単純構造を求める回転方法であった。そして、因子分析の応用として、尺度の構成や信頼性の推定などの研究も蓄積されてきた。構成した心理尺度については、前述したように、その妥当性の検討のために、多変量解析法の理論や解析方法の研究も蓄積されてきた。

以下では、構造方程式モデリングでの母数の推定そして適合度について紹介し、ここで説明してきた固有分解をベースとする伝統的な方法での方法論的限界と最尤法によって実現できたこととを比較してみることにする。

1. 6. 2 最尤法をベースとする statistical school : 母数の推定と適合度

構造方程式モデリングでは、(3)式の \mathbf{A}_x 、 $\boldsymbol{\Phi}$ 、そして、 $\boldsymbol{\Theta}$ の各行列で母数を特定した要素を全体としてベクトル $\boldsymbol{\theta}$ とし、母集団の構造を $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ と表すことにする。実際の測定から得られた標本の共分散行列を \mathbf{S} とすると、この \mathbf{S} と $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ との関係を不一致関数として定義し、これを最小化する方法として最尤法が使用されてきた。多変量正規分布を前提とする最尤法については、分布から乖離しても頑健性があることが報告されており、一般化最小二乗法や漸近的非分布依存法など数多くの推定方法があることをここでは指摘しておきたい。

最尤法からの結果では、求める母数の数を q とすると帰無仮説を「モデルの適合度がよい」とし、 χ^2 検定を自由度 $(n(n+1)/2 - q)$ の下で適用することができる。この検定

では、標本の数が多くなるほど棄却されやすくなる。この弱点を改善するために、その後数多くの指標が提案されてきた。ベストな指標がない状況の中で、欧米の研究でよく使用される指標と基準を少しだけ紹介してみることにする。

最尤法での結果では、まず、 χ^2 と自由度を報告しなければならない。この指標は、サンプルサイズの影響を受けために、多くの研究では $P < 0.05$ で帰無仮説を棄却することになる。より適切な指標を求めらる中で、いろいろな試みがおこなわれてきた。以下では、代表的な適合度の指標について、その一部をそれらの基準値とともに示す。

RMSEA: Root Mean Error of Approximation: 0.06以下

SRMR: Standardized Root Mean Square Residual: 0.08以下

CFI: Comparative Fit Index: 0.95以上

NFI: Normed Fit Index: 0.95以上

TLI: Tucker-Lewis Index: 0.95以上

GFI: Goodness of Fit Index: 0.95以上

詳しくは、West, We, McNeish, & Savord (2023) を参照してほしい。このような指標については、より適切な指標と基準に関して研究がおこなわれており、最新の文献を参照することを勧めたい。そして、一つの指標だけではなく、複数の指標から仮説的モデルを採択するかどうかを決定することを勧めたい。

構造方程式モデリングでは、最尤法を母数の推定に使用してきた。これは同時に、推定値の標準誤差も得ることができからである。この標準誤差により、「推定値をゼロ」とする帰無仮説をワルド検定により棄却判断をすることができる。モデルを修正する際には、このワルド検定や解析ソフトが提供してくれる修正指数も利用することもできる。

1. 6. 3 psychometric school と statistical school との比較

以上の議論を踏まえ、ここでは、主因子法（固有分解による方法）と最尤法による方法について、その特徴を研究の遂行において重要となるポイントを取り上げ、（ポイント：psychometric school の主因子法を使用した場合 => statistical school の最尤法を使用した場合）と記して簡単にまとめてみることにする。

因子数の決定：固有値の減衰を scree の図から主観的に判断

=> モデル適合度の指標から判断

因子解の推定：因子パターンの全要素を計算

=>構成概念の仮説に応じて、固定・自由推定・拘束推定。そして、推定値の標準誤差を推定。識別性を確保するために、潜在変数ごとに、一つの要素だけを1.0に固定

因子の回転：多様な回転法がある（因子回転の不定性）

=>回転はしない

因子パターンの評価：主観的に評価基準を設定

=>推定値の標準誤差からワルド検定を適用

独自性：1.0から共通性を引いた値

=>推定の対象

因子得点：多様な推定方法がある（因子得点の不定性）

=>(1)式にあるようにモデル内の確率変数

因子得点の平均：標準得点として0.0

=>「平均構造」として1.4で紹介した推定が可能

結果の総合的評価：主観的考察

=>モデル適合度から判断

なお、因子の回転や因子得点の推定についての indeterminacy については、丘本（1986）などは「不確定性」としているが、ここでは、市川（2010）に従って「不定性」とした。さらにここでは、独自性について、いくつか議論を追加する。まず、観測変数の全体分散は、共通性と独自性の和であり、この独自性は、特殊性とランダム誤差の分散の和である。psychometric school が因子分析法とは関連させながらも独立に構築してきた古典的テスト理論は、観測変数の分散を真の得点の分散とランダム誤差の分散の和とし、信頼性を真の分散と全体分散との比として定義している。この真の得点の分散には、因子分析で抽出した共通因子の分散と特殊性とが含まれる。このため、因子分析モデルの定義とこの信頼性の定義と食い違うことになる。この点は、古くから Thurstone（1947）や Lord & Novick（1968）などによって、以下の定義式のように、指摘されてきた。

$$Total\ variance = 1 = h_j^2 + b_j^2 + e_j^2 = h_j^2 + u_j^2$$

$$Reliability = r_{jj} = h_j^2 + b_j^2 = 1 - e_j^2$$

$$Communality = h_j^2 = h_j^2 = 1 - u_j^2$$

$$Specificity = b_j^2 = b_j^2$$

$$Uniqueness = u_j^2 = b_j^2 + e_j^2$$

$$\text{Error variance} = e_j^2 = 1 - r_{jj}$$

以上の定義式は Thurstone (1947) の p.85から引用した。上から順に、観測変数 j の全分散、信頼性、共通性、特殊性、独自性、そして、誤差分散である。

因子分析から構成した尺度の信頼性の推定についてはいろいろな試みがおこなわれてきた。これに回答を与えたのが, Cattell & Tsujioka (1964) あるいは辻岡 (1964) である。彼らは、共通因子空間に布置する複数の項目を合成した尺度の共通性と因子的真实性係数とを定義している。これとは別に、McDonald (1999) は、1 因子モデルではあるが、構成した尺度の共通性から信頼性を ω として定義している。多因子からの共通性は、展開を1次元とすると ω に一致する (清水, 2010)。このような定義は、共通因子空間を対象としており、psychometric school の到達点であるかもしれない。ここで指摘しておきたいのは、古典的テスト理論のような信頼性についての定義や推定の方法を、構造方程式モデリングではどのように議論すべきなのかということである。この点については妥当性も含め稿を改めたい。

独自性間の共分散については、これを使用することに批判的な意見もある。清水・柴田 (2008)、清水・山本 (2008) や清水・吉田 (2008) でも検討したように、真の得点の分散の一部である特殊性については、共分散を仮定できるのではないかと考えている。ただし、観測変数に内在する項目表現や繰り返し測定などによる道具的な共分散に限定し、構造方程式モデリングで適合度を高めることだけを目的として共分散を設定することは避けるべきである。ここで強調しておきたいことは、ランダム誤差は他の変数とは独立してランダムに生起するということである。このランダムという性質により、この誤差間に共分散を仮定することはできない。

繰り返しとなるが、独自性には特殊性が含まれる。この特殊性にはこの測定変数にだけの独自の分散が含まれる。この分散は古典的テスト理論では真の分散の一部であり、他の変数との共変関係を想定することができる。たとえば、同じ変数を繰り返し測定した場合である。そして、観測変数の表現に類似した表現が一部でも含まれている場合も共変関係があると考えられる。この共分散は psychometric school では処理することが難しかった。これに対して、構造方程式モデリングでは独自性共分散の推定という操作ができるようになったわけであり、潜在する構造を妥当性という観点からも検討するためには、もっと積極的に活用してもいいのではないだろうか (狩野 (2002a,b) や清水 (2003) など)。

2. 多集団分析：因子的不変性

2. 1 検索からみえる様相

因子分析の古典的な課題であった因子的不変性を検討する方法について、真鍋・前田・清水（2021, 2022）がいくつかの日本語表現が並存していることを指摘している。検索してみると、たとえば、“多集団同時分析”（約55件）、“多集団分析”（約7件）と“多母集団同時分析”（約1,490件）、多母集団分析”（約55件）、そして、“多集団確証的因子分析”（約11件）などの表記があった。同じような用語を英語表記で検索すると“multigroup confirmatory factor analysis”（約3,770件）、“multi-group confirmatory factor analysis”（約4,570件）、“multigroup simultaneous analysis”（約4件）、“multi-group simultaneous analysis”（約14件）、“multi-population simultaneous analysis”（約12件）、“multi-population analysis”（約246件）、そして、“multi-population confirmatory factor analysis”（約1件）であった。

この用語については、清水（1989）では、共分散行列を対象として、構造方程式モデルの方法の一つとして、「仮説検証的因子分析」と「多群同時分析」という記述を Jöreskog（1969, 1971）などを紹介しながらおこなった。その際に、「母集団」ではなく「多群標本の同時分析」と表現し、日本語の訳語についてもいくつかの議論を行っている。この議論の詳細は、後ほどさらに検討することにして、現時点では、日本では「多母」を付けた表記が多く、清水（1989）は少数派のようである。欧米では、multi-group あるいは multigroup であり、「多母」に対応する multi-population とする研究が少数であることをここでは指摘しておきたい。

2. 2 確率的に独立した集団

Jöreskog（1967）は、psychometric school が使用してきた主因子法に替わって最尤法を導入した。これは一つの集団の観測変数に潜在する因子を探索する方法であり、探索的因子分析の一つでもあった。彼は引き続き、共通因子分析について(3)式の Λ_x 、 Φ 、そして、 Θ の各行列の要素の母数について、0.0あるいは1.0などに固定し、残りを最尤法により自由に推定し、適合度を χ^2 で検定する方法を confirmatory factor analysis として提案した（Jöreskog, 1971）。この方法は、日本語では「確証的因子分析」として定着しているのではないだろうか。なお、ここで紹介した二つの因子分析については、unrestricted と restricted を factor analysis の冠としてつけることもある。

Jöreskog (1971) は、さらに、母集団からの一つの標本を対象とした confirmatory factor analysis で実現した母数の推定である自由と固定そして拘束を、複数の集団間に適用した方法を “simultaneous factor analysis in several populations” というタイトルで発表した。適合度については、個別の標本ではなく、複数の集団の全体から得られる x^2 で検定する方法を採用している。

ここでは具体的に説明するために二つの母集団を想定してみることにする。それぞれの母集団の共分散行列に添字を付けて、 Σ_1 そして Σ_2 とする。(3)式あるいは(5)式について、ここでは、それぞれを次のようにする。まず、因子パターン行列 A については全要素を同一として、添字を付けないことにする。この行列の列が因子に対応しており、列の中で一番高い値となることが予想される母数は1.0で固定する。母数がゼロに近くなると想定できる要素はゼロで固定する。そして、先行研究などから仮定できるワルド検定でも有意と想定できる母数については、二つの集団で同値とした拘束の下で推定する。そして、因子間共分散行列 Φ と独自性の対角行列 Θ については、集団間で母数に拘束をかけずに、それぞれ自由推定とする。以上から二つの母共分散行列を次のように表す。

$$\Sigma_1 = A \Phi_1 A' + \Theta_1 \quad (16)$$

$$\Sigma_2 = A \Phi_2 A' + \Theta_2 \quad (17)$$

最尤法での最小化の関数 F は、各標本の共分散行列をそれぞれ S_1 と S_2 とし、それぞれの標本の数を N_1 と N_2 とすると、1.6.2で説明したことから、次のように表すことができる。

$$F = (N_1/N)F_1(S_1, \Sigma_1(\Theta_1)) + (N_2/N)F_2(S_2, \Sigma_2(\Theta_2)) \quad (18)$$

ここで、 $N = N_1 + N_2$ である。この関数は独立した二つの母集団についての関数の和を想定している。これが同時 simultaneous という意味であり、このことを視覚的にも捉えやすいように、Jöreskog (1971) の(11)式や McDonald (1980) を参考に、二つの独立した母集団を一つの超行列を Σ として、次のように示してみる。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここでは、独立した関係を明示するために母集団1と母集団2の共分散関係をゼロ行列としている。このような母集団からそれぞれ独立に抽出した標本集団として、その超行列を S とし、次のように表す。

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここで重要な点は、分析対象の複数の母集団を想定したとすれば、複数の標本が独立していることを保証するデータ収集の手順を遵守すべきということである。

二つの集団を想定した(18)式は、 g 個の集団の同時分析も最小化関数を一般化すれば、次のようにまとめることができる。

$$F = \sum_{l=1}^g \left[\frac{N_l}{N} \right] F_l(\mathbf{S}_l, \boldsymbol{\Sigma}_l(\boldsymbol{\theta}_l)) \quad (21)$$

ここで、添字の l は、(5)式などと同じように、第 l 番目を表す。

構造方程式モデリングが母集団から抽出された標本を対象とした分析であることは、広く了解されていることではないだろうか。そして、多数の集団を「同時」に分析することも、わざわざ断ることも必要ではなくなってきたのではないだろうか。ここで検索語を“multi-group analysis”と“structural equation modeling”とすると、約13,400件となった。この分野を代表するテキストである Bollen (1989) は multigroup analysis としており、この分野で最近になって発刊されたハンドブックでも multi group analysis あるいは multi-group model である (Hoyle, 2023)。以上から、Sörbom (1978) のいう確率的に独立した調査から得られた集団を分析の対象としていることを条件として、「構造方程式モデリングによる多集団分析」という記述で、分析の内容がこの分野に携わる者には十分に伝わるのではないかと考えた。

2. 3 因子的不変性

心理学の測定で、複数の集団を比較するために使用される統計量は、平均、分散、共分散である。上でも述べたように、因子分析の結果から構成された尺度で、妥当性を検討するために、尺度の平均についての t 検定や分散分析などで集団間の比較がおこなわれてきた。

ここでは、二つの集団を対象として、このような尺度を使った比較が成立しない場合について考えてみることにする。まず、二つの集団で因子の数が異なった場合である。たとえば、一つの集団が1次元で、もう一つが多次元とすると、比較の枠組みが共有できていないことになる。次は、因子の数が同じでも、因子と変数との関係性である因子パターンが異なった場合である。枠組みの数は同じでも、異なる要素からなる尺度で集団間の比較をおこなうことになってしまう。

psychometric school の因子的不変性についての研究では、探索的に集団間での因子の類似度を一致性係数などから得られた数値を解釈して、その結果を報告していた。このや

り方では、類似したという解釈から次の比較というデータ処理へと進むことになる。最終的な尺度による比較分析の結果に、このような曖昧な判断が、どのように、そして、どの程度まで影響したのかは、強い言葉からもしれないが、不明であると言わざるをえない。

statistical school を先導した Jöreskog (1971) と Sörbom (1974) とにより、因子的不変性の下で平均構造による因子の比較について、新しい道具が「構造方程式モデリングによる多集団分析」として応用研究に提供されたことは先にも述べた。ここでは、Meredith (1993) や Millsap (2011) も参照しながら、因子的不変性にもう少し深く入って、整理をしてみることにする。

(5)式の因子パターン行列 \mathbf{A} 、因子間共分散行列 Φ と独自性の対角行列 Θ について、集団間での拘束について記述するために、ここでは、以下のような準備をおこなう。まず、これまでと同じように対象となる集団の数を g とする。この中から第 l 集団を代表させ、それぞれの集団で母数を自由に推定する場合には、この l を添字として行列に付ける。添字 l が付いていない行列は全集団で全要素を同値に拘束したとする。

次に、ここで定義する因子的不変性のモデルを識別するためには、全ての集団において一つの因子パターン行列 \mathbf{A} を先行研究あるいは仮説から設定する。具体的には、行列の列ごとに最も高い値となることが予想される要素を1.0で固定する。列の他の要素で因子に該当する観測変数が因子に関連がない（負荷しない）場合には、0.0で固定する。ある程度以上の有意な値となることが予想される要素には母数の同値拘束を与える。ここで拘束するのは、全集団の行列 \mathbf{A} の対応する要素である。この指定を残りの因子（列）を対象にもおこなう。さらに、観測変数の切片ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ が全集団で同じとする。そして、平均構造を検討する場合には、どれかの集団の因子の平均の全ての \mathbf{k} をゼロ・ベクトルとする。以上から、次の3種類のレベルの因子的不変性を定義する。

厳格な因子的不変性：これは、因子パターン行列 \mathbf{A} 、因子間共分散行列 Φ と独自性の対角行列 Θ についても集団間で同一の値となるように拘束推定を適用した因子的不変性である。ここでは、(5)式と平均構造の(6)式とを並べて、次のように表す。

$$\boldsymbol{\Sigma}_l = \mathbf{A} \Phi \mathbf{A}' + \Theta, E[\mathbf{x}_l] = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{k}_l \quad (22)$$

なお、平均構造でも説明したように、因子得点の平均は、この第 l 集団では推定し、識別を確保するためにどれか一つの集団で全ての値をゼロに固定する。また、観測変数の切片のベクトルである $\boldsymbol{\tau}$ は、分析対象の全ての集団で同じとして拘束している。この不変性が成立すると、対象となる複数の集団間で測定が完全に等価であるといえる。この不変性で

は、集団間の違いは、潜在変数である因子得点の平均値となる。

強因子的不変性：これは、因子パターン行列 \mathbf{A} と独自性の対角行列 $\boldsymbol{\Theta}$ とに、集団間で同一の値となるような拘束推定を適用した因子的不変性である。因子間共分散行列 $\boldsymbol{\Phi}_l$ については、それぞれの集団 l での自由推定を容認することになる。この関係を次のように表す。

$$\boldsymbol{\Sigma}_l = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_l \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Theta}, E[\mathbf{x}_l] = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{k}_l \quad (23)$$

この不変性では、集団間の違いは、自由に推定される因子の分散・共分散の値と因子得点の平均であり、これらの値から集団間の違いを解釈することになる。

因子パターン不変性：「1.4 平均構造」で説明したのがこの不変性であった。その内容を繰り返すと、因子パターン行列 \mathbf{A} のみが集団間で同一の値となるような拘束推定を適用した因子的不変性であり、次のように表す。

$$\boldsymbol{\Sigma}_l = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_l \mathbf{A}' + \boldsymbol{\Theta}_l, E[\mathbf{x}_l] = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{k}_l \quad (24)$$

この不変性での集団間の差異は、独自性 $\boldsymbol{\Theta}_l$ と因子の分散・共分散 $\boldsymbol{\Phi}_l$ について自由に推定した値にあらわれる。そして、推定した集団の因子得点の平均にもである。

ここで定義を示した3種類のレベルについては、本稿で引用してきた清水（1989, 1994, 2003, 2013）などとは違い、集団間で母数の拘束の強いものから順に並べた。心理学的研究の research questions の一つは、集団の平均の違いについてであり、因子的不変性は、このような集団間での比較の根拠を提供してくれると考えたからである。そこで、集団比較を目的とする研究場面において確保することが望ましいレベルは、「厳格な因子的不変性」であるとしたわけである。この適合度が適切であると判断できない時には、次に、「強因子的不変性」を、場合によっては、さらに「因子パターン不変性」へと分析が続くことになる。

平均構造の推定で有意でない推定値となった場合には、これをゼロに固定するなど、実際の分析ではいろいろな手順を踏みながらより良い適合度の結果を因子パターン、因子間共分散、独自性について報告することになる。最終的な結果に到った際には、適合度の指標、そして、母数の推定値と標準誤差を掲載しなければならない。標準化した数値は、あくまでも psychometric school の伝統であって、ここで紹介したのは、statistical school が素点をベースに構築してきた方法なのである。

因子的不変性と平均構造についての分析は、一つの集団を対象とした場合であっても、同じ観測変数を繰り返して測定した研究でも使用できる（Bollen, 1989）。これは測定モデルだけではなく、LISREL のフルモデルでの因果関係へも展開できる（Jöreskog, 2007）。応用的な研究では、たとえば、McArdle & Nesselroade（2014）による縦断的デー

タの分析がある。そして、特性・状態区分モデル（清水・三保・西川，2021）である。ここでは、このような応用研究分野での議論については割愛する。

3. configural の訳語

3. 1 検索からみえる様相

真鍋ら（2021, 2022）は、“configural invariance”について、「布置不変性」あるいは「配置不変性」の二つの訳語が使われていることを指摘している。ここでは、使用頻度を次の検索語で調べてみた。まず、“因子”と“布置不変性”である。この結果は、約23件となった。次に“配置不変性”に置き換えてみると約181件となった。「布置不変性」とした清水（1989）はここでも少数派のようである。

3. 2 因子的不変性の4番目

Meredith（1993）は、因子的不変性を4種類のレベルに分類した。その内容については、これまでも、清水（1989, 1994, 2003, 2013）などにおいて何回か紹介してきた。上の「2.3 因子的不変性」では、その一つである configural invariance を除外した3つのレベルを Millsap（2011）に従って、構造方程式モデリングの観点から平均構造とともに紹介した。ここでは、残した Horn, McArdle, & Mason（1980）による4番目の不変性について、ここまでも同じ枠組みで検討し、これを除外した理由について議論してみたい。なお、この4番目については英語表記としたままで議論を始めることにする。

(24)式の因子パターン不変性では、因子パターンを \mathbf{A} と表した。これは、特定の集団を表す添字を付けないことにより、対象となる g 個の集団の全てにおいて、この行列の全要素が同じであることを示すためであった。これに対して、configural invarianceでの因子パターン行列 \mathbf{A}_l には、ある集団を意味する添字 l を付けることにする。これにより、因子パターン行列が集団ごとに g 個の種類があることになる。ただし、識別のための1.0や0.0の固定の指定は、上で説明した他の3種類の不変性と同じである。違うのは、ある程度以上の有意な値となる要素についてであり、 g 個の集団での該当する要素には集団間での拘束をおかずにそれぞれの集団で自由に推定するとする。これがこの configural invariance の特徴である。先行研究あるいは仮説から一つの集団を対象として confirmatory factor analysis の識別モデルを設定するのと同じ作業を各集団においておこない、これを(24)式のように g 個の全集団を対象として同時分析を適用すると考えることもできる。ここで、さ

らに、観測変数の切片 τ が全集団で同じとし、どれか一つの集団の因子の平均ベクトル k の全ての要素をゼロとすると、(24)式を応用して次のように、この不変性のモデルを表すことができる。

$$\Sigma_l = \mathbf{A}_l \Phi_l \mathbf{A}_l' + \Theta_l, E[\mathbf{x}_l] = \tau + \mathbf{A}_l k_l \quad (25)$$

繰り返しになるが、この式で、添字 l を付けたように、因子パターン不変性と同じく、因子間共分散行列 Φ_l も、独自性の対角行列 Θ_l も集団によって異なった値が推定される。言い換えれば、configural invariance からは、因子パターン行列での因子と変数との関係性の枠組みは同じであるので、因子の解釈はそれほど変わらないかもしれないが、それぞれの集団の特徴が反映された因子パターンの値となる。この(25)式の平均構造では、期待値 $E[\mathbf{x}_l]$ の \mathbf{A}_l となっているように、(22)式から(24)式で \mathbf{A} であったのと比べると、比較対象の集団間では因子パターンが同じとはならない。この結果、因子分析での推定値の自由度が、他のレベルの不変性と比べて高くなるともいえる。

このように、configural invariance は、標本間での観測変数と潜在変数との関係性の構造は同じとするが、関係の強さの程度に関しては、標本間での相違を許容するモデルである。このため、平均構造の分析結果に現れる集団間での差異については、因子パターン行列 \mathbf{A} が同じであるというような確固とした根拠に基づく解釈が困難となると考えられる。以上を踏まえると、(25)式を書き直すとしたら、平均構造の分析をおこなわない、共分散構造分析のみを対象として、次のように表すのが適切ではないだろうか。

$$\Sigma_l = \mathbf{A}_l \Phi_l \mathbf{A}_l' + \Theta_l \quad (26)$$

この因子的不変性は、条件付きの探索的因子分析でもあると考えることもできる。その条件とは、因子パターン行列 \mathbf{A}_l の要素について、因子と変数との関係性を同じとするものがある。ただし、具体的な因子パターンの個々の値は、集団によって異なったものとなることが予想される。集団間の違いが推定されるのは、この他にも、因子間の共分散や独自性の値である。

ここでの結論は、伝統的に使用してきた4種類のレベルの因子的不変性は2つに分類することができるというものである。この分類の基準は、研究の目的である。平均構造を追究する場合には、「2.3 因子的不変性」で紹介した「厳格な因子的不変性」「強因子的不変性」そして「因子パターン不変性」となる (Millsap, 2011)。もう一つが configural invariance であり、これを使用することによって、「因子と変数との関係性」という configuration の下で、探索的に因子の構造を明らかにすることができる。この場合、他の三つのレベルの不変性とは違って、平均構造を推定することは避けるべきである。

3. 3 因子空間からみえる「因子と変数との関係性」の関係性

ここでは、1986年に関西大学の在外研究員として Pennsylvania State University に滞在した時の思い出からはじめたい。訪米する前から LISREL に関してはそれなりに読み込んでいたが、McArdle & McDonald (1984) の RAM (Reticula Action Model) については、このモデルの意味するところを把握することができないままであった。この年は Thurstone が創刊した *Psychometrika* 誌の50周年にあたり、因子分析法や構造方程式モデリングなどについての記念論文が掲載されていた。この中で Bentler (1986) は *Psychometrika* 誌での structural modeling に関する研究を psychometrics school の古典的な論文を振り返りながら、そして、LISREL や EQS そして COSAN などの解析に使用できるプログラムも紹介し、statistical school の業績についても議論していた。そして、RAM にも言及があった。そこで、この RAM のその後の展開についての情報を得るために、J.J. McArdle に関連資料の抜刷を請求した。驚いたことに、大量の論文と発表資料とからなる小包が私の office へ送られてきた。RAM だけではなく、潜在成長モデルに関するもの、そして、彼が第2著者であった Horn et al. (1983) の configural invariance の論文も梱包の中にあった。

RAM については、帰国後に、清水 (1989) で LISREL の構造モデルと測定モデルを一つの式で包括的にまとめることができることを紹介した。そして、キャリア発達のデータを対象として潜在成長モデルでの解析についても報告した (清水 (1999) など)。これらについては、これまでの報告を参考にしてもらうことにして、ここでは、本来のテーマである configural invariance に議論を戻すことにする。

この論文を初めて読んだ時に、configural という用語の出所が Thurstone (1947) であり、これまで psychometric school としての教育を受け、その立場から研究に従事してきた者としては、この訳語は「布置」として理解していたことを思い出した (たとえば、辻岡 (1975) や芝 (1967) など)。滞在していた時に参加した共同研究でも、この理解の下で statistical school の LISREL で分析をおこなった (Schulenberg, Shimizu, Vondracek, & Hostetler, 1988)。

Horn et al. (1983) では、psychometric school の先駆者である Thurstone が数多く引用されている。少し長くなるが、該当部分を引用してみることにする。たとえば183頁には、“Although Thurstone’s (1938, 1947) writings (like the scriptures) can be interpreted in somewhat different ways, it seems that our concept of configural invariance is consistent with the rationale that Thurstone developed for the concept of

simple structure.“、そして、”Configural invariance, Thurstone argued, … “is a far more important consideration in factor analysis than the invariance of the factor loadings … In groping for some concepts … in terms of which a domain may be understood … The numerical values should be regarded as being of three kinds, namely, those that are significantly positive, those that vanish or nearly vanish, and those that are significantly negative” (Thurstone, 1947, p. 365).” とある。ここで引用されている Thurstone は、集団を越えて因子的に不変な結果を得るための基準として単純構造を想定しており、configural invariance はこの古典的なアイデアにおいて使用された用語であった。ここでの “those that vanish or nearly vanish” は0.0に固定する変数のことであり、“significantly positive” あるいは “significantly negative” な変数は、1.0で固定するか、あるいは、自由推定することになる。そして、多次元の因子空間での変数の関係性について、configuration という表現が Thurstone の著作物に数多く使用されていることも付け加えておきたい。

RAM の考え方をまとめる際に、Horn, et al. (1983) を引用しながら「布置的不変性 (configural invariance)」と記述した (清水, 1989)。この訳語を与えた際には、実は、「配置的不変性」も候補としていた。因子パターン \mathbf{A}_l を設定する時には、観測変数を因子の中で有意に高いと想定できる要素を特定する。この作業は仮説を下にして、観測変数を該当する因子の列に配置する、とも表現できる。ここで気になったのは「配置する」の主語である。「研究者」とすることもできそうではあった。そして、その適切さを推定した結果の適合度から評価すると考えることもできそうではあった。しかしながら、psychometric school の一員としては、使い慣れていた「布置」に引かれた。そこで、主語を「布置する」で考えてみることにした。観測変数が多次元空間の中に「布置して」おり、これを回転で探索する方法を提案したのが Thurstone であった。彼は、いろいろなところで、セントロイド法で抽出した3次元の空間に変数を記入した図を描き、これを単純構造へと回転させることの重要性を強調している。回転前の多次元空間での布置は、その解析方法から得られた変数間の関係性であり、回転によって得られた新たな布置は、この関係性を別な軸間の相関で得られる関係性へと変換したに過ぎない。回転前でも後でも、この関係性は、研究者にとっては研究を開始する時点では「未知」で、言い換えればいわば「所与」と考えることができるのではないだろうか。夜空の星座を眺めながら、研究者が「配置」したものではないと考え、「布置」を使うとしたわけである。以上から、configural invariance の訳語は「布置不変性」とした。

4. 終わりに

心理学のデータ解析の方法論は、psychometric school から statistical school へとその担い手が変わってきた。新規の参入者にとっては、いずれの時代であっても、この分野の敷居は高い。前者で理解が難しかったのは、母平均や母分散や逆行列や固有分解などの推測統計や行列代数であったかもしれない。後者では、確率変数、確率分布、期待値と分散・共分散、最尤法などの数理統計学の概念と分析の方法と結果の解釈などではないだろうか。

ここでも、米国での経験から始める。LISREL を初めて使った際に、psychometric school の一員であった者として、いろいろと戸惑うことがあった。たとえば、研究の目的に合わせて式を展開し、これを解析するための適切な LISREL のスクリプトに置き換えるという作業である。この頃、新しい記述体系に遭遇したことに困惑しているというある種の表現であったかもしれないが、LISREL のマニュアルがギリシャ語で書かれているというアイロニカルな論調を目にしたこともあった。そして、母数の推定前に初期値の設定である。分散や共分散からどのような値が推定されるかを想定して初期値とする場面で、標準化した形式に慣れ親しんだ者として相関行列からの値を入れたところ、出力される内容に困惑することがあった。出力された数値から、モデル式と整合させたパス図を作成し、数値の結果に添える作業にも戸惑ったりもした。

1990年代に入ってから、このような敷居は低くなったようである。清水（1994）で部分的に紹介したように、グラフィカルなユーザーインターフェースにより、研究目的の図をPCのスクリーンで描ことができる。このようなソフトとしては、LISREL だけでなく、EQS、AMOS、Mplus などがあり、測定モデルや構造モデルの式を意識することなく、研究目的の全体像を画面上に描き、データから母数を推定することができるようになった。さらに、紙に出力することなく、スクリーン上で適合度を確認しながら、変数間の関係性を修正し、母数の推定を繰り返しておこなうこともできる。これらは有料のソフトであるが、同じような機能のソフトも、R の lavaan や sem のように、いくつか発表されている。このようなソフトは、数理統計学の高度で専門的な知識が十分になくとも、応用研究に利用することができる。

psychometric school は、構成概念の内部構造を探索する道具としてこの因子分析法を開発しただけではなく、因子分析から得られた結果から対象とした構成概念についてのモデルも構築してきた。言い換えれば、方法論と概念的議論とを融合させることに成功して

いたともいえよう。たとえば、Cattell (1966) は、探索的因子分析から見いだされて結果を踏まえて、観測変数と因子とについて5個のモデルを構成し、さらに、それらの間での重回帰分析を繰り返して得られた結果を踏まえて、高次レベルの因子間の関係に8個のモデルを提案している。探索的因子分析の時代のさまざまなアイデアや分析から、この包括的な reticular and strata models (網的・層的モデル群) を構想した Cattell の業績を、McArdle (1984) は尊敬とユーモアを込めて madness in Cattell's method と表現している。そして、彼による Reticula Action Model は、Cattell のこのような業績に因んで命名されたものであった (McArdle & McDonald, 1984; p.249)。

繰り返しになるが、構造方程式モデリングは測定モデルと構造モデルとからなる。因子分析は前者であり、上で言及した Cattell が構想したようなモデルは、後者でモデルを展開し、そのモデルの適合度を確認することができるのではないだろうか。このように、psychometric school と statistical school とは独立しているのではなく、構造方程式モデリングにおいて、心理学の構成概念についての「知恵」と数理統計学的「知恵」とが一体となったといえるのではないだろうか。

その一方で、学会誌での査読では、ここで紹介したような用語の使用で混乱がみられる。刊行されている雑誌に次のような論文が散見される。たとえば、サンプルサイズの報告がない、 χ^2 と自由度の掲載がない、適合度の判断で一つの指標だけしか報告していない、適合度指標の基準を満たしていない、推定値を標準化した値だけを掲載している、などである。これと関係するのかわからないが、因果的なモデルの結果の論文を投稿すると、批判的な査読コメントを受けることもあるようである。

本稿では、Google Scholar で検索した結果から分析をおこなった。議論した用語については、ある程度は初出文献を特定しながらではあったが、構造方程式モデリングが理論的研究から応用的研究へと普及していく過程を経年的には分析していない。そして、部分的にはあるが、一義的ではない用語がいまだにみられることも指摘した。今後においては、この分野のシソーラスが必要なかもしれない。

我が国の psychometric school も statistical school も、欧米の研究を紹介するだけに留まっているわけではなく、独自の取り組みもある。応用研究などの中で、日本文化の文脈に適切な用語があるかもしれない。用語に関しても、その表現についても独自であってもいいのかもしれない。ただし、ガラパゴス状態にならないように、細心の注意を払いながら欧米での研究の動向を確認することが必要なのではないだろうか。ここで検討してきた構造方程式モデリングとそのソフトは、高度に専門化した数理統計学の理論と技術に支え

られた効率的で総合的なデータ解析のシステムでもある。これを適切に活用するには、学会論文の査読や方法論の学部や大学院での教育において、さらなる充実が求められているのではないだろうか。

構造方程式モデリングの表記で混乱がある。その責任の一端を担う者として、本稿では、因子的不変性に平均構造を組み込むことで、「厳格な不変性」、「強不変性」そして「因子パターン不変性」と「布置不変性」とを分類した。前者の三つの不変性からは、集団間で潜在変数の得点（因子得点）の平均の違いを検査することができる。後者は、ある意味では集団間に不変な因子の構造があるのかを探る方法であり、この分析から得られる結果を踏まえて集団の違いについて議論へと進むことになる。あるいは、観測変数を見直し、次の調査へと進むことになるかもしれない。この拙論が、構造方程式モデリングの理論的研究と応用的研究の展開に少しでも貢献できれば幸いである。

引用文献

- Bollen, K.A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York, NY: Wiley.
- Cattell, R. B. (1966). The meaning and strategic use of factor analysis. In R. B. Cattell (Ed.), *Handbook of multivariate experimental psychology*. Chicago IL: Rand McNally.
- Cattell, R.B., & Tsujioka, B. (1964). The importance of factor-trueness and validity, versus homogeneity and orthogonality, in test scales. *Educational and Psychological Measurement*, 24, 3-30.
- Horn, J. L., McArdle, J. J., & Mason, R. (1983). When is invariance not invariant: A practical scientist's look at the ethereal concept of factor invariance. *The Southern Psychologist*, 1, 179-188.
- Hoyle, R. H. (2023). *Handbook of Structural Equation Modeling (2nd ed.)* New York, NY: Guilford.
- 市川雅教 (2010). 因子分析. 朝倉書店.
- Jamshidian, M., & Mata, M. (2007). Advances in analysis of mean and covariance structure when data are incomplete. S-Y., Lee (Ed.) In *Handbook of latent variable and related models* (pp.21-44). North-Holland.
- Jöreskog, K. G. (1967). Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 32, 443-482.
- Jöreskog, K.G. (1969). A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 34, 183-202.
- Jöreskog, K.G. (1971). Simultaneous factor analysis in several populations. *Psychometrika*, 36, 409-426.
- Jöreskog, K. G. (1988). Analysis of covariance structures. In J. R. Nesselroade and R. B. Cattell (Eds.), *Handbook of multivariate experimental psychology (2nd ed.)*, (pp. 207-230). New York: Plenum.
- Jöreskog, K.G., & Sörbom, D. (1989). *LISREL 7 : A guide to the program and applications (2nd ed.)*. Chicago, IL : SPSS Inc.
- 狩野裕 (2002a). 構造方程式モデリングは、因子分析、分散分析、パス解析のすべてにとって代わるのか？ *行動計量学*, 29(2), 138-159.
- 狩野裕. (2002b). 再討論：誤差共分散の利用と特殊因子の役割. *行動計量学*, 29(2), 182-197.
- Lawley, D. N. (1940). The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood.

- Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 50, 64-82.
- Lord, F. M., & Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- 真鍋一史・前田忠彦・清水香基 (2021). 国際比較 / 文化比較調査における測定の等価性 / 不変性の研究 : 多集団確証的因子分析 (MGCFA) を中心として. 関西学院大学社会学部紀要, 137, 1-28.
- 真鍋一史・前田忠彦・清水香基 (2022). 国際比較 / 文化比較調査における測定の比較可能性の確認のための統計的技法 - 多集団確証的因子分析と確証的最小空間分析 -. 関西学院大学社会学部紀要, 138, 1-36.
- McDonald, R. P. (1980). A simple comprehensive model for the analysis of covariance structures : Some remarks on applications. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 33, 161-183.
- McDonald, R. P. (1999). *Test theory : A unified approach*. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.
- McArdle, J. J. (1984). On the madness in his method : R. B. Cattell's contribution to structural equation modeling. *Multivariate Behavioral Research*, 19, 245-267
- McArdle, J.J., & McDonald, R. P. (1984). Some algebraic properties of the Reticular Action Model for moment structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 37, 234-251.
- McArdle, J.J., & Nesselrode, J.R. (2014). *Longitudinal data analysis using structural equation models*. Washington, D.C.: American Psychological Association.
- Meredith, W. (1993). Measurement invariance, factor analysis and factorial invariance. *Psychometrika*, 58, 525-543.
- Millsap, R.E. (2011). *Statistical approach to measurement invariance*. New York, NY: Routledge.
- Mulaik, S.A. (2010). *Foundations of factor analysis* (2nd ed.). CRC press.
- Muthén, B. (1984). A general structural equation model with dichotomous, ordered categorical, and continuous latent variable indicators. *Psychometrika*, 49, 115-132.
- 丘本正 (1986). 因子分析の基礎. 日科技連.
- Schulenberg, J. E., Shimizu, K., Vondracek, F. W., & Hostetler, M. (1988). Factor invariance of career indecision dimensions across junior high and high school males and females. *Journal of Vocational Behavior*, 33, 63-81.
- Schumacker, R.E. (1994). Editor's note. *Structural Equation Modeling : A Multidisciplinary Journal*, 1, 1.
- 芝祐順. (1967). 因子分析法の母近の動向 - とくに因子数の決定と軸の回転について. 教育心理学研究, 15(1), 52-58.
- 清水和秋 (1989). 検証的因子分析, LISREL そして RAM の概要. 関西大学社会学部紀要, 20(2), 61-86.
- 清水和秋 (1994). Jöreskog と Sörbom によるコンピュータ・プログラムと構造方程式モデル. 関西大学社会学部紀要, 25(3), 1-41.
- 清水和秋 (1999). キャリア発達の構造的解析モデルに関する比較研究. 進路指導研究, 19(2), 1-12.
- 清水和秋 (2003). 構造方程式モデリングによる平均構造の解析モデル. 関西大学社会学部紀要, 34(2), 83-108.
- 清水和秋 (2010). 項目因子分析で構成した尺度の因子パターン, 共通性, 信頼性そして因子的真実性. 関西大学心理学研究, 1, 9-24.
- 清水和秋 (2013). 構造方程式モデリング. 日本パーソナリティ心理学会 (企画) 二宮 克美・浮谷秀一・堀毛一也・安藤寿康・藤田圭一・塩谷真司・渡邊芳之 (編集) パーソナリティ心理学ハンドブック (Pp.669-675). 福村出版.
- 清水和秋 (2018). 因子分析の研究における misuse と artifact. 関西大学社会学部紀要, 49(2), 191-211.

- 清水和秋・三保紀裕・西川一二 (2021). 特性・状態の因子の平均を推定する区分モデル—複数観測の縦断データの方法論と応用から—. 関西大学社会学部紀要, 53(1), 69-140.
- 清水和秋・柴田由己 (2008). 大学生の Emotional Intelligence Scale (EQS) の構造とモデル化. 関西大学社会学部紀要, 39(2), 13-34.
- 清水和秋・山本理恵 (2008). 感情的表現項目による Big Five 測定 of 半年間隔での安定性と変動—個人間差、状態・特性不安、自尊感情との関連—. 関西大学社会学部紀要, 39(2), 35-67.
- 清水和秋・吉田昂平 (2008). Rosenberg 自尊感情尺度のモデル化—wording と項目配置の影響の検討—. 関西大学社会学部紀要, 39(2), 69-97.
- Sörbom, D. (1974). A general method for studying differences in factor means and factor structure between groups. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 27, 229-239.
- Sörbom, D. (1978). An alternative to the methodology for analysis covariance. *Psychometrika*, 43, 381-394.
- Thurstone, L.L. (1938). Primary mental abilities. *Psychometric Monographs*. Number 1. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Thurstone, L.L. (1947). *Multiple-factor analysis*. Chicago, IL: University of Chicago Press
- 辻岡美延 (1964). テスト尺度構成における新しい原理心理学評論, 8, 82-90.
- 辻岡美延 (1975). 問題と方法: 習性水準尺度を出発尺度とする検査尺度構成について—大規模項目の新しい項目分析法. 関西大学社会学部紀要, 6(1), 5-14.
- West, S.G., We, W., McNeish, D., & Savord, A. (2023). Model fit in structural equation modeling. In R.H. Hoyle (Ed.), *Handbook of structural equation modeling (2nd ed.)*, (pp. 184-205). New York, NY: Guilford.
- Yuan, K. H., & Bentler, P. M. (1997). Mean and covariance structure analysis: Theoretical and practical improvements. *Journal of the American statistical association*, 92 (438), 767-774.
- Yuan, K. H., & Bentler, P. M. (2000). Three likelihood-based methods for mean and covariance structure analysis with nonnormal missing data. *Sociological methodology*, 30(1), 165-200.

—2023.10.19受稿—