関西大学心理学研究　2015 年　第 6 号　pp.13-22

Bi-factor構造への解析的回転

――モンテカルロ法による比較――

青　木　貴　寛　関西大学大学院心理学研究科
清　水　和　秋　関西大学社会学部

A Monte Carlo Study of Comparison among Factor Rotation Methods for Bi-factor Structure

Takahiro AOKI (Graduate School of Psychology, Kansai University)
Kazuaki SHIMIZU (Faculty of Sociology, Kansai University)

Most of the analytical methods of factor rotation have been developed to achieve the simple structure of multiple factors. Rotation methods for the bi-factor structure constructed of a general factor and group factors have also been proposed. Monte Carlo experiments are performed to study of the behavior of factor rotation methods for recovering of the bi-factor structure. The condition of this study is the rotation method (Varimax, Promax, Bi-factor, Biquartimin, and Quartimin). Three types of factor correlations are also examined as the part of population models. Biquartimin method reveals better recovering of the bi-factor structure among above analytic rotation methods. The implications of these findings relating the factor structure and factor rotation are discussed.

Key words: bifactor structure, exploratory, factor analysis, rotation, R, Monte Carlo method

はじめに

知能の因子構造に関する研究では，2 因子モデル（Spearman, 1904）と多因子モデル（Thurstone, 1934）が注目されることが多い。そして，多因子説は 2 次因子レベルをモデルに組み込むことにより，2 次レベル・1 次レベルの因子からなる階層的なモデルとして統合された。このようなモデルの実証的な研究をベースとして，因子分析法や構造方程式モデリングが発展してきたともいえる。

Holzinger & Swineford（1937）は，一般因子（n 変数で 1 次元）と特殊因子（n 変数で独立した n 次元）からなる 2 因子説を元にして，一般因子，特殊因子と群因子（n 変数で $m-1$ 次元）からなる Bi-factor 理論を提唱した。そして，一般因子と群因子の計算方法といくつかの結果を紹介している。この方法を下にして，直交条件の下での一般因子と群因子とを解析的に回転する方法を Jennrich & Bentler（2011）は，Matlab コードと共に提案している。そして，Harman（1976）の 24 の変数に関して，この方法での回転結果と確認的因子分析結果とを比較し，Bi-factor 構造を解析的回転することの有効性を主張している。彼らはさらに群因子間を斜交とする方法も提案している（Jennrich & Bentler, 2012）。

構成概念を因子分析法から探索し，その結果から尺度構成する研究スタイルが定着してきている。そのような研究の報告において，構成した複数の因子に関しての信頼性と α 係数と項目の全体から計算し

たα係数とが同時に掲載されていることがある。このように結果を示すことは，ある意味で，全体としては一般因子を仮定し，内部には複数の群因子を仮定しているという解釈を行っていると推測することもできる。すなわち，研究者の意図とは別に，対象の構成概念にBi-factor構造があることを報告しているというようにもとることができるのではないだろうか。Reise（2012）は，項目から構成概念を探索し，尺度構成に寄与してきた因子分析・構造方程式モデリングに項目反応理論も加え，Bi-factor構造という観点からの方法論レビューしている。そして，強い共通因子と下位領域として項目がまとめることができるような尺度構成の現場において，心理測定的特性を検討するためにBi-factorモデルでの検討の必要性を議論している。

Gorsuch（1983）は，一般因子が仮定されるような構成概念の回転には，Varimax法が不適切であることを警告している。同様のことをComrey（1973）も指摘している。Promax法は，Varimaxの直交回転結果を下にして，仮説的構造を作成し，より単純な構造を求めてこの仮説への近似を斜交回転によって実現した方法である。このため，Varimax結果から斜交の単純構造を求める限りにおいては，これらの警告の対象となる回転方法といえよう。この点に関しては，Bi-factor構造を母モデルとしたシミュレーション研究から青木（2014）は，Promaxも含むVarimax系の回転方法がBi-factorの回転方法としては適切ではないことを明らかにした。ただし，このシミュレーションは，ひとつの乱数データからの結論であった。本稿では，SPSSなどの標準的な解析的回転方法を対象として，乱数実験の数を増やすことによって，Bi-factor構造のデータに適切な回転方法をさらに追求してみることにする。ここでは，Rのpsychパッケージから Varimax法（直交），Promax法，Bi-factor法（直交），Biquartimin法，Quartimin法を検討の対象とすることにする。具体的なモンテカルロ実験を行う前に，これらの解析的回転に関して，簡単に説明を行ってみることにする。

因子分析モデルと回転

因子分析の確率変数を対象としたモデルは，次のように表すことができる（例えば，柳井・繁桝・前川・市川（1999）など）。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda f} + \boldsymbol{Du} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$はn個の観測変数の得点からなる列ベクトルとする。$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{u}$はそれぞれm個の因子得点からなる列ベクトルとn個の独自性得点からなる列ベクトルとする。$\boldsymbol{\Lambda}$は（$n \times m$）次の因子パターン行列であり，$\boldsymbol{D}$は（$n \times n$）次でn個の独自性を対角項にもつ対角行列とする。

因子分析の実際の手順では，因子パターン行列$\boldsymbol{\Lambda}$は，主因子法あるいは最尤法によって推定された（$n \times m$）次の因子行列$\boldsymbol{V}$を回転することによって得られる。（$m \times m$）次の因子軸の変換行列を$\boldsymbol{T}$とすると，次のようにその関係を式で書くことができる。

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{VT} \tag{2}$$

一般的には，因子パターン行列に関してある種の関数f（$\boldsymbol{\Lambda}$）を設定し，これを最小化あるいは最大化することによって，変換行列が計算される（Browne, 2001）。

因子軸間の関係は次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} \tag{3}$$

この（$m \times m$）次の$\boldsymbol{\Phi}$は因子間相関行列であり，直交条件での回転では，この行列は単位行列なる。

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} \tag{4}$$

なお，因子軸の変換行列を斜交因子体系から清水（2014）で詳しく解説しているので，ここでは省略する。

主因子法あるいは最尤法から得られる$\boldsymbol{V}$は，数学的あるいは数理統計学的基準の下で推定された行列である。心理学的に因子を解釈する基準がThurstone（1935）の定義した単純構造である。この単純構造の結果を求めて，多くの解析的回転法が提案されている。その代表例がVarimax法であり，これを斜交の下でより単純な構造を実現させたのがPromax法であった。Bi-factor構造を仮定した解析的回転方法がJennrich & Bentler（2011）によるBi-factor法である。

ここでは，数多く提案されている解析的な回転方法を，ふたつの族と特殊な目的の下で提案された方法とに分類して，それらの基本的な考え方の概略を簡単に紹介してみることにする。

Orthomax族

解析的回転法は，因子負荷量の分散に着目するところから研究が進められた。例えば，直交回転として最もよく利用されてきたVarimax法は，因子ごとの分散を最大化することを目的とした回転法であっ

た。単純構造の回転の可能性を因子行列の要素である因子負荷量の偏差平方和最大とする工夫の流れの中で，Orthomax 族と呼ばれる一群の回転方法が提案されてきた。ここで，行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ の第 j 行第 k 列の要素を λ_{jk} とすると，この族は，次の関数 U（Orthomax 基準とも呼ばれる）を最大化することによって定義される（例えば，芝，1979; 服部，2011; 柳井など，1999　など）。

$$U=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}^{4}-\frac{w}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}^{2}\right)^{2} \tag{5}$$

Varimax 法は，この w の値が 1 の時である。$w = 0$ とすると Quartimax 法となる。この他，Biquartmax（$w = 1/2$），Equamax（$w = m/2$），Parsimax（$w = n(m - 1)/(n + m - 2)$，Factor Parsimony（n）などの直交回転法が，この族に含まれる。この基準を斜交の回転方法を包含するように改良した Crawford-Ferguson 族というより広い呼び方も使われることもある（Crawford & Ferguson, 1970）。

Oblimin 族

因子負荷量の因子間の積和を最小にする考え方が Carroll（1953）によって提案された。この発展系として，次の Q を最小化することによって定義された Oblimin 基準がある。

$$Q=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jl}^{2}\lambda_{jk}^{2}-\frac{w}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jl}^{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}^{2}\right)\right]\quad j\neq k \tag{6}$$

斜交を想定した基準この基準の下では，Quartmin（$w = 0$），Biquartimin（$w = 1/2$），Covarimin（$w = 1$）などの回転法があり，Oblimin 族と呼ばれることもある（Mulaik, 2011）。

仮説的回転

n 個の観測変数にある種の構造が仮定できる場合に，この構造へ因子軸を回転する方法が Procrustes 法として，Hurley & Cattell（1962）によって提案された。Hendrickson & White（1964）は，単純構造に近いが十分に満足できるというレベルの結果に達していない直交解の要素 λ_{jk} に着目し，この値を 4 乗することによって高い値と低い値を差別化した仮説的因子行列を構成する方法を，現在最も使用されている Promax 法として提案した（清水，2014）。先行する直交回転としては，Varimax 法を使用することが SPSS などでのデフォルトとなっている。このため，Gorsuch（1983）などの批判は，この使用方法の下では，Promax 法にもあてはまるといえそうである。

Bi-factor 回転

本稿が対象とする Bi-factor 構造は，実は，単純構造の定義には当てはまらない。n 個の項目全体にわたってひとつの一般因子を仮定した構造だからである。Holzinger & Swineford（1937）の定義を実際の回転にいて実現する方法として，Jennrich & Bentler（2011）は，一般因子と群因子とを回転において分離した Bi-factor 法を提案している。

彼らは，n 個の変数がゼロはない値から一般因子の相当する第 1 因子の値を推定し，残りの $m-1$ 列の因子行列に関して，次の関数の最小化を求める方法を検討している。

$$q\ min=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{k=l+1}^{m-1}\lambda_{jl}^{2}\lambda_{jk}^{2}\qquad j\neq k \tag{7}$$

この式からも明らかなようにこの方法は一般因子を除いた $m-1$ 因子に Oblimin 基準を適用したものとも考えることができる。

方法

本研究では，R におけるモンテカルロ法により，生成したシミュレーションデータを使って因子軸の解析的回転方法の比較・評価を行ってみることにする。モンテカルロ実験の実行においては Paxton, Curran, Bollen, Kirby, & Chen（2001）の手順に従った。

Step 1 Research question：モンテカルロにより，Bi-factor の因子構造をどの程度まで再現することができるかを，Varimax 法，Promax 法，Bifactor 法，Biquartimin 法，そして，Quartimin 法の 5 種類の代表的な回転方法を対象として検討してみることにした。再現の程度を評価する指標としては，推定で得られた因子パターンと因子間相関の平均値と標準偏差の値を使用することにした。

Step 2 Representative models：本研究の検討対象のモデルは，n 個の変数のすべてがある程度の因子パターンの値からなる一般因子と単純構造の $m-1$

個の群因子からなるBi-factor構造の因子モデルとした。回転前の因子行列$\boldsymbol{V}$は同一の方法で推定し，これに解析的回転法を適用して，因子パターン行列$\boldsymbol{\Lambda}$と因子間相関行列$\boldsymbol{\Phi}$を算出した。

Step 3 Specific experimental conditions：本研究では，5種類の回転方法に加えて，因子間相関の高低による違いが，回転結果に影響すると想定し，3種類の因子間相関行列を設定することにした。発生させるデータは$N=500$ケースとし，この数については，特別な条件は設定しなかった。

Step 4 Values of population parameters：変数の数を9とし，第1因子は全ての項目の負荷量が0.4の値からなる一般因子を想定した。群因子の数は3とし，第2因子から第4因子には0.7の値で負荷をする項目を3つずつ因子ごとに設定した。因子間相関では，一般因子と群因子とは独立とした。第2因子から第4因子の相関については，低い（モデル1），中程度（モデル2），そして，高い（モデル3），の3つを設定した（表1）。

Step 5 Software Package：乱数データの生成には，Rの{psych}パッケージのsim.structuralを使用した。sim.structuralは，表1の因子パターン行列および因子間相関から因子分析の母モデルを構成し，この母モデルの下で，対象者の数をNとして，乱数によりn変数の個別データを生成させる。なお，Rでは，擬似乱数発生器としてメルセンヌ・ツイスタを使用しており，優れた正規乱数を発生させることができるといわれている。

次のRスクリプトがデータ生成の命令であり，fxに表1の因子パターン行列が，Phiに表1の因子間相関行列のいずれかを入力して母モデルとした。

```
assign ("data.raw", sim.structural (fx, Phi, n =
N, raw = TRUE) $observed)
```

次に生成したデータからRで探索的因子分析を行う。Rには，多様な推定法を選択することができるfa{psych}と最尤法による推定を行うfactanal{psych}がある。最尤法は，現在，一般的によく用いられるようになってきた。しかし，本研究ではSpearmanやHolzingerらにより提起された一般因子を含む構造の分析の際に伝統的に用いられてきた主因子法（pa）によって分析を行うため，fa{psych}を用いることにした。

表1 母モデルの構成のための因子パターン行列と因子間相関行列

		因子1	因子2	因子3	因子4
因子パターン	変数1	0.4	0.7	0	0
	変数2	0.4	0.7	0	0
	変数3	0.4	0.7	0	0
	変数4	0.4	0	0.7	0
	変数5	0.4	0	0.7	0
	変数6	0.4	0	0.7	0
	変数7	0.4	0	0	0.7
	変数8	0.4	0	0	0.7
	変数9	0.4	0	0	0.7
モデル1の因子間相関行列	因子1	1	0	0	0
	因子2	0	1	0.1	0.2
	因子3	0	0.1	1	0.1
	因子4	0	0.2	0.1	1
モデル2の因子間相関行列	因子1	1	0	0	0
	因子2	0	1	0.4	0.5
	因子3	0	0.4	1	0.4
	因子4	0	0.5	0.4	1
モデル3の因子間相関行列	因子1	1	0	0	0
	因子2	0	1	0.6	0.7
	因子3	0	0.6	1	0.6
	因子4	0	0.7	0.6	1

Step 6 Executing the Simulations：各モデル（3つの母モデル）および各回転（5つの回転）についてそれぞれ500ケースの乱数を発生させた。なお，fa{psych}で因子分析を行う際の共通性の推定方法としてSMC法（Squared Multiple Correlations）がデフォルトに設定されている。今回の実験においては初期推定値を1からはじめて，繰り返して共通性を推定する方法を用いるため，SMC= FALSEとした。

```
assign ("FA", fa (get ("data.raw")), nf, fm =
"pa", rotate = rotate, SMC=FALSE))
```

因子軸回転では，rotateに5種類の方法に対応したfa{psych}で方法名を指定することにより，それぞれの因子分析を回転方法別に実行した。なお，3種類の母モデルを対象としたこの因子分析は1000回ずつ行った。

Step 7 File storage：Paxton et al.（2001）の実験では，300メガバイトのデータストレージが必要とされ，データ保管方法やデバイスの選択が，研究者の熟慮すべき検討課題の一つとしている。2014年現在

では，コンピュータ技術の進歩により，これはそれほど大きな問題とはならない。本研究では，演算時間の圧縮のため，生データの保存は行わず，結果のみを取得するようにプログラミングを行った。なお，実験に用いた生データについては，その再現ができるように，乱数発生の seed などの設定を行っている。

Step 8 Troubleshooting and verification：シミュレーションが完了した後に，格納されたデータおよびプログラミングが正確であったかのチェックが必要である。プログラムによって作成されたデータの数や，データサイズなどがその基準となる。因子の抽出の際に，共通性の値が 1.0 を越える Haywood case に遭遇することもある。本研究では，主因子法を使用したので，これを回避することができた。

fa{psych}からの実際の因子分析では，群因子の出力順番が Table 1 の母モデルと異なる現象が発生した。そこで，因子ごとに値の高い変数を確認し，母モデルの順に合わせるようにプログラムを組むことにより，この現象を回避する方策を立てた。その際，因子間相関の順もこれに合わせた。

Step 9 Summarizing results：モンテカルロ実験によって得られたデータの要約には主に記述的統計・図表・推測統計の 3 つの方法がとられる。本研究では得られた因子パターン行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ と因子間相関行列 $\boldsymbol{\Phi}$ の値の平均値と標準偏差とを算出した。

結果

Varimax 法，Promax 法，Bifactor 法，Biquartimin 法，Quartimin 法の 1000 回の乱数実験の結果（平均値と標準偏差）を表 2 から表 6 に掲載した。いずれの結果でも母モデルを完全に再現することはできなかった。総括的にみると，最も近い値を一般因子と 3 つの群因子そして因子間相関において示したのは，母モデル 1 の Biquartimin 法であった。母モデル 2 から母モデル 3 へと因子間相関が高くなると，一般因子の値が高くなり，群因子の因子パターンの値が低くなった。群因子の因子パターンだけに注目すると，Varimax 法，Promax 法，Quartimin 法での結果は，母モデルで設定した 0.7 に近い値を得ることができた。一般因子に関しては，Bifactor 法も Biquartimin 法に近い結果を示した。因子間相関に関しては，直交を条件とする Varimax 法と Bifactor 法では，当然のこととして計算されない。因子間相関が高くなる分の情報が，第 1 因子の因子パターンの値や，群因子のゼロとなるべき箇所での値に高くなる方向で反映されたようである。Quartimin 法では，一般因子の因子パターンは 3 つの母モデル間では大きな違いはみられず，本来はゼロである一般因子と群因子間での値が高くなる傾向を示した。以下では，各回転方法別に結果について検討を加えてみることにする。

表 2-1　Varimax 法（母モデル 1）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.046	*.158*	**.784**	*.035*	.121	*.033*	.154	*.033*
変数 2	.054	*.167*	**.782**	*.037*	.122	*.032*	.155	*.033*
変数 3	.055	*.167*	**.782**	*.039*	.120	*.032*	.153	*.033*
変数 4	.046	*.161*	.118	*.033*	**.789**	*.035*	.120	*.035*
変数 5	.054	*.176*	.119	*.032*	**.790**	*.036*	.119	*.032*
変数 6	.053	*.166*	.118	*.033*	**.791**	*.035*	.119	*.033*
変数 7	.055	*.172*	.155	*.032*	.121	*.037*	**.783**	*.040*
変数 8	.061	*.175*	.155	*.031*	.122	*.034*	**.783**	*.040*
変数 9	.052	*.168*	.153	*.032*	.122	*.034*	**.783**	*.041*

表 2-2　Varimax 法（母モデル 2）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.108	*.189*	**.727**	*.075*	.205	*.036*	.238	*.039*
変数 2	.116	*.192*	**.731**	*.071*	.206	*.034*	.237	*.038*
変数 3	.121	*.200*	**.726**	*.079*	.204	*.035*	.238	*.039*
変数 4	.091	*.170*	.194	*.036*	**.749**	*.059*	.196	*.035*
変数 5	.103	*.187*	.194	*.034*	**.749**	*.061*	.195	*.035*
変数 6	.110	*.191*	.196	*.036*	**.746**	*.067*	.194	*.034*
変数 7	.111	*.195*	.237	*.037*	.206	*.033*	**.729**	*.076*
変数 8	.118	*.190*	.237	*.038*	.206	*.035*	**.728**	*.074*
変数 9	.108	*.187*	.237	*.039*	.206	*.035*	**.730**	*.073*

表 2-3　Varimax 法（母モデル 3）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.192	*.199*	**.664**	*.110*	.261	*.043*	.290	*.054*
変数 2	.194	*.200*	**.661**	*.108*	.263	*.043*	.292	*.055*
変数 3	.193	*.195*	**.667**	*.109*	.262	*.042*	.290	*.052*
変数 4	.177	*.198*	.241	*.044*	**.698**	*.092*	.240	*.044*
変数 5	.182	*.204*	.239	*.044*	**.699**	*.098*	.240	*.044*
変数 6	.176	*.188*	.241	*.045*	**.701**	*.091*	.240	*.044*
変数 7	.194	*.196*	.292	*.052*	.263	*.043*	**.664**	*.105*
変数 8	.199	*.206*	.291	*.052*	.261	*.042*	**.664**	*.113*
変数 9	.195	*.203*	.290	*.054*	.264	*.042*	**.661**	*.112*

まず，Varimax 法の結果であるが，低い相関（母モデル 1）においては第 1 因子である一般因子を捕らえられなかった。群因子における因子パターンでは負荷しない部分に .1 程度の負荷が見られ単純構造を示しているとは言いがたい結果となった。中程度の相関（母モデル 2）では .1 と低いながらも一般因子の姿を捉えているようにも見えるが，行列全体に .1 ～ .2 程度の値であり，標準偏差の値も .2 弱あるいはその前後であるから，一般因子をとらえることができたとは言いがたい。高い相関（母モデル 3）においても中程度の相関と同じような結果を示した。群因子では，単純構造を得ることはできなかったが，3 つの母モデルともに因子パターンをみると，標準偏差の値も小さく，群因子を直交という因子間の条件の下では，それなりにとらえることができたといえそうである。

表 3-1　Promax 法（母モデル 1）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.053	*.177*	**.803**	*.080*	.000	*.026*	.001	*.028*
変数 2	.061	*.184*	**.797**	*.091*	.001	*.026*	.002	*.028*
変数 3	.065	*.186*	**.797**	*.095*	.000	*.027*	.001	*.028*
変数 4	.054	*.178*	.000	*.026*	**.799**	*.081*	.001	*.029*
変数 5	.064	*.192*	.001	*.026*	**.795**	*.092*	.000	*.026*
変数 6	.061	*.185*	.000	*.026*	**.803**	*.086*	.001	*.027*
変数 7	.062	*.187*	.002	*.028*	-.001	*.027*	**.795**	*.098*
変数 8	.067	*.198*	.002	*.027*	.001	*.026*	**.794**	*.099*
変数 9	.060	*.187*	.001	*.028*	.001	*.025*	**.797**	*.104*
因子 1	1.000	*.000*	.064	*.212*	.063	*.201*	.072	*.218*
因子 2	.064	*.212*	1.000	*.000*	.313	*.049*	.387	*.044*
因子 3	.063	*.201*	.313	*.049*	1.000	*.000*	.314	*.048*
因子 4	.072	*.218*	.387	*.044*	.314	*.048*	1.000	*.000*

表 3-2　Promax 法（母モデル 2）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.067	*.211*	**.766**	*.163*	.004	*.034*	.011	*.039*
変数 2	.084	*.237*	**.763**	*.182*	.005	*.034*	.077	*.038*
変数 3	.086	*.236*	**.756**	*.181*	.004	*.034*	.093	*.039*
変数 4	.062	*.196*	.004	*.037*	**.780**	*.142*	.060	*.036*
変数 5	.071	*.217*	.003	*.035*	**.775**	*.150*	.035	*.036*
変数 6	.079	*.221*	.005	*.037*	**.773**	*.156*	.026	*.035*
変数 7	.081	*.235*	.008	*.037*	.004	*.032*	**.762**	*.182*
変数 8	.083	*.224*	.010	*.040*	.006	*.033*	**.765**	*.171*
変数 9	.071	*.215*	.009	*.040*	.004	*.033*	**.769**	*.166*
因子 1	1.000	*.000*	.253	*.338*	.230	*.313*	.247	*.341*
因子 2	.253	*.338*	1.000	*.000*	.524	*.040*	.593	*.034*
因子 3	.230	*.313*	.524	*.040*	1.000	*.000*	.525	*.039*
因子 4	.247	*.341*	.593	*.034*	.525	*.039*	1.000	*.000*

表 3-3　Promax 法（母モデル 3）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.096	*.259*	**.715**	*.232*	.014	*.045*	.029	*.059*
変数 2	.091	*.256*	**.710**	*.224*	.016	*.044*	.030	*.060*
変数 3	.096	*.263*	**.716**	*.232*	.015	*.045*	.025	*.056*
変数 4	.086	*.241*	.014	*.051*	**.736**	*.198*	.011	*.049*
変数 5	.101	*.265*	.010	*.049*	**.734**	*.221*	.013	*.050*
変数 6	.084	*.235*	.013	*.051*	**.742**	*.197*	.012	*.051*
変数 7	.096	*.258*	.029	*.056*	.015	*.044*	**.712**	*.226*
変数 8	.100	*.272*	.027	*.055*	.012	*.044*	**.710**	*.236*
変数 9	.096	*.259*	.025	*.056*	.018	*.045*	**.710**	*.229*
因子 1	1.000	*.000*	.471	*.344*	.443	*.329*	.473	*.341*
因子 2	.471	*.344*	1.000	*.000*	.651	*.035*	.716	*.028*
因子 3	.443	*.329*	.651	*.035*	1.000	*.000*	.651	*.034*
因子 4	.473	*.341*	.716	*.028*	.651	*.034*	1.000	*.000*

Promax 法では，いずれのモデルにおいても，群因子では良好な因子パターンと群因子間の因子間相関の再現ができている。一般因子である第 1 因子については，平均は .1 程度と非常に小さな値となった。ただし，標準偏差の値が，母モデル 1 で .18 前後，母モデル 2 で .22 前後，母モデル 3 で .26 前後の値を示しており，ある程度のところは母モデルの .4 に近い値を得ることができたのかもしれない。母モデル 2 と母モデル 3 の一般因子と群因子との相関が .2 台や .4 台となった。群因子の因子パターンは，いずれのモデルでも母モデルの値に近い結果を示し，Varimax 法の結果よりも明確な単純構造を示した。Promax 法の目的がこの群因子に関しては実現したともいえる。

表 4-1　Bifactor 法（母モデル 1）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.537	*.150*	**.548**	*.246*	-.021	*.109*	-.014	*.097*
変数 2	.537	*.147*	**.551**	*.241*	-.020	*.108*	-.013	*.099*
変数 3	.535	*.145*	**.555**	*.239*	-.020	*.108*	-.014	*.099*
変数 4	.484	*.156*	-.021	*.126*	**.589**	*.249*	-.030	*.106*
変数 5	.487	*.160*	-.020	*.128*	**.590**	*.248*	-.033	*.107*
変数 6	.489	*.164*	-.022	*.131*	**.583**	*.254*	-.034	*.111*
変数 7	.541	*.151*	-.014	*.101*	-.012	*.123*	**.554**	*.228*
変数 8	.541	*.148*	-.012	*.098*	-.012	*.124*	**.559**	*.226*
変数 9	.538	*.145*	-.013	*.097*	-.010	*.123*	**.560**	*.224*

表 4-2　Bifactor 法（母モデル 2）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.652	*.087*	**.447**	*.193*	−.018	*.087*	−.016	*.100*
変数 2	.659	*.091*	**.437**	*.204*	−.023	*.094*	−.025	*.109*
変数 3	.657	*.091*	**.439**	*.199*	−.025	*.093*	−.023	*.104*
変数 4	.597	*.096*	−.026	*.105*	**.512**	*.193*	−.022	*.105*
変数 5	.600	*.101*	−.030	*.107*	**.510**	*.198*	−.027	*.113*
変数 6	.601	*.103*	−.031	*.110*	**.506**	*.199*	−.029	*.111*
変数 7	.659	*.090*	−.021	*.104*	−.024	*.093*	**.438**	*.200*
変数 8	.657	*.088*	−.020	*.103*	−.023	*.089*	**.440**	*.198*
変数 9	.654	*.087*	−.016	*.101*	−.020	*.088*	**.446**	*.196*

表 4-3　Bifactor 法（母モデル 3）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.722	*.059*	**.335**	*.173*	−.026	*.083*	−.026	*.108*
変数 2	.720	*.056*	**.349**	*.167*	−.019	*.079*	−.015	*.097*
変数 3	.723	*.059*	**.340**	*.174*	−.023	*.077*	−.024	*.110*
変数 4	.665	*.067*	−.032	*.105*	**.434**	*.174*	−.029	*.095*
変数 5	.667	*.069*	−.033	*.111*	**.431**	*.177*	−.031	*.107*
変数 6	.667	*.068*	−.033	*.100*	**.431**	*.173*	−.030	*.101*
変数 7	.720	*.058*	−.021	*.108*	−.021	*.080*	**.346**	*.171*
変数 8	.722	*.061*	−.026	*.112*	−.025	*.079*	**.343**	*.178*
変数 9	.720	*.056*	−.023	*.109*	−.020	*.078*	**.346**	*.169*

Bifactor 法では，一般因子については明確に捉えることができたと言えるが，母モデルの因子間相関が大きくなるにつれ，.4 をはるかに越える大きな値となった。その結果として，群因子の因子パターンの値が小さくなるという特徴がみられた。さらに群因子の標準偏差も大きい数値を示しており，因子パターンの推定値に幅が大きいといえそうである。因子間相関が低いモデル 1 の場合には，母モデルからみて，それほど悪い結果とはならなかった。

表 5-1　Biquartimin 法（母モデル 1）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	**.466**	*.258*	**.565**	*.285*	.014	*.131*	.068	*.114*
変数 2	**.466**	*.257*	**.571**	*.273*	.021	*.131*	.065	*.122*
変数 3	**.466**	*.259*	**.567**	*.279*	.020	*.134*	.051	*.123*
変数 4	**.455**	*.258*	.001	*.117*	**.561**	*.300*	.039	*.120*
変数 5	**.456**	*.258*	−.001	*.118*	**.564**	*.302*	.070	*.123*
変数 6	**.459**	*.263*	.001	*.122*	**.552**	*.308*	.043	*.121*
変数 7	**.474**	*.263*	.001	*.109*	.018	*.133*	**.551**	*.298*
変数 8	**.471**	*.261*	.006	*.112*	.018	*.129*	**.563**	*.287*
変数 9	**.475**	*.264*	.000	*.115*	.018	*.132*	**.546**	*.300*
因子 1	1.000	*.000*	.006	*.139*	.000	*.118*	.005	*.134*
因子 2	.006	*.139*	1.000	*.000*	.053	*.227*	.091	*.241*
因子 3	.000	*.118*	.053	*.227*	1.000	*.000*	.052	*.226*
因子 4	.005	*.134*	.091	*.241*	.052	*.226*	1.000	*.000*

表 5-2　Biquartimin 法（母モデル 2）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.628	*.139*	**.447**	*.253*	−.007	*.084*	−.015	*.106*
変数 2	.636	*.144*	**.438**	*.263*	−.014	*.100*	−.015	*.111*
変数 3	.633	*.142*	**.441**	*.257*	−.014	*.105*	−.013	*.104*
変数 4	.585	*.136*	−.017	*.108*	**.492**	*.255*	−.015	*.109*
変数 5	.590	*.141*	−.016	*.110*	**.488**	*.257*	−.019	*.123*
変数 6	.589	*.139*	−.014	*.106*	**.488**	*.259*	−.022	*.118*
変数 7	.638	*.140*	−.013	*.111*	−.011	*.107*	**.436**	*.260*
変数 8	.634	*.137*	−.016	*.102*	−.007	*.091*	**.439**	*.255*
変数 9	.634	*.140*	−.011	*.104*	−.006	*.111*	**.442**	*.257*
因子 1	1.000	*.000*	−.015	*.087*	−.010	*.073*	−.018	*.088*
因子 2	−.015	*.087*	1.000	*.000*	.060	*.244*	.130	*.277*
因子 3	−.010	*.073*	.060	*.244*	1.000	*.000*	.074	*.266*
因子 4	−.018	*.088*	.130	*.277*	.074	*.266*	1.000	*.000*

表 5-3　Biquartimin 法（母モデル 3）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.717	*.072*	**.315**	*.228*	−.020	*.094*	−.017	*.118*
変数 2	.714	*.070*	**.325**	*.232*	−.014	*.095*	−.013	*.102*
変数 3	.718	*.072*	**.315**	*.233*	−.018	*.093*	−.020	*.119*
変数 4	.665	*.081*	−.012	*.118*	**.404**	*.218*	−.012	*.115*
変数 5	.667	*.086*	−.017	*.121*	**.398**	*.228*	−.020	*.110*
変数 6	.667	*.082*	−.018	*.119*	**.400**	*.224*	−.014	*.109*
変数 7	.711	*.072*	−.011	*.113*	−.015	*.088*	**.337**	*.222*
変数 8	.715	*.073*	−.018	*.131*	−.017	*.103*	**.328**	*.228*
変数 9	.714	*.072*	−.014	*.114*	−.019	*.092*	**.329**	*.222*
因子 1	1.000	*.000*	−.014	*.046*	−.006	*.038*	−.015	*.047*
因子 2	−.014	*.046*	1.000	*.000*	.075	*.267*	.144	*.272*
因子 3	−.006	*.038*	.075	*.267*	1.000	*.000*	.067	*.259*
因子 4	−.015	*.047*	.144	*.272*	.067	*.259*	1.000	*.000*

Biquartimin 法では，どの母モデルでも，一般因子をしっかりととらえることができた。前にものべたように，因子間相関が低い場合には，因子間相関も含め，母モデルをほぼ復元することができたといえそうである。母モデル 2 から 3 へと因子間相関が高くなると，一般因子の値が高くなり，群因子の値が小さくなる傾向を示したが，因子間の値は，いずれの母モデルでもそれほど変わらなかった。Biquartimin 法と Bifactor 法とを比較すると，因子パターンおよび因子間相関の両方で大きな違いは見られない。Bifactor 法との違いとして因子間相関を捉えることが可能な点が Biquartimin 法の特徴といえそうである。

表 6-1　Quartimin 法（母モデル 1）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.096	*.265*	**.725**	*.228*	.008	*.034*	.009	*.037*
変数 2	.108	*.273*	**.717**	*.235*	.005	*.036*	.009	*.037*
変数 3	.107	*.272*	**.719**	*.234*	.005	*.036*	.006	*.037*
変数 4	.099	*.263*	.006	*.036*	**.726**	*.226*	.007	*.037*
変数 5	.113	*.285*	.006	*.036*	**.716**	*.244*	.005	*.036*
変数 6	.106	*.277*	.006	*.035*	**.721**	*.237*	.006	*.036*
変数 7	.107	*.271*	.008	*.038*	.005	*.035*	**.721**	*.234*
変数 8	.121	*.294*	.009	*.037*	.007	*.034*	**.706**	*.254*
変数 9	.101	*.266*	.007	*.038*	.007	*.036*	**.724**	*.229*
因子 1	1.000	*.000*	.377	*.253*	.360	*.260*	.382	*.257*
因子 2	.377	*.253*	1.000	*.000*	.294	*.050*	.366	*.048*
因子 3	.360	*.260*	.294	*.050*	1.000	*.000*	.295	*.049*
因子 4	.382	*.257*	.366	*.048*	.295	*.049*	1.000	*.000*

表 6-2　Quartimin 法（母モデル 2）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.098	*.257*	**.714**	*.226*	.012	*.041*	.017	*.045*
変数 2	.117	*.281*	**.703**	*.246*	.013	*.040*	.013	*.043*
変数 3	.124	*.285*	**.695**	*.251*	.012	*.040*	.015	*.045*
変数 4	.091	*.247*	.011	*.042*	**.723**	*.217*	.013	*.042*
変数 5	.116	*.282*	.011	*.040*	**.706**	*.246*	.011	*.043*
変数 6	.112	*.280*	.013	*.042*	**.707**	*.243*	.009	*.040*
変数 7	.118	*.281*	.014	*.045*	.011	*.039*	**.702**	*.246*
変数 8	.112	*.276*	.016	*.045*	.013	*.041*	**.703**	*.242*
変数 9	.101	*.261*	.015	*.045*	.011	*.040*	**.715**	*.230*
因子 1	1.000	*.000*	.493	*.217*	.471	*.219*	.493	*.216*
因子 2	.493	*.217*	1.000	*.000*	.497	*.048*	.571	*.047*
因子 3	.471	*.219*	.497	*.048*	1.000	*.000*	.500	*.049*
因子 4	.493	*.216*	.571	*.047*	.500	*.049*	1.000	*.000*

表 6-3　Quartimin 法（母モデル 3）の因子パターンと相関係数の平均と標準偏差

	因子 1		因子 2		因子 3		因子 4	
	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*	平均	*SD*
変数 1	.111	*.265*	**.692**	*.242*	.017	*.048*	.026	*.059*
変数 2	.109	*.263*	**.689**	*.240*	.020	*.048*	.028	*.061*
変数 3	.113	*.268*	**.693**	*.243*	.020	*.048*	.024	*.058*
変数 4	.112	*.268*	.020	*.051*	**.696**	*.240*	.017	*.050*
変数 5	.124	*.294*	.016	*.050*	**.685**	*.258*	.019	*.049*
変数 6	.104	*.252*	.017	*.051*	**.707**	*.226*	.018	*.052*
変数 7	.111	*.262*	.027	*.057*	.018	*.048*	**.691**	*.238*
変数 8	.124	*.284*	.025	*.054*	.018	*.049*	**.684**	*.256*
変数 9	.113	*.265*	.022	*.055*	.022	*.050*	**.689**	*.241*
因子 1	1.000	*.000*	.571	*.190*	.556	*.192*	.574	*.192*
因子 2	.571	*.190*	1.000	*.000*	.631	*.051*	.705	*.050*
因子 3	.556	*.192*	.631	*.051*	1.000	*.000*	.632	*.049*
因子 4	.574	*.192*	.705	*.050*	.632	*.049*	1.000	*.000*

Quartimin 法は，Promax 法と同じような結果となったが，同等あるいはそれ以上に良好な因子パターンおよび因子間相関の再現力を示した。母モデルでの因子負荷量が 0 に設定されている部分ではほぼ 0 に近い値が出ている。そして，全ての項目に .4 の負荷を設定した第 1 因子においては。1 の程度の負荷がすべての項目に見られ，この標準偏差の値も .28 前後であり，一般因子の存在を示唆する特徴的なパターンを確認することができた。とはいえ，この結果を Biquartimin 法と比べる一般因子の値が低く，この因子と群因子との相関については高すぎる傾向がみられた。

考察

探索的因子分析では，Varimax 法とこれに引き続く Promax 法が一般的な方法として使われてきた。多因子の単純構造が変数間に潜在している場合には，この方法はきわめて有効な方法であった。3 つの群因子に関しても，Promax 法は母モデルの構造をしっかりと再現することができた。しかしながら，Gorsuch（1983）や Comrey（1973）が一般因子の存在に対しては Varimax 法が適切ではないことを指摘しているように，一般因子の抽出には失敗しているといわざるを得ない。すなわち，変数間に潜在する構造が，本稿で検討してきたような Bi-factor 構造であった場合には，Orthomax 族の中でも特に伝統となってきた Varimax 法からの Promax 法は，因子軸の回転方法としては適切とはいえない。

母モデルの相関行列は $\boldsymbol{\Lambda\Phi\Lambda'}$ から構成される。この因子間行列 $\boldsymbol{\Phi}$ の相関の高さとは関係なく，Promax 法では，3 つの群因子についてだけは母モデルに近い単純構造としてとらえることができた。その一方で，一般因子として特定できなかった情報量が因子間相関の高さに表れたようである。特に，Quatimin 法の方が，この傾向が強かった。直交回転であった Varimax 法では，単純構造が失われ，母モデルの群因子でゼロとした要素での値が高くなった。

一般因子を見いだすという点では，直交の Bi-factor 法はその目的を実現したといえるかもしれない。母モデルが斜交であることによる情報量は，結果として，一般因子の値に反映されたようである。そして，一般因子の高さが，群因子の値を低くしたようである。このため母モデルの因子パターン行列を再現するには至らなかった。今回の結果で特筆すべきは，Biquartimin 法により Bi-factor 構造を再現できたことである。

実際のデータ解析の現場では，母モデルは構成概念のレベルで議論の対象に過ぎず，潜在する因子を探索することになる。今回の結果からいえることは，ひとつの回転方法で探索を終了させるべきではないということである。複数の回転方法を比較する中で，構成概念の検討を行うべきであり，その際には，少なくとも Orthomax 族と Oblimin 族のいくつかの方法を組みあせて回転を行い，それらの結果を比較・検討することが望ましいと考えられる。構成概念において Bi-factor 構造が想定できる場合には，今回の結果から，より適切な回転方法としては Biquartimin 法を推奨しておきたい。

ここでの結果は，変数の数を 9 とした非常に小さなモデルで検討したものに過ぎない。実際の研究ではもっと多くの数の変数と因子とを対象とすることになる。この研究での結論をそのままで適用できるかどうかについては，変数の数や因子パターンの値を多様に変えた大規模な乱数実験が必要であると考えている。その際，今回は 1000 回の繰り返しを行った。Paxton et al.（2001）は，500 回としているが，結論を導き出すのに最適な実行回数の検討も課題である。

回転方法に関しても，R の{psych}パッケージに限定した実験を行ったこともあり，5 種類だけを検討の対象とした。R の他のパッケージでは多様な回転方法が利用可能である。回転前の因子解に主因子法を用いた。これは，Holzinger が Bi-factor 構造に言及して以来，Bi-factor 研究では主因子法が用いられてきたことに従ったからであった。また，主因子法はまず，第一因子に大きく分散を置く。その特徴から Bi-factor モデルでは最尤法より適しているといえる。しかし，実際のデータに適応させると，最尤法の方が適合する可能性は否定できない。回転方法の理論的な詳細の検討と合わせて，これもまた，今後の研究の課題である。

最後に，bi-factor の表記に関して言及しておきたい。Holzinger & Swineford（1937）や Holzinger & Harman（1938），Holzinger & Swineford（1939）は “bi-factor” と表記していた。ところが，Holzinger（1938）や Holzinger & Harman（1939）は “bifactor” としている。この結果，その後の bi-factor/bifactor 研究の検索には，このふたつの表記を使わざるを得ないことになった。Holzinger を中心とした研究が展開されてきた時代からこのテーマでは空白があったようで，2011 年頃より研究が再度増え始めた。現時点で（2014 年 10 月 25 日）google scholar で検索を行ってみると “bi-factor” が 652 件，“bifactor” が 1270 件となった。なお，この日本語訳を，浅野（1972），印東（1950），堀（2003）では「双因子」としているが，本稿では，bi-factor を表記として使用した。関連した用語として，「群因子（group factor）」も Holzinger & Swineford（1937）に従って使用した。これも「特性因子（trait factor）」と表記されることもある。

引用文献

青木貴寛（2014）．探索的双因子分析―R を用いた双因子の探求―関西大学大学院心理学研究科心理学叢誌，**12**，1-11.

浅野長一郎（1972）．因子分析法通論　共立出版

Browne, M. W. (2001). An overview of analytic rotation in exploratory factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, **36**, 111-150.

Crawford, C. B, & Ferguson, G. A. (1970). A general rotation criterion and its use in orthogonal rotation. *Psychometrika*, **35**, 321-332.

Comrey, A. L (1973). *A first course in factor analysis.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.（芝　祐順（1979）．因子分析法入門　サイエンス社）

Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis.* (2nd ed.) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

服部　環（2011）．心理・教育のための R によるデータ解析　福村出版

Harman, H. H. (1976). *Modern factor analysis.* (3rd ed.) Chicago, IL: University of Chicago Press.

Hendrickson, A. E., & White, P. O. (1964). Promax: A quick method for rotation to oblique simple structure. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **17**, 65-70.

Holzinger, K. J. (1938). Relationships between three multiple orthogonal factors and four bifactors. *Journal of Educational Psychology*, **29**, 513.

Holzinger, K. J., & Harman, H. H. (1939). Chapter XIII: Factor Analysis. *Review of Educational Research*, **9**, 528-531.

Holzinger, K. L., & Swineford, F. (1937). The Bi-factor method. *Psychometrika*, **2**, 41-54.

Holzinger, K. J., & Swineford, F. (1939). A study in factor analysis: the stability of a bi-factor solution. *Supplementary Educational Monographs,* **48**, Chicago, Ill.: The University of Chicago.

堀　啓造（2003）．因子数決定法の検討 Holzinger and

Swineford（1939）の知能データをもとにして（2003/03/24），<http://fourier.ec.kagawa-u.ac.jp/~hori/yomimono/pa2.html>

Hurley, J. R., & Cattell, R. B.（1962）. The Procrustes program: Producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, **7**, 258–262.

印東太郎（1950）. Holzinger, Harmanの因子分析 心理学研究，**20**, 38–46.

Jennrich, R. I., & Bentler, P. M.（2011）. Exploratory bi-factor analysis. *Psychometrika*, **76**, 537–549.

Jennrich, R. I., & Bentler, P. M.（2012）. Exploratory bi-factor analysis: The oblique case. *Psychometrika*, **77**, 442–454.

Mulaik, S. A.（2010）. *Foundations of factor analysis*（*2nd ed.*）. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

Reise, S. P.（2012）. The rediscovery of Bifactor measurement models. *Multivariate Behavioral Research*, **47**, 667–696.

Reise, S. P., Moore, T. M., & Haviland, M. G.（2010）. Bifactor models and rotations: exploring the extent to which multidimensional data yield univocal scale scores. *Journal of personality assessment,* **92**, 554–559.

芝 祐順（1979）．因子分析法（第2版） 東京大学出版会

清水和秋（2014）．共通因子空間における観測変数の布置．関西大学心理学研究．**5**, 1–9.

Spearman, C. E.（1904）. “General intelligence,” objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, **15**, 201–292.

Thurstone, L. L.（1934）. The vectors of mind. *Psychological Review*. **41**, 1–32.

Thurstone, L. L.（1935）. *The vectors of the mind: Multiple factor analysis for the isolation of primary traits*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

柳井晴夫・繁桝算男・前川眞一・市川雅教（1990）．因子分析―その理論と方法― 朝倉書店