

# 自己組織化マップとカオス

荒木 孝 治

## 1 はじめに

Simon (1996) は、その著書 “*The Sciences of the Artificial*” の第3版で “Alternative Views of Complexity” という章を新たに加え、カオス、進化、遺伝的アルゴリズム、セルオートマトンといった内容を取りあげた。このことは、経営学の分野においてもこうした考え方を適用することが重要であり、不可欠であることが認知されつつあることを示している。すなわち、経営学における主要な分析対象である組織やそれらの結合体であるネットワーク組織は、制約のある資源の中で情報や物をやりとりしながら日々学習し、進化する複雑なシステムとして捉える必要がある。さらにそれらは、進化だけでなく、創発性、分散化、不確実性、合理性の限界、満足原理といった特性によっても彩られており、そういった面からの分析がきわめて本質的なのである。

こうした複雑なシステムの分析には、それなりの分析装置を必要とする。このため、1980年代後半以降、組織やネットワークといった複雑な特性を持つシステムをコンピュータおよび数学モデルを用いて積極的に分析する研究領域が発展してきた。現在、複雑性を視野に入れて、進化や学習といった組織やシステムのダイナミックな特性を分析に取り入れることのできるツールとして、カオス、ゲーム、エージェント、セルオートマトン、人

工的ニューラルネットワーク、進化アルゴリズムといった諸理論がある。これらの中で、脳が行っている高度な情報処理活動をコンピュータでシミュレートしようというのが人工的ニューラルネットワーク（以下、ニューラルネットワークという）の考え方である。

ニューラルネットワークは経営科学でも、特にマーケティング、ファイナンス、生産管理の諸分野で、予測やモデル化、制御を目的として利用されてきた（たとえば、Trippi and Turban 1996, Garson 1998, Krycha and Wagner 1999 参照）。一方、カオスへの注目も増大している（Chorafas 1994, Hibbert and Wilkinson 1994, Jayanthi and Sinha 1998）。そこで本稿では、ニューラルネットワークの分野で開発されてきた理論・ツールを、カオスを示す組織ダイナミクスの分析に取り入れたとき、経営学においてどのような視野が開かれるかを試みとして提示したい。

ニューラルネットワークにも様々な種類があるが、そのひとつである自己組織化マップの利用を試みる。これはパターン分類手法のひとつと位置づけることができる。その特徴は、Uマップと呼ばれる1次元または2次元格子上に多次元データを投影することにより、データをマップとして視覚的に分類することにある。分析の対象としては、イノベーションプロセスの分析に取り入れられているロジスティックダイナミクスをとりあげる。

本稿の構成は次のようになる。第2節で自己組織化マップの考え方を概説する。第3節でカオスモデルを紹介した後、その分類問題に自己組織化マップを適用する。第4節でまとめを行う。

## 2 自己組織化マップ

生体は、様々な情報を処理する際、ニューロンを通じて行っている。ニューロン単体が行う処理は、特定の刺激に対してのみ反応し、それ以外に対しては反応しないという非常に単純なものであるが、多くのニューロンがネットワークとして非線形に複雑な形で結合することにより、高度な情

報処理をネットワーク総体として行うことを可能にしている。ニューラルネットワークは、こうした生体が行っている神経ネットワークとしての情報処理システムをコンピュータで模すものである。神経ネットワークがニューロンと（細胞体と樹状突起・軸索）を単位として構成されているように、コンピュータの中で人工的に構成される神経ネットワークであるニューラルネットワークでもニューロン（一般には素子、ユニットという）と素子間の交互作用から構成される。通常、ニューラルネットワークは入力層、中間層、出力層という3つの素子グループから階層的に構成される。入力情報は入力層で受容され、中間層を経て、出力層から出力情報として出力される。ニューラルネットワークは、ある一定の目的をもって入力情報を総体として出力情報に変換するシステムであり、そのプロセスの中で情報は形を変えて伝達されていく。また、その変換・伝達システムは前もって確定しておらず、入力データを学習することにより適応的に構築されていく。

ネットワークや学習の形態によりニューラルネットワークにはさまざまなものがある（たとえば坂和・田中 1997参照）。Kohonen は、自己組織化マップ（SOM : Self-Organizing Map）<sup>1)</sup> と呼ばれるニューラルネットワークを提案した（Kohonen 1995, 1997）。これは、いくつかのユニットから構成される入力層と、1次元または2次元のトポロジーを持つ出力層という2層から構成される教師なし学習を行うニューラルネットワークである。入力層のユニットは入力情報を受け、その情報を出力層に伝える。出力層では入力情報に基づいて学習を行い、入力データの分類を行う。具体的には以下のようになる（Kohonen 1997, Vesanto 1997 参照）。

入力層を  $I$ 、出力層  $O$  をとあらわし、 $I$  は  $p$  個のユニット  $\{iu_1, iu_2, \dots, iu_p\}$  から、 $O$  は  $n \times m (=N)$  個のユニットから構成されるとする。 $O$  の各ユニット  $o_j (j=1, 2, \dots, N)$  はすべての入力ユニットと結合されてお

---

1) 自己組織化特徴マップ(SOFM : Self-Organizing Feature Map), あるいは Kohonen マップともいう。

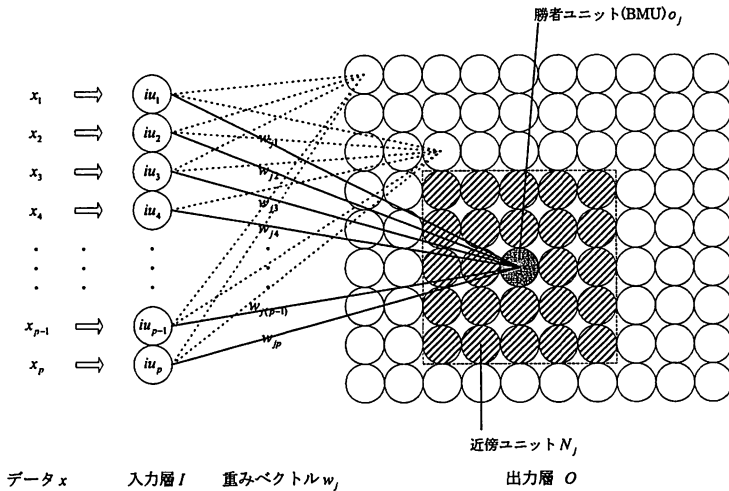


図 1 自己組織化マップ (SOM) の概念図

り、その結合の緊密さをあらわす尺度である重みベクトル  $w_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jp})^T$  を持つ (図 1 参照)。<sup>2)</sup>

SOM の自己組織化プロセスは、入力データに対して最適な重みベクトルを学習することにある。通常、最初に各ユニットが持つ重みベクトルはランダムに生成される。その後、入力データに対してトレーニングを行い、学習により重みを変更していく。そのプロセスは以下ようになる。

分類したい個体 (個人や企業、組織等) の注目する特性に関して測定したデータの集合  $D$  があるとする。通常、個体は注目する特性を複数個持つのでデータは多次元となり、ベクトルで表現することができる。  $D$  はこれらベクトルの集まりである。SOM は個体の特性データである  $D$  を用いて、  $D$  を構成する個体を分類する。ある個体の特性ベクトル  $x = (x_1, x_2, \dots,$

2) ベクトルの右肩の  $T$  は転置をあらわす。今の場合、  $w_j$  は列ベクトルであることを意味する。

$x_p^T (\in D)$  を入力情報として, SOM は, この情報に対して最も「近い」重みベクトル  $w_j$  を持つユニットを探す。このとき, 近さを測る尺度が必要であるが, 通常, ユークリッドノルム

$$\|x - w_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - w_{ji})^2}$$

を利用する。このとき,  $x$  に最も近いユニットは

$$\|x - w_{i(x)}\| = \min_j \|x - w_j\|$$

なる関係を満たすユニット  $i(x)$  である。このユニットを, 入力情報  $x$  に対する勝者ユニット (BMU: Best Matching Unit) という。BMU は

$$w_j^* = w_j + h_{c_j}(x - w_j)$$

という形で重みベクトルを更新し, 新しい  $w_j^*$  を持つことになる。ここで  $h_{c_j}$  はこの学習をコントロールするためのある条件を満たす関数であり, カーネル関数という。<sup>3)</sup> さらに BMU だけではなく, その近傍  $N_{i(x)}$  にあるユニット  $o_j (\in N_{i(x)})$  にも同じ形の学習を行うことを許し, 重みベクトルを更新させる。<sup>4)</sup> これらの操作により, 以後の入力情報で今回の入力情報  $x$  に近いものに対して, BMU およびその近傍にあるユニットはより有利に振る舞うことが可能となる。この形の学習を全入力データに対してある一定の回数, あるいはある条件を満たすまで繰り返す。この自己組織化プロセスの中で, SOM は入力データのパターンを学習し, Uマップと呼ばれる 1 次元または 2 次元平面上の格子に入力データを投影し, その結果, データを分類する。

---

3) カーネル関数にはいくつか種類があるが, 代表的なものとして, 一様分布の確率密度関数を利用するバブル, および正規分布の確率密度関数を利用するガウシアンがある (Vesanto 1997)。

4) 出力ユニットで近傍を考えるために, Uマップ内のユニットにおいて距離の概念が定義されているが, ここでは述べない。詳細については Kohonen (1997) 参照。なお図 1 では大きさ 2 の近傍を図示している。

SOM を利用する際、データの予備分析において利用される手法として Sammon マップがある。これはデータベクトルを局所的な幾何関係として直接、近似しようとするものである (Kaski 1996)。データを点で、距離を線の長さで 2 次元平面上に描くことにより、データベクトルの密度をグラフで近似する。

自己組織化マップおよびその関連手法について、社会科学・自然科学分野への応用を含めた 3000 以上の文献リストがヘルシンキ工科大学 (Helsinki University of Technology) の Neural Networks Research Centre のウェブページ (<http://www.cis.hut.fi/nnrc/>), および Kaski *et al.* (1998) で紹介されている。また、ニューラルネット全般の社会科学の分野への応用については Garson (1998) が詳しい。

### 3 ロジスティックモデルの分類

#### 3.1 カオス・イノベーションモデル

カオスモデルは社会科学の様々な分野の研究で利用されてきた (Kiel and Elliott 1996 参照)。特に証券市場のデータ分析において非常に多く取り扱われている (Chorafas 1994 参照)。経営学の分野では、市場成長や市場競争、ブランド競争の分析に利用されている。たとえば、Chen and Van de Ven (1996) はハイテク製造業におけるイノベーションのプロセスを分析するためのモデルとしてロジスティックモデルを構成した。また、Jayanthi and Sinha (1998) は Chen and Van de Ven のロジスティックモデルを考察し、カオスの検証方法を与えた。

March (1991) は組織学習のプロセスにおいて、企業家はイノベーションを実現するための一連のアクションの探索 (exploration) と実行 (exploitation) を行っており、これらはトレードオフの関係にあるため、これらに経営資源をバランスよく配分することが重要であるとした。企業家が  $t$  期において一連のアクションを探索するために費やす行動の割合を  $x_t$  ( $0 \leq$

$x_t \leq 1$ )とし、残り $(1-x_t)$ を実行のための活動の割合とする。このとき Chen and Van de Ven (1996) は、March の考察をもとに、 $x_t$ のダイナミクスを

$$x_{t+1} = F(x_t; k) = kx_t(1-x_t), \quad 1 < k \leq 4$$

とあらわすロジスティックモデルを考えた。 $F$ をマップという。 $k$ は探索と実行を結びつけるパラメータで、ダイナミクスの非線形性の強さを決定する。

パラメータ  $k$  の値に対してロジスティックマップは様々なパターンをとる。 $k < 3$ に対して軌道  $\{x_t, t=1, 2, \dots\}$  はひとつの値  $(1-1/k)$  に収束する。 $3 \leq k < 3.57$ のとき周期運動をする。周期運動の様子は次のようになる。 $k=3$ で分岐が起こり、周期は2になり、これら2つの点の間で振動する。さらに、 $k$ がこの範囲内で大きくなるにつれ4周期軌道を持ち、次いで、8周期、16周期、32周期、…と倍周期運動をするようになり、 $k$ が約3.57を超えるとカオスとなる。 $k$ の値に対する周期の変化をまとめて表1に示す。また、倍周期への分岐およびカオスの様子を図2に、いくつかの  $k$  の値に対する軌道を図3に示す。なお、図3にはランダムなパターンをつけ加え(図3(f))、ランダムネスとカオスが異なることを見ることができるようにしている。このパターンは、図3(e)のデータをランダムに並べか

表1 アトラクタの周期の変化<sup>5)</sup>

アトラクタの周期の変化	分岐の起こる $k$ の値
1 から 2	3
2 から 4	3.4494...
4 から 8	3.5440...
8 から 16	3.5687...
16 から 32	3.5698...
...	...
無限大	3.5699...

5) 武田 (1997) より引用。

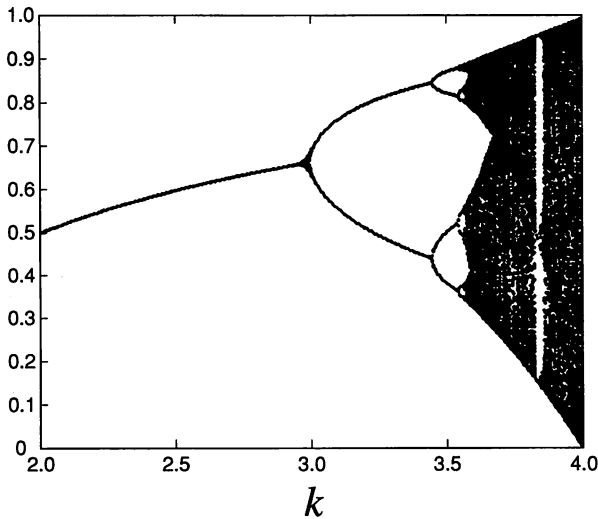


図 2 解の分岐とカオス

えて生成している。

Jayanthi and Sinha (1998) はカオスの診断法を整理した。そこで重要な役割を果たすのがリアプノフ (Lyapunov) 指数と相関次元である。カオスの特徴のひとつに初期値への鋭敏な依存性があるが、リアプノフ指数はこの鋭敏性を指標化するものである。一般に、パラメータ  $\mu$  を持つ 1 次元マップ  $G(x; \mu)$  に対するリアプノフ指数  $\Lambda$  は、

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2 |g'(x_i)|, \quad g(x) = \frac{d}{dx} G(x; \mu)$$

と定義される (Kiel and Elliott 1996)。正のリアプノフ指数は初期条件への鋭敏な依存性、すなわちカオスを意味し、負のリアプノフ指数は周期変動を意味する。また、相関次元は、 $\{(x_t, x_{t+1}), t=1, 2, \dots\}$ ,  $\{(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}), t=1, 2, \dots\}$ ,  $\{(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}), t=1, 2, \dots\}$ ,  $\dots$  という形で時系列データを多次元空間に埋めていったとき、周期運動やカオスでは低次の空間に埋め込まれるが、ランダムな場合には高次元 (無限次元)



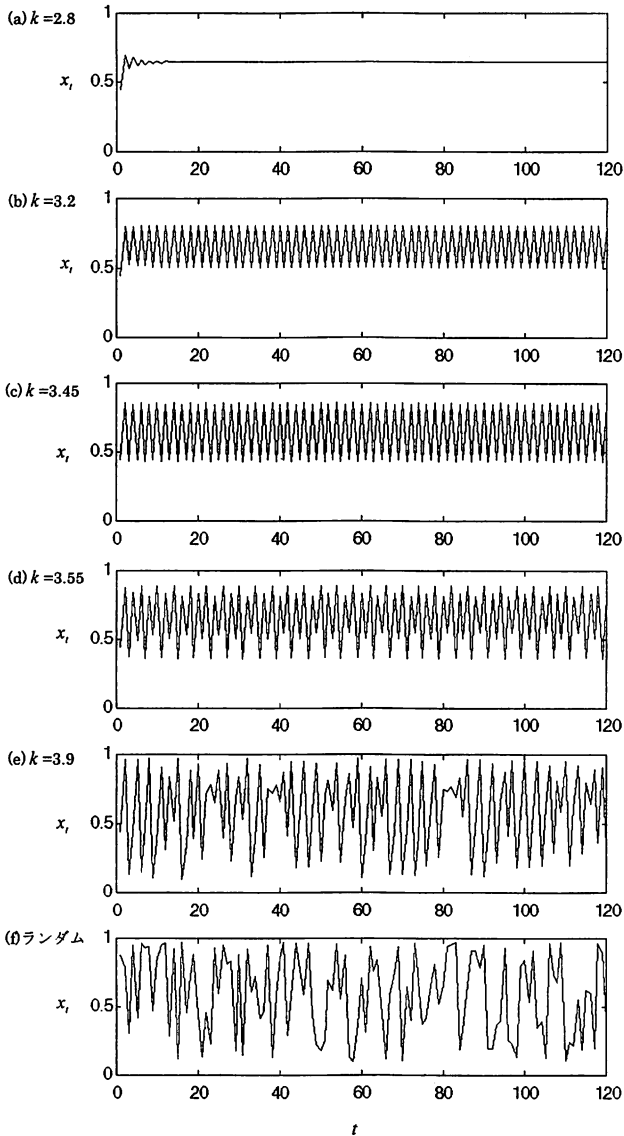


図3 企業家の活動における探索の割合 ( $x_t$ ) のロジスティックダイナミクス (初期値:  $x_0=0.45$ ;  $1 \leq t \leq 120$ ) (a)  $k=2.8$ : 安定 (b)  $k=3.2$ : 2周期軌道 (c)  $k=3.45$ : 4周期軌道 (d)  $k=3.55$ : 8周期軌道 (e)  $k=3.9$ : カオス (f) ランダム

を必要とすることを利用するカオス診断法のひとつである (Jayanthi and Sinha 1998)。

### 3.2 SOM によるロジスティックダイナミクス分析

本節では SOM を用いてロジスティックダイナミクスの分類実験を行う。実験の概要は以下である。

ロジスティックマップのパラメータ  $k$  の値を 2.8 から 4 の間で 0.02 刻みに変化させる。このとき  $k$  は 61 個の異なる値をとり、様々な周期変動パターンおよびカオスパターンを含む。各パラメータ値のロジスティックマップに対して初期値<sup>6)</sup>を設定し、時系列データ  $\{x_t, t=1, \dots, 100\}$  を求める。ひとつの  $k$  の値に対する時系列データを 1 組のデータと考え、計 61 組のデータを用いた SOM による学習を行い、周期運動およびカオスの分類をおこなう。なお SOM の実行にはパブリックドメイン・ソフトウェアである SOM\_PAK を利用する。<sup>7)</sup> SOM 実行の際のパラメータは Kohonen (1997) の推奨 (値) に従って定める。すなわち、代表的なパラメータとして、U マップには 6 角形格子を用い、近傍は大きさ 6、学習の繰返し回数は 10 万回とする。近傍のカーネル関数としてはバブルおよびガウシアン<sup>8)</sup>の両方を用いる実験を行う。他のパラメータについては SOM\_PAK のデフォルト値を用いている。このデータに SOM を用いた結果を図 4 に示す。

図 4 で、六角形の格子がユニットをあらわす。このユニットにつけられている“数字”のラベルは、 $k = \text{“数字”}$  をパラメータとして持つロジスティックマップの時系列パターンがこのユニットにマッピングされてること

---

6) 分類に初期値の影響が入らないように、すべての  $k$  に対して初期値  $x_1$  を 0.45 に設定している。初期値をランダムに設定した場合の実験も行ったが、ほぼ同じ結果なので本稿では省略している。

7) Helsinki University の Neural Network Research Centre のウェブサイト (<http://www.cis.hut.fi/nsrc/som.html>) より取得可能。使い方については SOM Programming Team (1995) または徳高他 (1999) 参照。

を意味する。また、図はグレースケールで表示されているが、これは、色の濃いグレーのユニットにラベルづけられたパターンは互いに顕著に異なっており、色の薄いユニットのそれらは似ていることを示している。図 4 より、周期運動を示す時系列パターンとカオスを示す時系列パターンとがきれいに分類されていることを読み取ることができる。 $k=2.80\sim 3.60$ の間の周期運動を示すパターンは(ユニットのラベル参照)、色の薄いユニットにマッピングされ、右から左へほぼ大きさの順に並んでいる。これに対して、カオスパターンは色の濃いユニットのブロックにマッピングされ、分離されている。ただし、SOM\_PAK の癖かどうか不明であるが、図 4 でラベルが一部欠落していることに注意。

図 5 に、同じデータに対して作成した Sammon マップを示しておく。図の右側の中ほどに S 字状に点の密集している個所があるが、そこに周期運動を示すデータがマップされている。カオスパターンはほぼ  $k$  の大きさに応じてその周辺を取り巻いている。

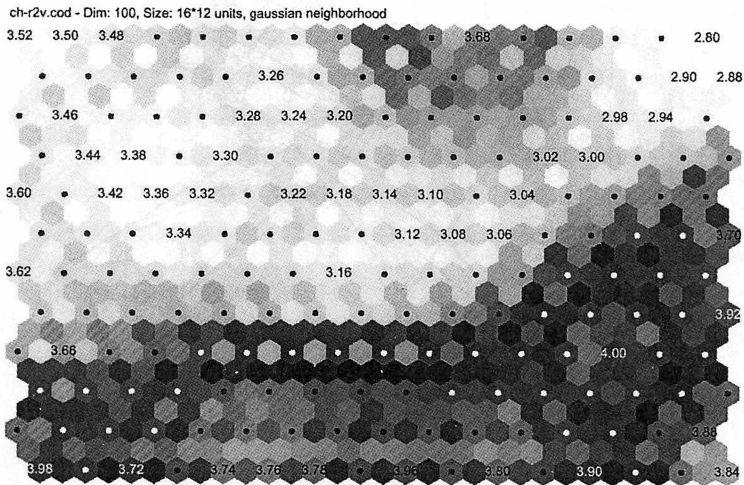


図 4 ロジスティックマップ・データの SOM による分類結果 (Uマップ)。格子につけられた数字のラベルはロジスティックマップのパラメータ  $k$  の値。

次に、カオス時系列とランダムな時系列との分類を行う。これには、上記のカオス時系列データの一部 (21組;  $k=3.60\sim 4$ ; Uマップ上のラベルは“ $k$ の値”としている) と、それらのうち12組をランダムに並べ替えたデータ (ラベルは“r”につづけて“ $k$ の値”), および (0, 1) の一様乱数を99個発生させた時系列14組 (ラベルはいずれも“rand”), 計47組のデータを用いた (いずれの場合も初期値は0.45に設定)。SOMによる分類結果を図6に示す。濃いグレーのユニットが非常に多くっており、これらのユニットにマップされたデータのパターンが互いに似ていないことがわかる。しかしこの場合も、左側1/4位のブロックのユニットにランダムな時系列がマッピングされていることが一目でわかり、ランダムな時系列とそ

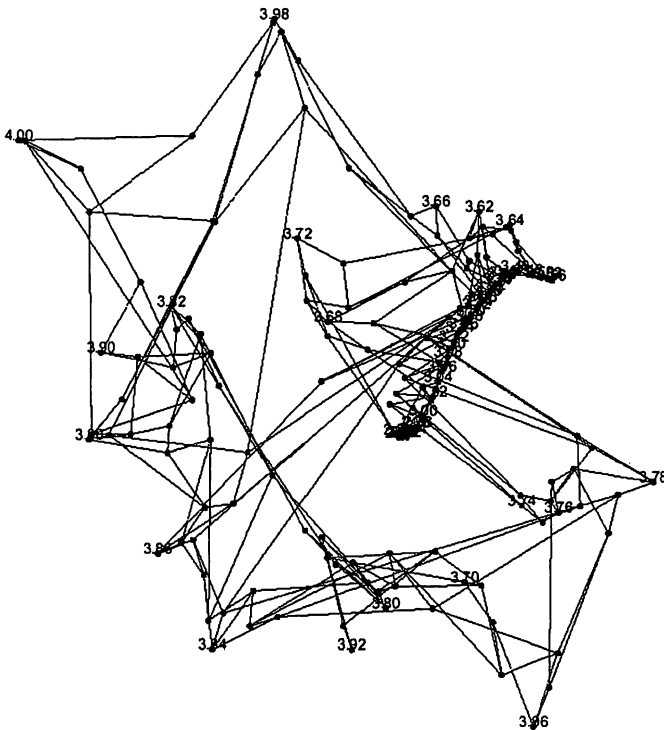


図5 Sammon マップ。ラベルは  $k$  の値

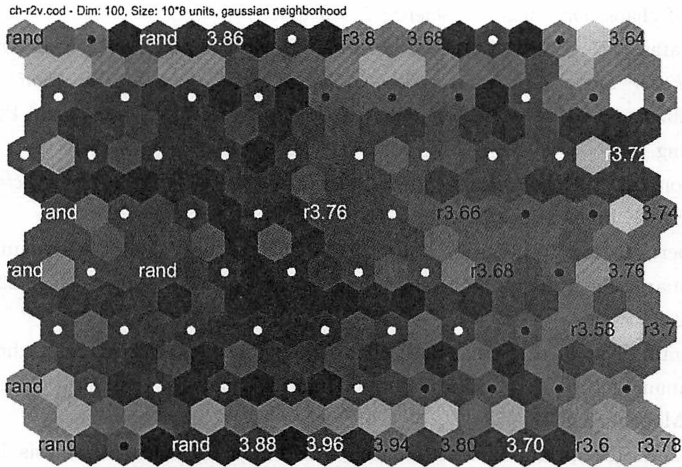


図 6 ランダムなパターンとカオスパターンの分類。格子の数字ラベルはパラメータ  $k$  に対応。ラベル “rand” はランダムなパターン。ラベル “r 数値” は  $k$ =数値のパターンをランダムに入れ替えたもの。

の他とはきれいに分類されていることが見て取れる。

#### 4 おわりに

本稿では、イノベーションプロセスの分析で用いられるロジスティックモデルが生み出す様々なパターンの分類問題に自己組織化マップ (SOM) を適用した。周期運動、カオス、ランダム時系列に対して SOM がうまくパターンを分類できることを示した。今回は理論モデルから発生するデータに対して SOM を適用したが、実際のデータに対して SOM を用いた分析も行っているので、今後報告したい。

#### 参考文献

Chen, Y. and A.H. Van de Ven (1996). Learning the innovation journey : order out

- of chaos? *Organization Science* 7, 593-614.
- Chorafas, D.N. (1994). *Chaos Theory in the Financial Markets : Applying Fractals, Fuzzy Logic, Genetic Algorithms, Swarm Simulation & The Monte Carlo Method to Manage Market Chaos & Volatility*. IRWIN Professional Publishing.
- Garson, G.D. (1998). *Neural Networks : An Introductory Guide for Social Scientists*. SAGE Publications.
- Hibbert, B. and Wilkinson, I. F. (1994). Chaos theory and the dynamics of marketing systems. *Journal of the Academy of Marketing Science* 22, 218-233.
- Jayanthi, S. and K.K. Sinha (1998). Innovation implementation in high technology manufacturing : a chaos-theoretic empirical analysis. *Journal of Operations Management* 16, 471-494.
- Kaski, S. (1997). Data exploration using self-organizing maps. PhD thesis. Helsinki University of Technology.
- Kaski, S., J. Kangas, and T. Kohonen (1998). Bibliography of Self-Organizing Map (SOM) Papers : 1981-1997. *Neural Computing Surveys* 1, 102-350. <http://www.icsi.berkeley.edu/~jagota/NCS/>より取得可能.
- Kiel, L.D. and E. Elliott Eds. (1996). *Chaos Theory in the Social Sciences : Foundations and Applications*. The University of Michigan Press.
- Kohonen, T. (1995). *Self-Organizing Maps*. Springer. (徳高平蔵他訳『自己組織化マップ』シュプリンガー・フェアラーク東京)
- Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps, Second Edition*. Springer.
- Krycha, K.A. and U. Wagner (1999). Applications of artificial neural networks in management science : a survey. *Journal of Retailing and Consumer Services* 6, 185-203.
- March, J.G. (1991). Exploration and exploitation in organizational learning. *Organization Science* 2, 71-87.
- May, R.M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261, 459-467.
- 坂和正敏, 田中雅博 (1997). 『ニューロコンピューティング入門』森北出版.
- Sammon, J. W. Jr. (1969). A nonlinear mapping for data structure analysis. *IEEE Transactions on Computers* C-18, 401-409.
- Simon, H.A. (1996). *The Sciences of the Artificial, Third Edition*. The MIT Press. (稲葉元吉, 吉原英樹訳『システムの科学 第3版』, パーソナルメディア)
- SOM Programming Team of the Helsinki University of Technology (1995). SOM\_PAK : The self-organizing map program package, Version 3.1. Helsinki

ki University of Technology, Laboratory of Computer and Information Science.

武田暁 (1997). 『脳と力学系』 講談社.

徳高平蔵, 岸田悟, 藤村喜久郎 (1999). 『自己組織化マップの応用』 海文堂.

Trippi, R. R. and E. Turban Eds. (1996). *Neural Networks in Finance and Investing : Using Artificial Intelligence to Improve Real-World Performance, Revised Edition*. IRWIN Professional Publishing.

Vesanto J. (1997). Data mining techniques based on the self-organizing map. Master's thesis. Helsinki University of Technology.