〔研究ノート〕

数学と意味の理論

(Mathematics and theory of meaning)

有 安 和 人

序

「意味の基本単位は文であり、文という脈絡においてのみ語は意味を持つ」という文脈原理(context principle)は、20 世紀の意味の理論に決定的な影響を与えた。この原理を最初に定式化したのはフレーゲであった(『算術の基礎』「緒論」、60、62、106 節)。

> 「文は意味の単位である」という標語は、当たり前であり、正しい。しかし、この標語を説明することに成功した哲学者は、フレーゲ以前には存在しない。このことは認められるべきである。アリストテレスからロックに至るまで、そしてその後も、個々の語に「観念」を表現する力が与えられ、語の複合体に複合「観念」を表現する力が与えられてきた。(Dummett：pp. 3 - 4)

フレーゲの革命は、ウィトゲンシュタインによって広められ、ウィトゲンシュタインの言語ゲーム論やクワインの全体論へと拡張されてゆく。

本稿の目的は、次のことを論ずることにある。16～19 世紀の代数学において、意味の理論転換が起こる。それは、観念や表象で意味を説明する意味の理論から文脈原理へ、さらには全体論への転換であった。

以下、16 ～ 19 世紀の数学者からオイラーとピーコックを取り上げ、

意味の理論転換について論ずる。

1．負数と虚数

16～19世紀の数学における意味の理論の転換を促したのは、負数と虚数である。なぜなら、負数と虚数の承認は、まさに意味の理論が問題になるからである。そこでまず、負数と虚数について簡単に説明しておきたい。

負数の最古の記録は、中国で紀元前 200 年頃、インドで7世紀頃に存在する（ボイヤーII：114-115, 143頁）。ヨーロッパの最古の記録は、15 世紀にある（ボイヤーIII：17-18 頁）。「＋・－」の記号は最初、倉庫の荷の過不足を示すために使われていたものが、演算の足し算・引き算に使われるようになった。しかし、ヨーロッパにおいて負数は、数としてはなかなか認められなかった。例えば 16 世紀のほとんどの人々は、方程式の解に負数を認めなかった（カッツ：402 頁）。

虚数概念は方程式の解法において生まれた（「虚数（imaginary number）」という用語はデカルトが導入する）。カルダーノは、3次方程式「$x^3 + px + q = 0$」の解を、

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

と定式化した。これを「$x^3 - 15x - 4 = 0$」に適用すると、「$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$」となり、虚数が現れる。しかし、カルダーノは虚数の問題を追求しなかった。

負数・虚数の数としての承認は、16～19世紀にわたって、ゆっくりと展開した。負数・虚数の数としての承認を妨げていたものは何か。それは意味の理論である。次のフレーゲの言葉は、問題の所在を言い当てている。

> 数というものは、自存的対象としても、外的なものに備わる性質としても表象しえない。なぜなら、それは感性的なものでなければ、

外的なものの性質でもないからである。(58 節：邦訳 118 頁 [1])

したがって、語の内容が表象不可能だということは、その語に一切の意味（Bedeutung）を否認したり、その語を使用から排除する理由とはならない。これとは反対のように見えるのは、恐らく、我々が語を孤立させて考察して、その意味を問うからであろう。そのときには、我々は表象を語の意味とみなすことになる。こうして、対応する内的な像が我々に欠けている語は、いかなる内容も持たないように思われる。しかし、常に、完全な命題を念頭に置かなければならない。その中でのみ、語は本来、意味を持つのである。…。全体としての命題が意義（Sinn）を持つならば、それで充分である。そのことによってまた命題の部分もその内容を得るのである。

以上の所見は、私の見るところ、無限小といった、いくつもの難しい概念を明らかにするのに適しており、そして、その射程は恐らく数学だけにとどまらないだろう。(60 節：邦訳 119-120 頁)

フレーゲのこの言葉からは、いくつかの洞察が得られる。第一に、表象に意味を求めるという意味の理論が、数学のいくつかの問題を引き起こしていた。第二に、文脈原理への転換がこれらの問題を解決する。第三に、文脈原理は数学以外の分野にも応用可能である。このようにフレーゲが考えていたということである。

文脈原理を最初に説明したのはフレーゲである。しかし、数学者が自覚していたか否かは別にして、16～19 世紀の代数学は文脈原理への転換と見ることができる。以下、オイラーとピーコックという二人の数学者を取り上げ、数学における意味の理論転換を考察してみたい。

2．オイラーとピーコック

オイラー（1707 ～ 1783）とピーコック（1791 ～ 1858）との間には、100 年近くの隔たりがある。オイラーは、負数も虚数も数として認めていた。ピーコックは、後の世代に属するにもかかわらず、それらを

数として認めなかった。

ピーコックは、代数を算術的（arithmetical）代数と記号的（symbolical）代数とに区別する。算術的代数は正の数と量を扱う（Ⅰ：p. 1）。したがって、「a－b」は、「a＜b」ならば算術的代数では不可能（解なし）となる（Ⅰ：p. 7）。記号的代数は正と負の両方の記号を扱い（記号であって、数ではない）、計算規則は算術的代数の規則が拡張されたものとされる。しかも、記号的代数の規則には、算術的代数の規則では不可能なものを含むとされる（Ⅱ：p. 7）。つまり、負数や虚数の計算は算術的代数では不可能であり、それを行うのが記号的代数である。

ピーコックが負数・虚数を数として認めなかった原因は、意味の理論にある。ピーコックの意味の理論は、まだ古典的なものであった。ピーコックは、語の意味を「表象」もしくは「観念」とみなしていた。ピーコックは、次のことを語っている。

> 量とその記号は、実在または可能的存在に対応することが示されうるとき、「実在する」または「可能である」といわれる。そうでなければ、「実在しない、不可能である、想像上（imaginary）のものである」といわれる。それゆえ、正の記号が実在量を表象するとき、その記号に負の記号をつけ、負となったその記号に解釈が与えられなければ、即ちその記号が充足すべき条件と整合する解釈が与えられなければ、負となった記号は不可能である、または想像上のものであるといわれる（Ⅱ：p.10）。

つまり、語にしかるべき表象が与えられなければ、その語を無意味とみなす。実際ピーコックは、負数と負数の掛け算が何を表象するかを、図形を用いて説明している（Ⅱ：pp.30-31）(2)。しかし、ピーコックは別の箇所で、「記号的代数の帰結は規約によってのみ存在する、といわれるかもしれない」（Ⅱ：p.449）と語っている。この場合の規約とは計算規則のことであるから、規約によって存在するというのは、数式という文において負数や虚数は存在するということである。つまり、文脈原理の手前まで来ているといえる。

以上のように、ピーコックにおいて負数・虚数の数としての承認を妨げていたものは、意味の理論であった。語の意味を表象に求める限り、負数も虚数も数として承認されない（可能的存在にとどまる）。

このことは、オイラーと対照してみるとよくわかる。オイラーは、数の前に「＋」の記号があれば正数、「－」の記号があれば負数であるというだけである。そして、最も大切なことは、「負数について正確な観念を形成することである」という（p. 5）。この時、正確な観念とは、計算規則によって正確に定義されることを意味する。オイラーにとっては、数として必要なことは通常の代数規則（加減乗除の計算規則）が成り立ち、矛盾が生じないことだけであった（ヴェイユ：203頁）。オイラーは次のことを語っている。

> 虚数は、その本性からして不可能であり、それゆえ想像上の量と呼ばれる。なぜなら、それらは単に想像の中に存在するだけであるからである。…。しかし、それにもかかわらず、それらの数は心に存在する。それらは、我々の想像の中に存在する。我々は、それらについて十分な観念を持っている。というのも$\sqrt{-4}$は、$\sqrt{-4}$を乗じればー４になる数であると知っているからである。(p.43)

文脈原理を用いて説明すれば、次のようになる。「$\sqrt{-4}\times\sqrt{-4}=-4$」という文（数式）のように、虚数を用いた文は真偽が確定し、有意味である。したがって、その文の部分である虚数は数としての意味を持つ。ただ、「数は心に存在する」という表現や「観念」という語の使用から、心理主義的な意味の理論がオイラーには残存している。後にフレーゲが心理主義的な意味の理論を攻撃し、意味の客観性を主張するために文脈原理に訴えたのは、16～19世紀の数学史の延長線上にあるといえる。

オイラーは、虚数の解釈や表象について語ることはしない(3)。計算規則について語るのみである。そして、矛盾が生じないことについては、自分の膨大な経験とすべての数学者の経験とによって十分とした（ヴェイユ：204頁）。

実際オイラーは、今日オイラーの公式と呼ばれる次の式で、三角関

数と虚数との関係を明らかにした(4)。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

さらに、xにπを代入すれば、オイラーの等式として、次の美しい式が得られる(5)。

$$e^{i\pi} = -1$$

オイラーの公式は、e^xと$\cos x$と$\sin x$のべき級数展開(テイラー展開)を用いて証明される(示野:188-189 頁)。べき級数展開は、グレゴリー(1638-1675)やニュートン(1642-1727)によって発見された。したがって、オイラーの公式によって、虚数は微積分理論体系の網の目に組み込まれることになる。

虚数導入によって矛盾が生じないことを確認するとは、虚数が数学言語の中に位置づけられることを意味する。そして、矛盾が生じないことで虚数を「数」として承認するとは、数学言語の中に位置づけられることによって、虚数に「数」としての意味を認めることを意味する。つまり、「語や文の意味は言語全体の中で問われるべきである」という全体論(holism)の立場に立つことである。

以上のように、負数と虚数を数として承認する歴史とは、観念や表象という意味の理論から、文脈原理へ、さらには全体論への転換であった。

後にヒルベルトは、無矛盾性の証明は存在の証明となると主張した(6)。このヒルベルトの主張も、16〜19世紀に転換した新しい意味の理論の延長線上にある。というのも、公理の無矛盾性が証明されることで公理が真であると認めるとは、理論体系内に公理が位置付けられることよって公理が真であると認めることであり、理論体系の中で公理の意味が確定されるということである(7)。

3.まとめ

ピーコックはオイラーの後の世代に属し、オイラーの数学的業績を知っている。例えばピーコックは、オイラーの公式を知っている(II:p.287)。しかし、負数も虚数も数としては認めなかった。

ピーコックにおいて、負数・虚数の数としての承認を妨げていたものは何か。それは旧世代の意味の理論であった。オイラーにおいて、数としての承認を可能にしたものは何か。それは新世代の意味の理論であった。つまり、16～18世紀の代数学の歴史とは、表象や観念に意味を求める意味の理論から、文脈原理と全体論という新しい意味の理論への転換であったといえる。

註

(1) 訳は以下すべて『フレーゲ著作集2』による。
(2) 虚数の解釈も与えようと試みている(II:pp.140-143)。
(3) 負数については、解釈を与えているといえるかもしれない。「正数は財産を表象するから、負数は負債とみなされる。よって、負数は0より小さいということができる」(pp.4-5) しかし、続けて、財産・負債と同様に、「正数は0から大きいことは明らかに正しいから、負数は0より小さい」と述べている (p.5)。したがって、「負債」は解釈というより、「0より小さい数」として負数を説明するためのものとみなしうる。
(4) eはネイピアの数、自然対数の底であり、次の数を指示する。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(5) オイラーの公式・等式に関しては示野 (170-171頁) を参照。
(6)「公理の無矛盾性を証明することは、即ち実数全体の集まりの存在の証明となる」(ヒルベルト:191頁)
(7) フレーゲは、このような全体論的立場には反対であった (実際ヒルベルトとの論争があった (1899年12月27日書簡))。フレーゲは、全体論的な手法で数を導入する数学者を批判している。「分数、負数、複素数の形式理論はこの誤りに陥っている。人々は、周知の計算規則が新たに導入すべき数に対して可能な限り保存されなければならないと要請し、そしてそうした規則から新しい数の一般的な性質や関係を導出する。どこでも矛盾に突き当たらなければ、新しい数の導入は正当化されたとみなす。」(96節:邦訳160頁) しかし、カルナップはヒルベルトの立場を支持する。「これまで言語の構築においては次の手続きが通常なされてきた。まず基礎的な数学的・論理的記号の意味を与え、次にその意味に合致してどの文と推論が論理的に正しいかを考察する。意味の付与は言葉で表現されるから、結果として意味は不正確になり、このやり方で到達される結論は不正確で曖昧なものにしかなりえな

い。…。しかし反対に、要請も推論規則もすべて任意に選ぶとする。すると、要請と規則がどんなものであっても、基本的な論理的記号にどんな意味が付与されるべきかが決定される。…。言語は、その数学的形式において、何らかの観点に合致して構築されるから、正当化の問題は生じず、観点の選択による統語法の帰結という問題と無矛盾の問題とが生じるだけである。」(p. x v) フレーゲとカルナップの引用からいえることは、「当時の数学者の多くは、全体論という意味の理論において数学を考えていた」ということである。

文献

ヴェイユ (1987)『数論　歴史からのアプローチ』足立恒雄・三宅克哉訳、日本評論社

カッツ (2005)『数学の歴史』上野建爾・三浦伸夫監訳、共立出版

示野信一 (2012)『複素数とはなにか』ブルーバックス

ヒルベルト (2005)『幾何学基礎論』中村幸四郎訳、ちくま学芸文庫

フレーゲ (2001)『フレーゲ著作集２　算術の基礎』野本和幸・土屋俊編、勁草書房
(tr. J.L.Austin, *The Foundations of Arithmetic*, Oxford (Basil Blackwell, 1959[2]))

ボイヤー (1983-4)『数学の歴史　1 - 5』加賀美鐵雄・浦野由有訳、朝倉書店

Carnap R. (1937) *The Logocal Syntax of Language*, tr.A.Smeaton, London (Routlege)

Dummett,M., (1981[2]) *Frege: Philosophy of Language*, Cambridge, Massachusetts (Harvard U.P.)

Euler,Leonhard (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra /Elements of Algebra*, tr. J.Hewlett, New York (Springer-Verlag, 1984)

Peacock G. (1840-1845) *A Treatise on Algebra 2 vols.* (Reprinted from the 1842-1845 edition, New York (Scripta Mathematica, 1940))