

ICT 活用による文理融合型のクリティカルシンキング力を涵養する
カリキュラムの試行
Curriculum Development to Enhance Future Skills in the Global
Liberal Arts Education

山本 敏幸 (関西大学教育推進部)

濱本 久二雄 (関西大学教育開発支援センター)

Toshiyuki Yamamoto (Kansai University, Division for Promotion of Educational
Development)

Kunio Hamamoto (Kansai University, Center for Teaching & Learning)

要旨

本稿では、共通教養科目群に属す、「文理融合の数学をシンキングツールとして活用するクリティカルシンキング」のカリキュラム開発について述べる。CTL ではこれまでに小中高校生を対象とした「交渉学 x STEAM」教育の展開をおこなってきたが、大学生にとっての「交渉学 x STEAM」での学びについて考える機会があまりなかった。ここでは、その基礎となるクリティカルシンキングスキルを涵養するカリキュラムをデザインした。2020 年度 11 月から 2021 年度 1 月にかけて、本学のラーニングアシスタントや今回の企画に興味を示した学生有志を対象に 5 回シリーズで模擬講習をおこなった。今回のクリティカルシンキングのテーマは、現代社会の重要な問題であるコロナ禍の社会についてであった。高校までに学んだ基礎数学のスキル・Python による数値計算・シミュレーションによる可視化をシンキングツールとして、クリティカルシンキングの PBL による学習活動をおこなった報告をする。

キーワード ICT 活用、クリティカルシンキング、文理融合の数学、シミュレーションモデル /
ICT-Enhanced Learning, Critical Thinking Skill, Mathematical Simulation Model, SIR
Model

1. 経緯と趣旨

クリティカルシンキングの授業では、受講生に社会の様々な営みや現象について目を向け、課題点を定義し、解決策を共に未来社会に向けて考えることをテーマにしている。アクティブラーニングによる PBL 形式で授業展開をおこなっている。PBL チームで状況を把握し、重要な情報を漏らさないために、ビジュアル・オーガナイザー (シンキングツール) を活用し、状況情報を可視化する習慣づけをおこなっている。確かに、こうしたクリティカルシンキングの取り組みは受講生達にチーム学習

で社会の様々な局面に興味を持たせ、深掘りし、問題点を定義し、解決策を提案する学習プロセスの機会と学習の経験を提供してきている。社会の様々な問題点の解決策を創出するために、クリティカルシンキングで問題解決をすることには意義があるように思う。

今回の検証では、クリティカルシンキングのテーマとして、現代社会の重大な問題である「コロナ禍」を総合的な主題と位置づけた。ミッションは未来の自分の問題、自分の住む未来社会について考えることとした。言い換えると、理性的に自分の未来、自分たちが実際

に生きることになる未来社会について未来志向のPBLを実践することである。クリティカルシンキングを実践するにあたり、高校までに学習する数学(文理融合の基礎数学)及び、社会人基礎力を活用して、社会の様々な問題解決に使うことを目標とした。クリティカルシンキングで学びを深め、ものごとの本質を見極め、未来社会に向けてどう対処すべきかを考えた。未来の自分が過去の意思決定や判断で後悔しないような未来社会を生きることが重要なポイントである。こういった学びの姿勢は、生涯学習の態度やマインドセットの修得に繋がると確信している。この試案の実践として、2020年度の秋学期に5回シリーズでおこなった検証の報告をおこなう。

2. クリティカルシンキングのプロセス

チームベースで学ぶクリティカルシンキングでは、概ね、4つのフェーズからなる学習をおこなってきた。

ステップⅠ テーマ領域の合意

先ず、同じテーマ領域に興味を示す学生たちが集まり、チームを構成する。共感からのエンパシービルディングのワークを通して信頼関係で結ばれ、プロジェクトを最後までやり抜くためのチームビルディングをおこなう。各自のテーマ領域についての思いや意見を、忌憚なく交わし、徹底的に話し合い、漠然としているテーマ領域について、チームとして取り扱うクリティカルシンキングのテーマ領域を絞り込んでいく。つまり、チームで最後までいっしょに取り組んでいけるテーマを合意形成する。こうすることで、最後までやり抜く「GRIT」と学習動機を高め、維持することができる。

ステップⅡ 論理的思考

クリティカルシンキングのテーマの学習が、ただのディスカッションによる既知情報の共有で終わらないように、テーマについての情

報、アイデア、課題、チームでのプロジェクト成果、クリティカルシンキングの学びのプロセス等について分析する能力を涵養しなくてはならない。つまり、クリティカルシンキングをおこなうための事前準備のステップである。付箋紙を使ってのブレインストーミングやマインドマップを使っての情報の整理、分類、関連性の可視化、関連項目間の比較対象、当該のテーマに直接関連する情報・関連しない情報の差別化、テーマ領域内のコンテキスト(歴史・社会・経済・環境面からの価値観、文化的背景、政治的根拠)についての評価・考察、チームメンバーの個人的なバイアス、価値観、経験値の確認、上記項目の相互間の関連性等を可視化し共有し、チームメンバー全員が同じページでクリティカルシンキングをおこなうことができる足場づくりの段階である。

ステップⅢ 調査・研究

ステップⅡの成果を基にして、サイエンスをおこなっていく。先ずは、クリティカルシンキングの出発点となるリサーチクエスションの策定である。最後まで、目標を失ったり、目標から逸脱したりしないようにきちんとクリティカルシンキングの目標を掲げるのである。ステップⅡの成果を基にして、PMI分析により現状把握を可視化し、さらに、SWOT分析をおこない、演繹・帰納思考を繰り返しながら、未来予測・推論・仮説設定・リサーチクエスションを反映した最適な解決策に導いていく。

ステップⅣ フレームワーク(調査の様式)

ステップⅢの段階では、まだ机上の空論になりかねないため、ステップⅢの成果を様々な視点から比較・吟味・評価し、必須項目間の相関関係を検証し、未来に向けての問題解決、具体的に実行可能なデザインプラン実装プランを考えていかねばならない。つまり、具体的な行動目標を立てて、最適解の実装と検証予測をおこなっていかねばならない。未来

社会にむけての実装検証がステップIVとなる。

例えば、「交渉学のためのクリティカルシンキング」の授業では、ステップIVとして、ロールプレイ・シミュレーションを取り入れ、受講生がチームでおこなったクリティカルシンキングのステップIIIまでの検証と改善をおこなっている。つまり、1回目のロールプレイ・シミュレーションでの不具合を修正して、2回目のロールプレイ・シミュレーションをおこない、最終成果物の精度をあげている。

現代社会の様々な領域をクリティカルシンキングするには、デザインシンキングの開発モデル用のツールである、課題解決のためのシンキングツール「Opportunity Canvas (図1)」を利用してきた。これにより、誰が誰に対してどのような利害関係をもたらすのかを明確にすることができる。学びの可視化による明確化と共有が可能になった。

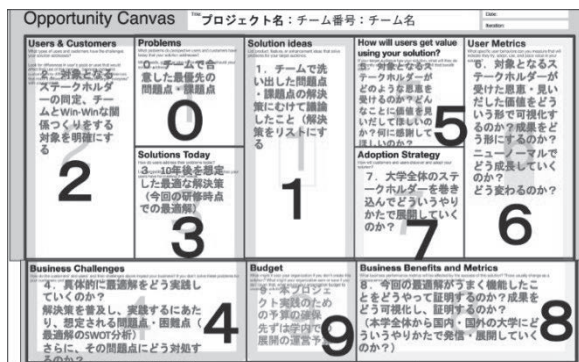
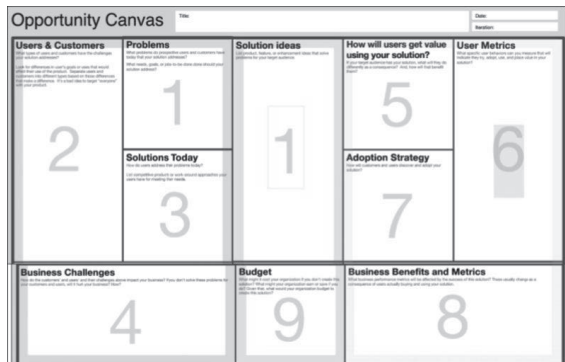


図1 「Opportunity Canvas」を活用したフレームワーク

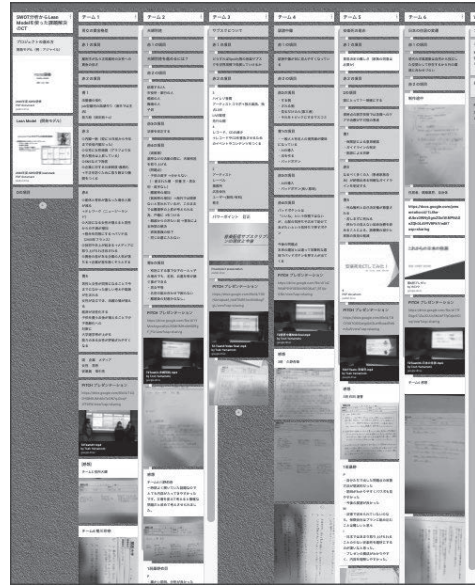


図2 学びの可視化と共有

ステップIVのOpportunity Canvasの活用については、本号の別稿で、詳しく取り上げているので参照していただきたい。ここでは、主にステップIVでの高校までに学習する数学(文理融合の基礎数学)を社会人基礎力とした数理モデルのシミュレーションをシンキングツールとして活用した検証事例について報告する。コロナ禍の現代社会をクリティカルシンキングする際に、ステップIVにおいて、数理モデルのシミュレーションを導入することは意義のあることのように思える。

3. 数理モデルを用いたクリティカルシンキングの試行

これまでのクリティカルシンキングの授業でのシンキングツールの活用は、上記ステップIIとステップIIIの学習段階において、主に調査により収集した情報データの整理整頓と可視化に限られていた。ステップIIIで、最適な解決案を提案するぐらいが限度であった。そこで、その部分を補完するために、シミュレーションモデルの導入を考えた。ICT技術の進歩により、複雑な数値計算による可視化が可能となったのである。

今回の試行では、LAの有志10名が、CTL研究員の濱本を講師として、11月より毎週金曜日に5回連続してセミナーを開催した。今日現在の社会で一番の課題となるコロナ禍をクリティカルシンキングの実践をすることをテーマと決めた。

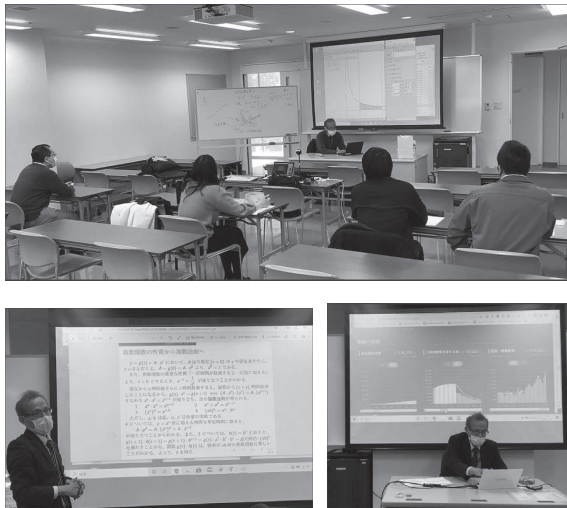


図3 研修の様子

刻々と変化する日本におけるコロナ感染者の情報は、厚生労働省が発信する感染者の情報（新型コロナウイルス感染症について＞国内の発生状況について <https://www.mhlw.go.jp/stf/covid19/kokunainohasseijoukyou.html>）を信憑性のある情報源として利用することにした。そのうえで、高校までに学んだ数学を基に感染モデル（SIRモデル）をシミュレーションモデルとして、クリティカルシンキングの学習プロセスに援用した。感染モデルでは、数値計算が膨大になるため、計算時間の簡略化及び計算結果の可視化のためにシミュレーションの実行環境はgnuplotとGoogle Colaboratoryで構築した。

以下に、「感染症の数理モデル（SIRモデル）を理解するために」というテーマで行った勉強会の内容について詳述する。

2020年から現在まで世界各国で新型コロナウイルスの感染爆発が起きている。この現

象を、よく知られている感染症の数理モデル（SIRモデル）を用いてクリティカルシンキングの実践をおこなった。特に、日本における新型コロナウイルス流行の第一波の状況を数学的に理解するというを主な目的とした。以下、各回の学習内容を報告する。

第1回 新型コロナウイルスの日本における累積感染者数と指数関数的変化

新型コロナウイルスの日本における累積感染者数と入院・治療を要する感染者数のデータとグラフから、第一波の5月ごろまでの感染状況に注意してみると、大きく二つの特徴があることがわかる。（例えば、以下の東洋経済オンラインが便利である。 <https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>）

(1) 3月から4月にかけては、1週間で累積感染者数が約2倍に増えるなど、「指数関数的な増加」が見られた。

(2) 5月の連休明けから新規感染者数が減少傾向となり、それに伴い累積感染者数もほぼ横ばいとなり落ち着いた。

この二つの状況を数学的に考えてみる。まず、「指数関数的変化」（今の場合は「指数関数的増加」）とは何かという問題を取り上げた。一般に、 $A > 0, a > 0, (a \neq 1)$ を定数とするとき $y = Aa^x$ を A を初期値、 a を底とする指数関数という。現実のモデルでは、独立変数として時間 x を t とおき、

$$y(t) = A \cdot a^t \quad (A = y(0)) \text{ と表す。}$$

指数関数 $y(t) = A \cdot a^t$ において、変数 t を離散的な変数 n (n は自然数) におきかえると、 $y(n) = A \cdot a^n$ となるが、これは初項（第0項）が $y(0) = A$ 、公比が a の等比数列の一般項を表している。高校で扱う数列と異なるのは初項が第0項となることである。

日本における新型コロナウイルスの累計感染者数は、3月下旬から4月末までは、だいたい指数関数的に変化しているの、等比数

列で近似できる。実際の累積感染者数のデータをもとにして、等比数列で近似してみる。以下では、2月28日を起点に10日を単位として(10日ごとにnが1ずつ増える)。実際の累積感染者数 $x(n)$ 、等比数列による予測人数 $y(n)=230 \cdot 2^{n-1}$ を表1にまとめてみた。

表1 累積感染者数

n	1	2	3	4	5	6	7
date	2/28	3/10	3/20	3/30	4/9	4/19	4/29
x(n)	230	568	1007	1866	5347	10751	14080
y(n)	230	460	920	1840	3680	7360	14720

等比数列は次の漸化式により定義される。

$$a_{n+1} = ra_n \quad (r \neq 1)$$

この式より、等比数列においては、添え字nが1増えると数の値はr倍になる。同様に、指数関数 $y(t) = A \cdot a^t$ ($A = y(0)$) においても、

$$\frac{y(t+1)}{y(t)} = \frac{A \cdot a^{t+1}}{A \cdot a^t} = a$$

となるから、tが1増えるとa倍になることがわかる。指数関数的変化の特徴は、もっと強く「指数関数 $y(t)$ においては、一定時間sが経過すると $y(t)$ は一定倍 (a^s 倍) に増える」といえる。実際、時刻がtからsだけ増えると、 $y(t+s) = A \cdot a^{t+s}$ であり、

$$\frac{y(t+s)}{y(t)} = \frac{A \cdot a^{t+s}}{A \cdot a^t} = a^s$$

より、yの値は a^s 倍に増えることがわかる。数学的には、この逆にあたる命題、すなわち「時刻tにおける量が $f(t)$ (> 0) であり、一定時間sが経過すると一定倍 ($x(s)$ 倍) に増えるという特徴をもつ関数 $f(t)$ は指数関数である」を示すことができる。(森、1970)

第2回 累積感染者数のグラフと成長曲線

ここでは、成長曲線の微分方程式を扱うための準備として、まず不定積分

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$$

を考え、これが対数関数の持つ性質

(1) $L(1) = 0, L(x) > 0 (x > 1), L(x) < 0 (0 < x < 1)$

(2) $L(x)$ は、狭義単調増加関数である。

(3) $L(xy) = L(x) + L(y) \quad (x > 0, y > 0)$

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y) \quad (y \neq 0), L(x^\alpha) = \alpha L(x)$$

(ただし、 α は実数)

を満たすことを確認した。その後、 $y = L(x)$ の逆関数として、 $x = \exp(y)$ が定義されることおよび逆関数の微分法により

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1/x} = x = \exp(y)$$

が成り立つことを説明した。普通の記号で書けば、 $(e^x)' = e^x$ となる。さらに、正比例関数 $z = g(y) = by, y = f(x) = ax$ ($ab \neq 0$) の合成が $z = g(f(y)) = g(ax) = b(ax) = bax$ となることを説明し、またその具体例として、自動車のガソリン代は走行距離の関数となるが、その関数をガソリン代はガソリン消費量の正比例関数、ガソリン消費量は走行距離の正比例関数と考えたとき、それらの合成関数となっていることをあげ、最も簡単な場合の合成関数の微分法の公式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

を説明した。これらの準備の最後に指数関数・対数関数の微分法の重要な公式

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x), \frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

が成り立つことを証明した。

次に、2020年の4月から5月にかけて、朝日新聞には毎日「日本における累積感染者数」のグラフが掲載されており、緊急事態宣

言や西浦教授の「8割接触減」の提言も効果が出たのか、そのグラフはきれいな成長曲線になっていた事実をあげ、それがなぜそうなるのかと問題提起した。

ここに現れた曲線は、バクテリアの増殖や人口増加、耐久消費財（電気冷蔵庫やエアコンなど）の普及など自然現象や社会現象などによくみられる「成長と飽和」現象をあらわす「成長曲線（ロジスティックカーブ）」として知られている。3月から6月ころまでの日本における新型コロナウイルスの累積感染者数のグラフは、ほぼこの曲線で近似することができる。

成長曲線を表す微分方程式と差分方程式（漸化式）については、結論を先に述べると以下のようなになる（山口、1972）。

$$\frac{d}{dt}N(t) = \alpha N(t)(1 - \lambda N(t))$$

初期値は $N(0)$ で、 α 、 λ は、それぞれ成長の速さと混雑度を表すパラメータである。また、これに対応する差分方程式（漸化式）は、

$$N_{n+1} = \frac{(1 + \delta\alpha)N_n}{1 + \delta\alpha\lambda N_n}$$

である。今回は、この差分方程式については扱わないが、この差分方程式の定式化には、日本の生物学者と数学者が深くかかわっていることが知られている。

成長曲線の微分方程式を解いてみる。

$$\frac{d}{dt}N(t) = \alpha N(t)(1 - \lambda N(t))$$

$$\frac{1}{N(1 - \lambda N)} \frac{dN}{dt} = \alpha, \quad N_0 = N(0)$$

両辺を 0 から t まで積分すると、

$$\int_0^t \frac{1}{N(1 - \lambda N)} \frac{dN}{dt} dt = \int_0^t \alpha dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N(1 - \lambda N)} = \int_0^t \alpha dt$$

$$\int_{N_0}^N \left(\frac{1}{N} + \frac{\lambda}{1 - \lambda N} \right) dN = [\alpha t]_0^t$$

$$[\log N - \log(1 - \lambda N)]_{N_0}^N = \alpha t$$

$$\log \frac{N}{N_0} \frac{1 - \lambda N_0}{1 - \lambda N} = \alpha t$$

$$\frac{N}{N_0} \frac{1 - \lambda N_0}{1 - \lambda N} = e^{\alpha t}$$

$$N(t)(1 - \lambda N_0) = N_0 e^{\alpha t} (1 - \lambda N(t))$$

よって、

$$N(t) = \frac{N_0 e^{\alpha t}}{1 + \lambda N_0 (e^{\alpha t} - 1)}$$

が得られる。例えば、

$$\lambda = 0.5, \quad N_0 = \alpha = 1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

として、gnuplot でグラフを描くと次のようになる。

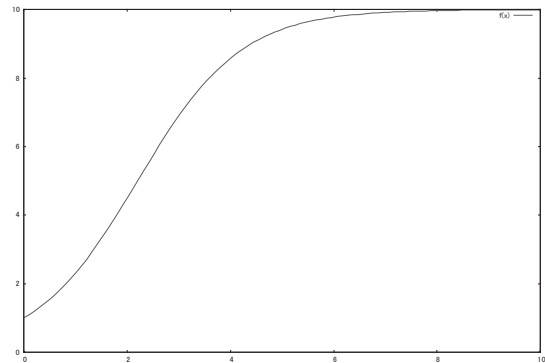


図 4 gnuplot による成長曲線の可視化

第3回 カーマック・マッケンドリックの SIR モデルと成長曲線

まず、ある地域に住む n 人の集団を考え、その地域の住民は他の地域の住民と全く交流せず、その地域の中だけでお互いが均等に交流しているものとする。また、住民の出生、自然死、他地域への移動などは一切考えないこととする。

いま、ある時点 t での感受性者数を $S(t)$ 、感染者数を $I(t)$ 、除去者数を $R(t)$ とし、これらの関数はいずれも t について微分可能とする。このとき、最初の仮定より $S(t) + I(t) + R(t) = n$ である。感受性者数の変化率は $S(t)$ と $I(t)$ の積に比例し、除去者数の変化率は

I(t) に比例するものとする。さらに、その病気に感染すると、感受性は直ちに感染者に代わるものとする。

このとき、次の一組の微分方程式系を得る。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

β は感染率（または接触率） γ は除去率とよばれ、いずれも正の定数である。この微分方程式系を「カーマック・マッケンドリックの SIR モデル」という。

まず、このモデルと先に述べた成長曲線の微分方程式の関係について考えてみる（佐藤、1987）。ここでは、前のページの仮定に加えて、さらに次のことを仮定する。その地域では、死亡とか隔離によって、感染者がその地域から外へ排除されることはないものとする。すなわち、その病気は非常に強い感染力を持つが、感染しても死亡はせず、また隔離させるほどのこともないとする。比較的軽い呼吸器系の疾患がそのような場合に当たる。ここでは、 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ をそれぞれ $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ で表すことにする。上の仮定から、 $z(t) = 0$ である。全住民数は $(n + 1)$ 人すなわち $x(t) + y(t) = n + 1$ とし、 $x(0) = n$ 、 $y(0) = 1$ とする。このとき、

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy$$

となるが、感染率 β を推定するのはかなり難しいので、変数変換 $u = \beta t$ を行くと、合成関数の微分法により、

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} = -\beta xy \cdot \frac{1}{\beta} = -xy$$

すなわち、

$$\frac{dx}{du} = -xy$$

を得る。ここで、 $x(t) + y(t) = n + 1$ を代入すると

$$\frac{dx}{du} = -x\{(n + 1) - x\}, \quad \frac{dy}{du} = y\{(n + 1) - y\}$$

このうち、

$$\frac{dy}{du} = y\{(n + 1) - y\}$$

は、第2回の成長曲線の微分方程式において、 $N = y$ 、 $t = u$ とし、

$$\alpha = (n + 1), \quad \lambda = \frac{1}{n + 1}$$

としたものに他ならない。よって、 $y(0) = 1$ より

$$y(u) = \frac{n + 1}{1 + ne^{-(n+1)u}}$$

となる。 $n = 40$ 、 $0 \leq u \leq 0.2$ として gnuplot でグラフを描くと図5のようになる。ただし、横軸は変数変換 $u = \beta t$ を行っている関係で、値が小さくなっている（ β は通常かなり小さい値をとる）ことに注意する。

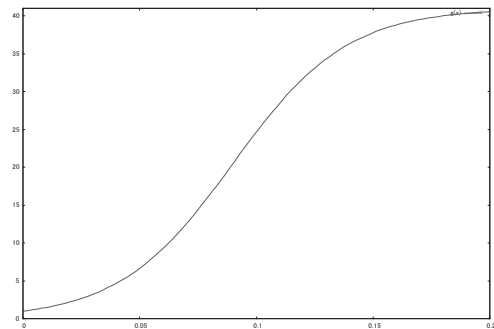


図5 SIRモデルの成長曲線 $y(u)$ のグラフ

この図は、gnuplotによる4行のプログラムで作成することができる。

第4回 SIRモデルの差分方程式（漸化式）

ここでは、SIRモデルを差分方程式で表して考察する（新居、2020）。時刻 t を感染が広がり始めてからの日数 n (n は自然数)として、感受性者数、感染者数、回復者数をそれぞれ S_n, I_n, R_n で表すことにする。全人口を定数 N で表し、また感染率 $\tilde{\beta}$ を、一人の感染者が「周りにいるのは非感染者のみ」のときに、一日に感染させる人数の平均と定義す

る。感染者 I_n 人全体では、一日に $\tilde{\beta} I_n$ 人に感染させることになる。周りの人間が非感染者ばかりではなく、感染者もいるとすると、一日に平均して $\tilde{\beta} \frac{S_n}{N}$ 人に感染させることになる。ここで、注意が必要なのはここでの感染率 $\tilde{\beta}$ と、今までに使用してきた感染率 β の関係である。具体的に考えればわかるように $\tilde{\beta} = \beta N$ となっている。

このとき、SIR モデルの微分方程式は、次の差分方程式となる。

$$S_{n+1} - S_n = -\tilde{\beta} \cdot \frac{S_n}{N} \cdot I_n$$

$$I_{n+1} - I_n = \tilde{\beta} \cdot \frac{S_n}{N} \cdot I_n - \gamma I_n$$

$$R_{n+1} - R_n = \gamma I_n$$

感染初期には、ほとんど全人口が感受性者であるので、

$$\frac{S_n}{N} \cong 1$$

と考えるとよい。このとき、

$$I_{n+1} - I_n = \tilde{\beta} I_n - \gamma I_n = (\tilde{\beta} - \gamma) I_n$$

となる。

すなわち、

$$I_{n+1} = (1 + \tilde{\beta} - \gamma) I_n$$

が得られる。この漸化式は、数列 $\{I_n\}$ が公比 $(1 + \tilde{\beta} - \gamma)$ の等比数列であることを意味するから、

I_n は指数関数的に増加することがわかる。

次に、流行のピークについて考える。そこで、SIR モデルの第二式を変形する。

$$I_{n+1} - I_n = \tilde{\beta} \cdot \frac{S_n}{N} \cdot I_n - \gamma I_n = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\gamma} \cdot \frac{S_n}{N} - 1 \right) \gamma I_n$$

右辺は、

$$\frac{\tilde{\beta}}{\gamma} \cdot \frac{S_n}{N} < 1 \quad \text{i.e.} \quad S_n < \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} N$$

のとき、負になる。よって、累積感染者数 $N - S_n$ が

$$N - S_n > N - \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} N > \left(1 - \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} \right) N$$

を満たすところまで増えると、感染者数 I_n は減り始めることがわかる。したがって、感染者数が減り始めるまでの累積感染者数を減らすには、 $\tilde{\beta}$ を小さくして γ を大きくするような施策を取ればよいが、 γ を大きくするのは難しいので、 $\tilde{\beta}$ をできる限り小さくすればよい。

一人の感染者が回復するのにかかる時間の平均を D 日とすると、平均的に一人が回復する確率 γ は、

$$\gamma = \frac{1}{D}$$

となる（現在の新型コロナウイルスに対しては、 $D = 14$, i.e. $\gamma = 0.07$ で近似できることが知られている）。感染性期間の長さが $D = 1/\gamma$ になるということは、感染者にとって、感染からの経過時間 τ において回復・隔離される確率密度が $\gamma e^{-\gamma\tau}$ であることによる。すなわち、次が成り立つことに注意する（稲葉、2008）。

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\infty} \tau \gamma e^{-\gamma\tau} d\tau$$

一人の感染者が「周りにいるのは非感染者だけ」で、感染率が β ならば、一人の感染者が感染してから回復するまでに感染させる人数の平均を

$$R_0 := \tilde{\beta} D = \frac{\tilde{\beta}}{\gamma}$$

で表し、基本再生産数という。また、感受性者数が S_n であるとき、一人の感染者が感染させる人数の平均は、

$$\frac{\tilde{\beta}}{\gamma} \cdot \frac{S_n}{N} = R_0 \cdot \frac{S_n}{N}$$

となる。この式の右辺を実効再生産数とい

$$R_c := R_0 \cdot \frac{S_n}{N}$$

で表す。先に述べた I_n の増分を表す等式

$$I_{n+1} - I_n = \tilde{\beta} \cdot \frac{S_n}{N} \cdot I_n - \gamma I_n = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\gamma} \cdot \frac{S_n}{N} - 1 \right) \gamma I_n$$

より、実効再生産数が 1 より小さくなれば、流行のピークを過ぎたことになる。

2020年4月7日の日経新聞の記事によると、3月中は $R_0 \cong 1.7$ 程度だったが、4月に入り $R_0 > 3$ となったそうである。そこで、 $R_0 = 3$ 、すなわち $\tilde{\beta} = 3\gamma$ とすると、

$$\frac{\tilde{\beta}}{\gamma} \cdot \frac{S_n}{N} < 1 \Leftrightarrow S_n < \frac{1}{3}N \Leftrightarrow N - S_n > \frac{2}{3}N$$

となり、感染者が全人口の3分の2を超えるまで感染者が増え続けるが、外出制限をして人と人の接触を8割以上減らす。すなわち、 $\tilde{\beta} < 0.2 \cdot 3\gamma$ ならば、

$$1 + \tilde{\beta} - \gamma < 1 + \frac{3}{5}\gamma - \gamma = 1 - \frac{2}{5}\gamma < 1$$

となり、感染者数は指数関数的に減少することがわかる。これが、2020年4月に政府の専門家会議に関わっていた西浦博教授の主張「接触を8割減らすことができれば、感染を減少に転じさせることができる」ことの基本的な根拠である。

第5回. SIRモデルの解析

カーマック・マッケンドリックのSIRモデル

$$\frac{ds}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

における $S(t), I(t), R(t)$ を、ここでは、 $x(t), y(t), z(t)$ で表す。初期条件を $x(0) = n, y(0) = 1, z(0) = 0$ として、この初期条件をみたすSIRモデルの解の行動を調べる。SIRモデルの微分方程式の第一式、第二式は $z(t)$ を含まない。したがって、 $x(t), y(t)$ について

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y = \beta y(x - \rho) \quad \left(\rho := \frac{\gamma}{\beta} \right)$$

を考えればよい。 $x(t), y(t)$ が求まると、

$$\frac{dz}{dt} = \gamma y$$

より、理論的には $z(t)$ を求めることができ（実際には $z(t)$ を求めるのは困難であり、最終的には数値解法に頼らざるを得ない）。

この微分方程式系の解の大まかな動きを調べてみる。 $x(t) > 0, y(t) > 0$ であるから、 xy 平面の第一象限だけを考えればよい（佐藤、1987）。そこで、ベクトル場

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

を描けばよいのだが、実際には計算も図示も数式処理ソフトやプログラミングの力が必要になるので、ここでは、もっと単純な方法で解曲線の性質を調べる。すなわち、 $x'(t), y'(t)$ の符号を調べ、第一象限をいくつかの領域に分割するのである。

$$0 < x(t) < \rho \Rightarrow x'(t) < 0, y'(t) < 0$$

$$\rho < x(t) \Rightarrow x'(t) < 0, y'(t) > 0$$

であるから、第一象限を二つの領域

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x(t) < \rho, y(t) > 0\}$$

$$B = \{(x, y) \mid \rho < x(t), y(t) > 0\}$$

に分割すると、それぞれの領域でのベクトル場

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

の流れがだいたいわかる。例えば、（差分方程式系における）基本再生産数が $R_0 = 2$ すなわち $\tilde{\beta} = 2\gamma$ とし、除去率 γ については、第4回で述べたように平均的な回復期間を $D = 14$ (日) として、 $\gamma = 0.07$ とする。これらを用いると、初期条件が $x(0) = 10000, y(0) = 1$ のとき、

$$\frac{dx}{dt}(10000, 1) = -\frac{0.14}{10001} \cdot 10000 \cdot 1 \cong -0.14$$

$$\frac{dy}{dt}(10000,1) = \frac{0.14}{10001} \cdot 1(10000 - 5000) \cong 0.07$$

となる。上のようにして、次々に適切な t の値に対してベクトル

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) |_{(x(t),y(t))}$$

を次々に図示していく方法を等傾斜法という(佐藤、1987:p.175の図3)。

ここでは等傾斜法を実行せず、以下のような計算で、SIRモデルの微分方程式の解曲線を xy 平面上へ正射影した曲線を表す式を求める。SIRモデルの微分方程式の第二式を第一式で割れば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta xy - \gamma y}{-\beta xy} = -1 + \frac{\rho}{x}$$

この両辺を x_0 から x まで積分すると

$$\int_{y_0}^y dy = - \int_{x_0}^x dx + \rho \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx$$

$$y - y_0 = -x + x_0 + \rho(\log x - \log x_0)$$

よって、

$$y = y_0 + x_0 - x + \rho(\log x - \log x_0)$$

$y = f(x)$ とおくと、

$$f'(x) = -1 + \frac{\rho}{x} = \frac{-(x - \rho)}{x}$$

であったから、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \rho$ のときであり、増減表は表2のようになる。

表2 増減表

X	0	$0 < x < \rho$	ρ	$\rho < x$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$f(\rho)$	↘

$0 < x$ においては、

$$f''(x) = -\frac{\rho}{x^2} < 0$$

より、この関数のグラフは上に凸である。また、 $f(x_0) = y_0 > 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ となるが、 $y(t) > 0$ という仮定を取り除くとグラフ

は x 軸を一度しか横切らないことがわかる。

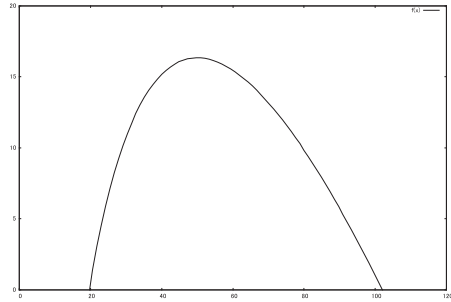


図6 SIRモデルの微分方程式の解曲線を xy 平面上へ正射影した曲線

$$x(0) = 100, y(0) = 1, \rho = 50$$

とし、gnuplotでグラフを描くと図6を得る。

今までに調べたことから、次のことがわかる。感染症の流行は、ほとんど初期の感染者数 $y(0) = y_0$ の影響を受けず、むしろ感受性者数 $x(0) = x_0$ の影響を受ける。そして、 $0 < x_0 < \rho$ ならば、 y_0 がかなり大きな値でも流行は起こらないが、 $\rho < x_0$ ならば、 y_0 がかなり小さな値でも流行は起こる。この境目の値 ρ のことを閾値とよぶ。

ρ の値が相対的に小さいということは、感染率(または接触率) β が大きいか、または除去率 γ が小さいことである。このモデルでは、閉ざされた地域内の住民を考えているから、 β が大きいということは大都会など人口密度が高く、人と人との接触機会が多いと解釈できる。また、 γ が小さいということは、医療体制が脆弱なため入院・隔離・治療などが不十分であるためなどと考えられる。このような場合、流行が激しく起こる。一方、 ρ の値が大きいということは、感染率 β が小さく除去率 γ が大きいことである。つまり、その地域の人口密度が低いか、または十分な医療制度があり、検査の徹底と陽性者の入院・隔離など疫学上の有効適切な施策が行われることと考えてよい。この場合、感染症の流行は決して激しくならない。

高校数学の範囲内で扱えるのは、ここまでが限度である。最後に、高校数学の範囲を超えるが、4次のルンゲクッタ法を用いて、SIRモデルの微分方程式を解いてみると、以下のような図7、図8を得る。一つの方法は、早川・三石(2020)にあるPythonの2次ルンゲクッタ法のプログラムを4次のルンゲクッタ法に書き換えて、シミュレーションするというものである。その結果が次の図7である。図7は、横軸に時間軸（t軸：日数）をとり、縦軸に $S(t), I(t), R(t)$ をそれぞれ図示している。

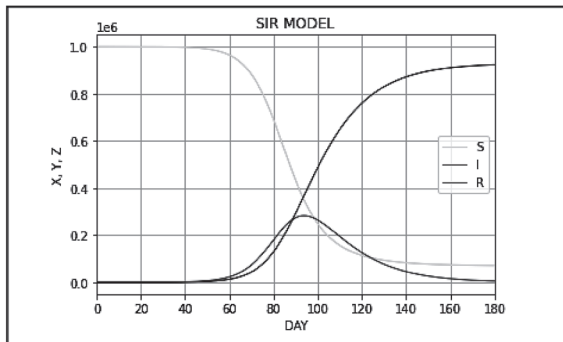


図7 SIRモデルのPythonプログラムによるシミュレーション

ただし、パラメータは $N = 10^6, I(0) = 10$ で、感染者が毎日一人当たり10人に接触し、1日1人の接触当たりの感染率は0.02で感染者の快復日数が14日程度 ($\gamma = 1/14 \approx 0.14$) としている。

もう一つの方法は、

$$x(t) = S(t), y(t) = I(t), z(t) = R(t)$$

として、gnuplotで4次のルンゲクッタ法を用いて、SIRモデルの解曲線を描く方法である。

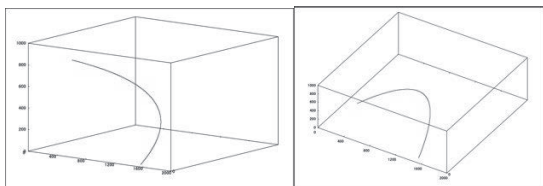


図8a SIRモデル 解曲線（空間曲線） 図8b SIRモデル 解曲線（別アングル）

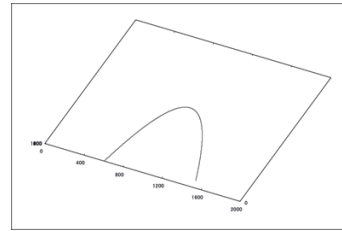


図8c SIRモデル解曲線の平面投影図

図8a、図8bは少し視点を変えて比較してみた。図8cは、解曲線のxy平面への正射影が見えるように視点をさらに上の方に移動した。

ただし、この場合の初期条件と ρ の値は

$$x(0) = 1500, y(0) = 10, \rho = 1000$$

とし、 $\beta = 0.00007, \gamma = 0.07$ とした。

これにより、佐藤(1987)のp179の表1の1行目にある数値を確かめることができた。なお、4次のルンゲクッタ法については、山本(2013)にあるローレンツ・アトラクターを描くためのプログラムを一部変更して使用した。

4. 数理モデルシミュレーションのICT環境

gnuplotを活用したシミュレーション環境、操作方法については、gnuplot homepage (<http://www.gnuplot.info/>)で分かりやすく解説されている。また、Pythonを使ったGoogle Collaboratoryについては、Google Collaboratoryの使い方を参照していただきたい。本稿では、これまで、手計算では不可能に近かった数理モデルをクリティカルシンキングのステップIVでも活用できることを例示した。

5. セミナーに参加した学生の感想

本試行研修に参加してくれた学生の感想を共有したい。参加した学生のうち、4名からの感想を紹介する。

- ・理系として今まで数々の法則や原理を使って問題を解いてきましたが、ここまで実践的

な解析をしたのは初めてでした。特に今問題となっている新型コロナウイルスの感染に関しての話は、数学がどう役に立っているかということをも身に染みて感じました。これを用いて、感情論だけでない科学的根拠として利用することで更なる対策を講じることが出来、さらにコンピュータを使った計算を行うことで大規模で正確な予測が出来るということがとても感動したし、関心を持ちました。今後もコロナだけでなく数々の問題が出てくるときにこれを思い出して応用してみるのも面白いと思います。(システム理工学部 2年生 加藤駿)

・思ったより数学の話が多かったが、わかりやすく教えていただいたので楽しかったです。今までは、微分積分を学んでいったい何になるのだろうって思っていました。しかし、SIRモデルの話や実効再生産数の話を聞いて、微分積分が実際にどのように活用されているかを知ることができて面白かったです。(社会学部 2年生 須貝航太)

・身近なコロナの感染拡大におけるSIRモデルを用いて、今まで学んできた成長曲線や微分方程式等の実用例を知ることができ、改めて数学の面白さを実感しました。また、今後は他の身近な事例を扱い、更にプログラミングとの融合で学びを深めることができると思います。(経済学部 3年生 下村茉由)

・SIRモデルを通じて、成長曲線や微分積分という高校で得た知識の実用例を知ることができて面白かったです。文系ですが、数学的知識をつけることで見えるものの幅が広がっていくように感じました。数学は苦手意識があり、あまり自分で能動的に学びなおすということはしなかったもので、このような機会に改めて知ることができ、良かったです。(法学部 4年生 奥村真麻)

以上のように、感想から数学の概念と社会の様々な局面との間に何からの関連づけを見いだすきっかけになったことが窺える。

6. 最後に

New Education Normalの時代には、近未来も含め、未来社会は不確定なことばかりである。その未来社会を生きていくことになる学生たちにとって、クリティカルシンキングスキルは大事なフューチャースキルとなる。ICTの進化は教育のDXに活かされ、これまでに叶わなかったツールによる深い学びが可能となる。今回の試行でも、ICTで補完された数理モデルをクリティカルシンキングの学びで応用することで、これまでのクリティカルシンキングの授業では実現不可能であった学びの可視化が実現できた。教育のDX化の中、受講生自身が不確定な未来社会の問題課題に取り組み、よりよい未来社会を創造するためのフューチャースキルをICTと協働しながら修得していくことはとても重要なことだと考える。

参考文献

- 早川美徳・三石大(2020) 『Pythonプログラミング』(ステップ6・SIRモデル). (<https://wagtail.cds.tohoku.ac.jp/coda/python/p-6-application-sup-ode-sir-model.html>)
- 稲葉寿(2008) 『感染症の数理モデル』培風館.
- 黒上晴夫・小島亜華里・泰山裕(2012) 『シンキングツール®~考えることを教えたい~(短縮版)』(<http://www.ks-lab.net/haruo/index.html>)
- 新居俊作(2020) 『コロナの感染拡大と終息の予測方法』(<https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/SIR.pdf>)
- 森毅(1970) 『現代の古典解析』現代数学社.

- 佐藤總夫 (1987) 『自然の数理と社会の数理
微分方程式で解析するⅡ』 日本評論社.
- 山口昌哉 (1972) 『非線型現象の数学』 朝倉
書店.
- 山本昌忠 (2013) 『gnuplot の精義 第二版
フリーの高機能グラフ作成ツールを使いこ
なす』 株式会社カットシステム.