

血流の数学モデル入門

大場謙吉*

Introduction to Mathematical Modeling of Blood Flow

Kenkichi OHBA

1. はじめに

生物の力学的現象を取り扱うバイオメカニクス (Biomechanics) においては他の力学と同様に実現象をモデル化し、数式で表現する必要がある。本稿では血管内の血液の流れを如何にモデル化するか、如何に数式化するかについて初歩的、入門的解説を行う。血管内の血流を取り扱う場合に基本的な重要性を持つ弾性血管壁と拍動血流の相互作用、あるいは血管と血液の連成運動および拍動に伴う血流の振動運動に重点を置いて述べる。

2. 動脈中の脈波の伝播^{1-4,8)}

心臓の拍動によって動脈内を脈波が伝播して行く。この現象を、動脈血管を模擬した薄肉弾性管内を小振幅の圧力波が伝播する1次元線形波動理論によって取り扱う。

断面積が時間的、空間的に変化する管内の1次元流れに関する連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \quad (1)$$

オイラーの運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

となる。ここに、 A , ρ , p , u は各々、管の断面積、流体の密度、圧力、速度である。

流体の圧縮性を考慮すると、

$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho}{K} \quad (3)$$

が成り立つ。ここに、 K は流体の体積弾性率である。弾性管は管の内外圧力差により膨らんだり、縮んだりするので、これを A と p の関係として表すと、

$$\frac{dA}{d\rho} = C \quad (4)$$

となる。ここに、 C は弾性管の単位長さ当たりのコンプライアンスである。式(3)は流体の密度が圧力のみで決まり、式(4)は管の断面積が圧力のみで決まることを示す。したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = C \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

式(5)、(6)を式(1)に代入すると、次式が得られる。

$$\rho \left(C + \frac{A}{K} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \quad (7)$$

ここで、小振幅波動を仮定し、以下のように置く。

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A'(x, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho'(x, t), \\ p &= p_0 + p'(x, t), \\ u &= u'(x, t) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $A' \ll A_0$, $\rho' \ll \rho_0$ であるが、 p' は必ずしも微小ではない。簡単のため、管内の静止流体中を波が伝播する場合を取り扱う。管内に一定流速 $u_0 (\gg u')$ がある場合への拡張は容易であるが、本稿では割愛する。

式(8)を式(7), (2)に代入し, 2次の微小項を無視すると, 未知数 p', u' に関する以下の線形連立偏微分方程式が得られる。

$$\left(C + \frac{A_0}{K}\right) \frac{\partial p'}{\partial t} + A_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

上式から u' を消去するために, 式(9)を t で偏微分し, 式(10)を x で偏微分して A_0 を乗じたものを辺々引くと, 次式を得る。

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(\frac{\rho_0 C}{A_0} + \frac{\rho_0}{K}\right)} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (11)$$

式(11)は p' に関する1次元波動方程式であり, 伝播速度 a は

$$a^2 = \frac{1}{\left(\frac{\rho_0 C}{A_0} + \frac{\rho_0}{K}\right)} \quad (12)$$

となる。式(12)が流体で満たされた弾性管内を伝播する波の速度である。 u' に関しても式(11)とまったく同じ式が成り立つ。

流体が非圧縮性の場合, 体積弾性率 $K \rightarrow \infty$ であるので, 伝播速度 a は次式のようになる。

$$a^2 = \frac{A_0}{\rho_0 C} \quad (13)$$

ここで, 弾性管の単位長さ当たりのコンプライアンス C を求める。薄肉弾性円管の管材料のヤング率 (縦弾性係数) を E , 内径を D , 肉厚を h , 管の外圧を p_e とする。図1に示す管内外圧力差と円周方向応力 σ との釣り合いから

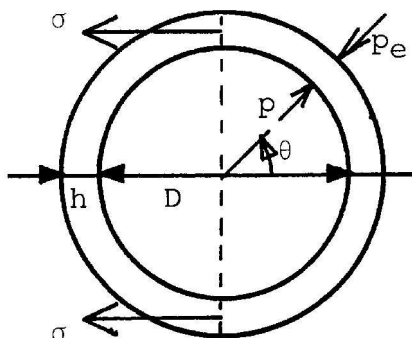


図1 薄肉弾性円管における力の釣り合い

$$2\sigma h = 2 \int_0^{\pi/2} (p - p_e) \frac{D}{2} \cos\theta d\theta \quad (14)$$

が得られ, これよりラプラス (Laplace) の式

$$(p - p_e)D = 2\sigma h \quad (15)$$

が得られる。いま, 圧力が dp だけ変化し, そのために管径が dD , 円周方向応力が $d\sigma$ だけ変化したとすると,

$$(p + dp - p_e)(D + dD) = 2(\sigma + d\sigma)h \quad (16)$$

式(15)と式(16)の差を取り, $dD \ll D$ を考慮して, 微小項を無視すると, 次式を得る。

$$Ddp = 2hd\sigma \quad (17)$$

応力変化 $d\sigma$ と円周方向歪み dD/D の間にはフック (Hooke) の法則

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} \quad (18)$$

が成り立つので, 管断面積 A と管径 D の変化率の関係

$$\frac{dA}{A} = 2 \frac{dD}{D} \quad (19)$$

と共に式(17)に代入すると, 次式が導かれる。

$$\frac{dA}{dp} = \frac{DA}{Eh} \quad (20)$$

よって, 式(4)より

$$C = \frac{DA}{Eh} \quad (21)$$

よって, 式(13), (21)より

$$a^2 = \frac{Eh}{\rho_0 D} \quad (22)$$

式(22)はメンズ・コルトベグ (Moens-Korteweg) の式と呼ばれる。

剛管の場合, $C = 0$ であるから, 式(12)より

$$a^2 = \frac{K}{\rho_0} \quad (23)$$

となる。式(23)は流体中の音速を表す。

水中の音速は約 1,500 m/s であるのに対し, 動脈を模擬出来る通常の弾性ゴム管内のメンズ・コルトベグ速度 (式(22)) は高々 10 m/s 以下であるので, 式(12)の右辺分母の第2項は無視できて, 式(22)が動

脈内の脈波の伝播速度の近似式として用いられる。

3. Windkessel モデル⁵⁾

血液が左心室から大動脈弁を通過して大動脈へ流入する場合や右心室から肺動脈弁を通過して肺動脈へ流入する場合、心室の血圧は収縮期に最高になり、弛緩期に零になるが、大動脈や肺動脈の血圧は心室の弛緩期にも零にならず、例えば大動脈の場合は最低血圧(通常、60 mmHg 程度)と最高血圧(通常、120 mmHg 程度)の間で左心室の拍動に伴って上下する。これは弾性血管としての大動脈が血圧の上下に伴って膨張・収縮することによって内腔体積が増減し、管内に血液を蓄えたり、絞り出したりすることによって起こる。この現象をモデル化して、実際に測定された血圧波形を説明しようとしたものがウインドケッセル (Windkessel, 空気槽) モデルである。図2にモデル図を示す。動脈系を、コンプライアンス C' のみを持つ弾性血管の先に流動抵抗 R のみを持つ末梢血管がつながった配管系によって表現している。

弾性血管における連続の式は

$$\frac{dV}{dt} = Q - Q_{cv} \quad (24)$$

ここに、 V は弾性血管の体積、 Q 、 Q_{cv} は各々、心臓から弾性血管への流入体積流量、弾性血管から末梢血管への流出体積流量である。

末梢血管においてポアゼイユ (Poiseuille) の式が成り立つとすると、

$$Q_{cv} = \frac{1}{R} (p_a - p_{cv}) \quad (25)$$

ここに、 p_a は弾性血管内の圧力、すなわち末梢血管入口の圧力であり、 p_{cv} は末梢血管出口の圧力である。

V と p_a の間にはコンプライアンス C' を介して

$$\frac{dV}{dp} = C' \quad (26)$$

が成り立つので、

$$\frac{dV}{dt} = C' \frac{dp_a}{dt} \quad (27)$$

式(24)、(25)、(27)より次式が得られる。

$$C' \frac{dp_a}{dt} + \frac{1}{R} (p_a - p_{cv}) = Q \quad (28)$$

式(28)が心臓からの拍出流量 Q と大動脈血圧 p_a の関係を与える微分方程式である。末梢血管出口の血圧 p_{cv} は一定と考えてよいので、

$$p = p_a - p_{cv} \quad (29)$$

と置くと、式(28)は

$$\frac{dp}{dt} + \frac{1}{C'R} p = \frac{1}{C'} Q \quad (30)$$

となる。式(30)の一般解は、初期条件として時刻 $t = 0$ で $p = p_0$ とすると、次式のようになる。

$$p = \frac{1}{C'} \exp\left[-\frac{t}{C'R}\right] \int_0^t Q \exp\left[\frac{t}{C'R}\right] dt + p_0 \exp\left[-\frac{t}{C'R}\right] \quad (31)$$

拍出流量波形 $Q(t)$ が与えられれば、式(31)より大動脈の血圧波形 $p(t)$ を求めることが出来る。

4. 動脈内拍動血流の速度場^{6,7)}

動脈内拍動血流の最も簡単なモデルは、流体で満たされたまっすぐな剛円管の両端に正弦波状の圧力差を与えた場合に発生する流体の周期的な振動運動である。これを「振動流」と呼ぶことにする。振動流においては管断面内の流速分布は定常流とは全く異なった特徴的な様相を呈する。この特徴的な様相は、振動流に一方流速を重ね合わせた「拍動流」でも全く同様である。ここでは、ウーマスリー (Womersley) の理論⁶⁾を紹介する⁷⁾。

円管の軸方向に x 軸、半径方向に r 軸を取り、流

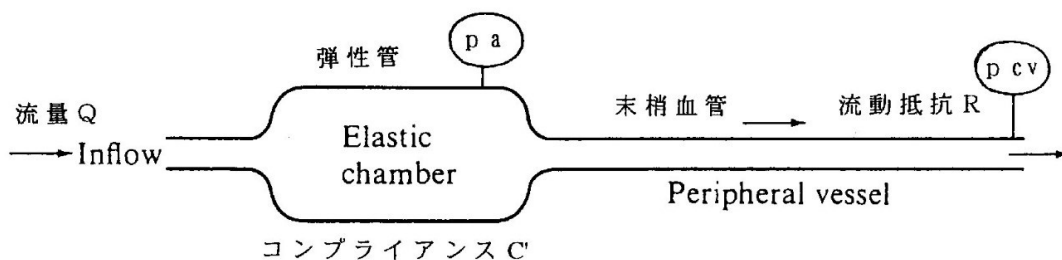


図2 動脈のウインドケッセルモデル

れは軸対称であるとする。また流速の x, r 成分を各々 u, v で表わす。流れが十分に発達している, すなわち管軸方向に流れの変化が無いと仮定すると, $v = 0$, かつ u は x の関数ではなく, r と t だけの関数となる。したがって, x 方向と r 方向のナビエ・ストークス (Navier-Stokes) の方程式は各々,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (32)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (33)$$

となる。ここに, v は流体の動粘性係数である。式(33)より p は r の関数ではなく, x と t の関数であることが分かる。さらに, 式(32)において u の項を左辺に集め, p の項を右辺に置くと, 左辺は r と t だけの関数, 右辺は x と t だけの関数となり, 式(32)が至る所で成立するためには右辺, 左辺とも t だけの関数でなければならない。すなわち, $\partial p / \partial x$ は t だけの関数であり, 心臓の拍動の周期 T を周期とする周期関数であるから, 次式のようにフーリエ級数に展開することができる。

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (34)$$

ここに, A_0, A_n, B_n は定数である。 A_0 が定常流に, 第2項が振動流に対応している。

式(32)は線形微分方程式であるから, その解は式(34)の各項に対する解の和として与えられる。そこでまず,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \quad (35)$$

に対する流体の運動を考える。計算を簡単にするために複素数を用いて

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A \exp[i\omega t] \quad (36)$$

と置けば, 式(32)は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{A}{\rho} \exp[i\omega t] \quad (37)$$

となる。これを解くために

$$u = U(r) \exp[i\omega t] \quad (38)$$

と置いて, 式(37)に代入すると

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{i\omega}{v} U = -\frac{A}{\mu} \quad (39)$$

を得る。ここに, $\mu (= \rho v)$ は流体の粘性係数である。

いま円管の内半径を R として

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{v}} \quad (40)$$

$$y = \frac{r}{R} \quad (41)$$

と置けば, 式(39)は次式のように書き直される。

$$\frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dU}{dy} + i^3 \alpha^2 U = -\frac{AR^2}{\mu} \quad (42)$$

α は「ウーマスリー数」と呼ばれる無次元数である。

ここで, 変数変換

$$y' = i^{\frac{3}{2}} \alpha y \quad (43)$$

を行おうと, 式(42)は

$$\frac{d^2 U}{dy'^2} + \frac{1}{y'} \frac{dU}{dy'} + U = -\frac{AR^2}{i^3 \alpha^2 \mu} \quad (44)$$

となる。ここで, 式(44)の右辺を零とした方程式

$$\frac{d^2 U}{dy'^2} + \frac{1}{y'} \frac{dU}{dy'} + U = 0 \quad (45)$$

は0次のベッセル微分方程式であり, その独立な解としてベッセル関数 $J_0(y')$ とノイマン関数 $N_0(y')$ があるが, $N_0(y')$ は $y' = 0$ すなわち管軸上で $-\infty$ となるので, 不適である。よって式(45)の一般解は $c_0 J_0(y')$ となる。一方, 式(44)の特解は $-AR^2 / i^3 \alpha^2 \mu$ である。したがって, 式(44)の一般解は次式となる。

$$U = -\frac{AR^2}{i^3 \alpha^2 \mu} + c_0 J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha y \right) \quad (46)$$

境界条件, $r = R$ すなわち $y = 1$ のとき, $U = 0$ より定数 c_0 を定めると

$$U = -\frac{AR^2}{i^3 \alpha^2 \mu} \left[1 - \frac{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)}{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \right] \quad (47)$$

したがって,

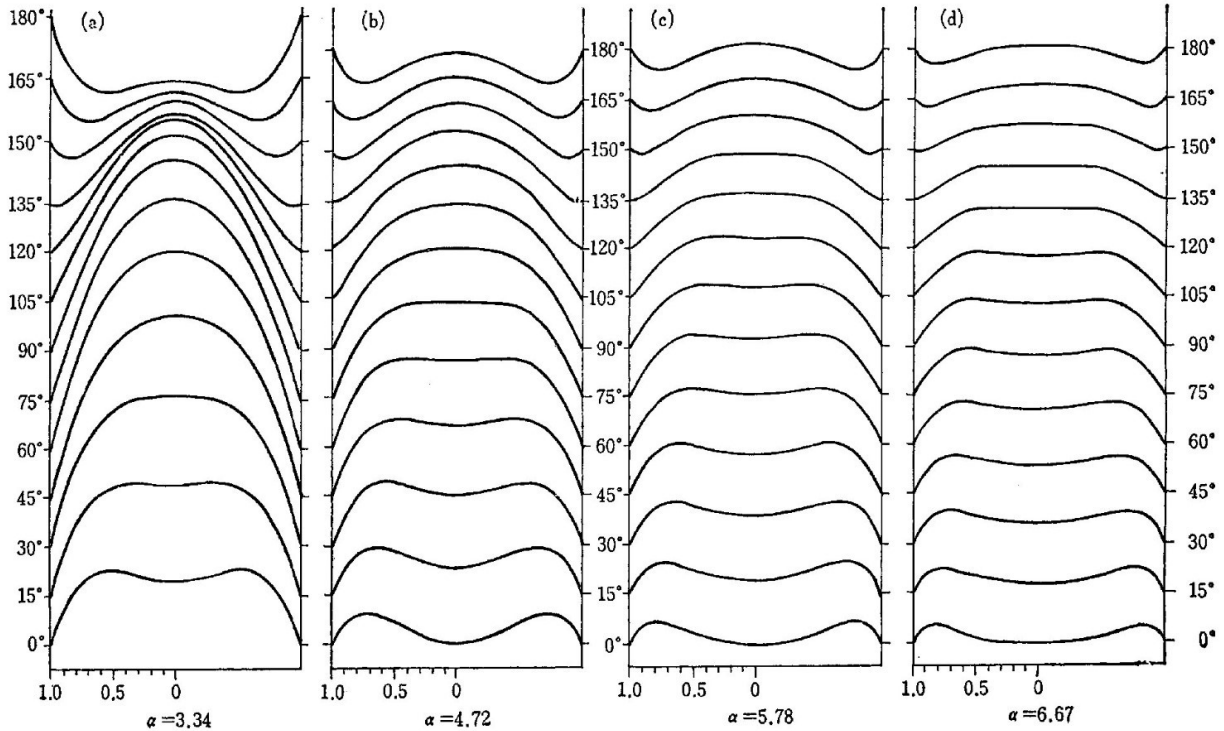


図3 剛円管内の振動流における管断面内瞬時流速分布⁶⁾

$$u(r, t) = -\frac{AR^2}{i^3\alpha^2\mu} \left[1 - \frac{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)} \right] \exp[i\omega t] \quad (48)$$

ここに、 A は式(36)で定義される定数である。式(48)が振動流における時々刻々の管断面内流速分布を与える理論解である。数値計算の手順は省略するが、図3に計算結果の例を示す。図より、管中央部と壁近傍とはまったく異なる運動をしていること、ウーマスリー数 α が大きくなるにつれて壁領域が狭まり、管中央部の速度分布が平坦になることが分かる。

5. おわりに

血流に限らず、生物がからむ現象は一般にきわめて複雑であるが、どんなに複雑に見える現象でもその現象の本質は何か？、現象を支配する原理は何か？を問うて、単純化、モデル化を行ない、考えを進め、試行錯誤を重ねれば、近似解が何とか得られるはずである。このような合理的な手順によって得られた理論式の妥当性は、それが実現象をどの程度説明できるかによって検証される。本稿で取り上げた例はいずれも古くか

ら研究されて来たものであるが、モデル化、数式化によって現象を如何に把握出来るようになるかを示す好例であると考えらる。

参考文献

- 1) T. Young: Trans. Roy. Soc. London 98, p. 164, (1808)
- 2) W. Weber: Ber. Verhandl. Koenigl. Saechs. Ges. Wiss. 18, p. 353, (1866)
- 3) A. I. Moens: Die Pulskurve (ed. E. J. Brill), Leiden, (1878)
- 4) D. S. Korteweg: Ann. d. Phys. u. Chem. 5, p. 525, (1878)
- 5) O. Frank: Z. Biol. 37, p. 483, (1899)
- 6) J. R. Womersley: Phil. Mag. 46, p. 199, (1955)
- 7) 岡小天: レオロジー (生物レオロジー), 裳華房, [第9章 拍動流], (1974)
- 8) 大場謙吉・他4名: 日本機械学会論文集, 64-627, p. 3729, (1998)