

# 共通因子空間における観測変数の布置

清水 和 秋 関西大学社会学部

## Configuration of Measurement Variables in the Common Factor Space

Kazuaki SHIMIZU (Faculty of Sociology, Kansai University)

Since factors in common factor space are in generally correlated, two dimensional orthogonal coordinate system on the graphical display of a personal computer is not suitable to present the observed variables in it. The reference axis is defined as the independent vector of the hyper-plane constructed the other dimensions. The graphical rotation methods on the reference axis such as the Promax and the Rotoplot are reviewed. The relationships between factor axis and reference axis are also discussed.

**Key words:** factor analysis, rotation, reference structure, graphical presentation, R

### はじめに

探索的因子分析は次の手順で行われる。因子数の決定、因子解の推定（共通性の推定も含む）、そして、因子軸の回転である。因子数の決定には、1.0以上の固有値を目安とする Kaiser-Guttman 基準が使われることはなくなり、固有値の減衰を手がかりとするスクリー (Cattell, 1966) や平行分析 (Horn, 1965) が使われるようになってきた。因子解の推定では、主因子法に加えて、分析対象者の数が十分に大きければ最尤法が使用されるようになってきた。そして、因子軸の解析的回転では、Varimax 法を下にして単純構造へと斜交回転する Promax 法が広く使われるようになってきた。このような動きは、PCで利用できる統計解析ソフトの普及によるところが大きいと考えられる。しかしながら、柳井 (1999) が指摘するように、因子分析法の適切なオプションをソフトが準備しているにもかかわらず、デフォルト設定のままに分析を行うという混乱もみられる。手計算での作業量が膨大な 1930 年代に、因子解の近似

解を計算する方法として提案された項目分析の IT 相関係数がある (清水, 2011)。残念なことに 21 世紀に入っても、より適切な推定値である因子分析結果とこの IT 相関係数を併記している報告に接することがある。

因子分析のような統計的解析の方法論は、常に新しい展開をみせている。因子軸の回転の方法に関しては、勾配射影アルゴリズム (Gradient Projection Algorithm) が注目されている (Mulaik, 2010; 福中, 2012)。この新しい成果は、短いタイムスパンで Psych (Revelle, 2013) や GPA factor rotation (Bernaards & Jennrich, 1913) などの R パッケージとして提供されるようになってきた。因子軸の回転では、このような進展がみられにもかかわらず、ベストな回転方法が確立されているわけではない。あくまでもベターな方法という段階にあるといわざるを得ない。

解析的回転は、主に因子軸の体系の下で行われてきた。Thurstone (1935) による単純構造は因子軸の体系の下で行われたものではなく、2次元でのグ

ラフ上での手作業での回転に際して、準拠軸において提案されたものであった。具体的には、対象となる次元を除いた多次元を一つの超平面とし、これとは直交した垂線として定義される準拠軸（ベクトル）を立て、この超平面と準拠軸との2次元座標軸の上で観測変数の共通因子空間における布置を描く方法であった。Rotoplot法 (Cattell, 1978; Cattell & Foster, 1963; 辻岡・藤村, 1975) は、この考えの下で作成されたものであり、久本 (2003) は Excel で作成している。Promax 法 (Hendrickson & White, 1964) は、本来は準拠構造で回転方法であり、Cattell 研究室の伝統を引き継いだ辻岡研究室では、FORTRAN で作成された Promax 法 (藤村・清水・村山・長尾, 1975) での回転をさらに改善することを目的として Rotoplot が使われていた (辻岡, 1975)。

本稿では、Promax 法の式の展開を R のスクリプトで行い、2次元の座標軸で観測変数の準拠構造の値をプロットすることの有効性について議論してやることとする。

### 観測変数の布置 (configuration)

因子分析では初期の解は数学的あるいは数理統計学的基準から、主因子法あるいは最尤法により推定される。この結果からでは因子を特定することができないことに気がついた Thurstone (1935) は、超平面という概念を因子の回転に導入した。Figure 1 は、主因子解の近似値として彼が計算したセントロイド解 (3 因子) の中で2次元と3次元をプロットした図である。この図には、彼にあわせて、3つの変数群に A, B, C の記号を追加している。そして、A から B, B から C, そして C から A への3つ線も

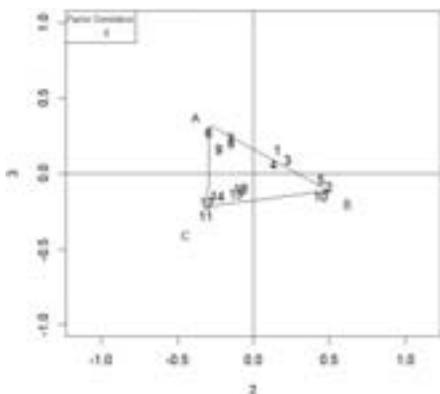


Figure 1 Thurstone (1935) のセントロイド解の布置図

同じように書き込んでいる。Thurstone は、この3つの線に着目し、これらの3つの変数群ごとに単純構造となる因子を特定することを目的としたグラフ上での因子の回転方法を提案している。

因子の数を  $m$  とすると、対象となる次元を除いた  $m-1$  の空間を超平面として、この平面からの垂線を対象となる準拠軸とし、この軸と観測変数との関係が準拠構造である。Figure 2 の横軸が超平面であり、この平面内には対象となる軸に高い値を示さない観測変数が取まっていると想定している。なお、この超平面は完全にゼロの線上にあるのではなく、ある程度の範囲 ( $\pm 0.1$  あるいは  $\pm 0.2$ ) として定義される。

この図では、変数群 A は、超平面からの垂線 (準拠軸) から少しだけ外れている。この準拠軸を右下へ少し傾けると変数群 A に準拠軸が通ることになる。実際のこの操作は、Rotoplot 法では、超平面の角度を右に下げる方向で傾けることによって行われる。

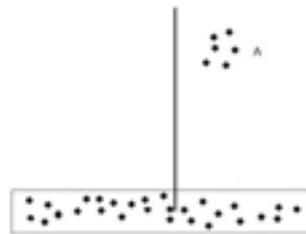


Figure 2 超平面と準拠軸

因子軸と準拠軸そして変数との関係については、清水 (1978, 2003) でまとめたものを Figure 3 として引用してみることにする。 $m$  次元の多次元の姿を描くことは困難なので、ここでは第  $p$  と第  $q$  との2つの次元を取り出し、因子軸を  $F$ 、準拠軸を  $R$  と表している。観測変数は1つだけを取り出し、 $Z_j$  と表示した。この図では、 $R_p$  は  $F_q$  の垂線として  $90^\circ$  の角度にあり、 $R_q$  は  $F_p$  に対して、同じく直交の関係にある。

$F_q$  を超平面とし、この垂線が  $R_p$  とする。変数から因子軸あるいは準拠軸に直角におろされた線の接点が、この変数の軸との相関となる。この値は、因子分析では、構造と呼ばれる。因子  $F_p$  における因子構造は  $OA$  で、因子パターンは  $OB$  である。準拠軸  $R_p$  における準拠構造は  $OC$  であり、準拠パターンは  $OD$  である。因子パターンと準拠構造との間には、逆

に準拠パターンと因子構造との間には比例関係がある。なお、 $\cos \alpha$ が  $F_p$  と  $F_q$  との因子間相関係数であり、 $\cos \beta$ が  $R_p$  と  $R_q$  との準拠軸間相関係数である。そして、 $\cos \gamma$ が因子軸  $F_p$  と準拠軸  $R_p$  との相関係数となる。

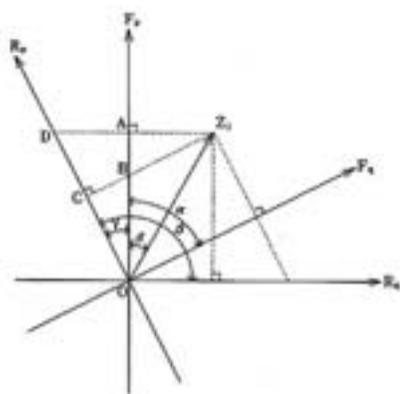


Figure 3 観測変数  $Z_j$  の因子軸と準拠軸への投影と相関

### Promax 法：4 種類の斜交因子行列

Hendrickson & White (1964) が提案した Promax 法は、よく知られているように Procrustes 法 (Hurley & Cattell, 1962) を応用して単純構造の因子を準拠構造 (reference structure) において求めようとした斜交回転方法である。この方法が前提条件としていることは、単純構造に近い直交を条件として解析的に回転した因子負荷行列が得られていることである。このような直交回転方法の代表的な例が Varimax 法である。

Procrustes 法は、回転の対象となる因子行列を仮説として設定した行列との最小化を最小二乗法により求めようとする方法である。Promax 法の仮説的因子行列  $V_p$  は、直交でかつ単純構造にかなり近づいたと仮定することができる行列の要素を次のように計算することで定義される。

$${}_p v_{ij} = \frac{v_{ij}^{p+1}}{v_{ij}}$$

ここで、直交の因子行列  $V$  の  $i$  行  $j$  列の要素を  $v_{ij}$  と表す。なお、この値は絶対値とする。通常、 $p$  には、Hendrickson & White (1964) に従い、4 が与えられることが多く、直交解の因子負荷量は 1.0 以下であるので、 ${}_p v_{ij}$  の小さな値はゼロに近づき、大きな値が強調されることになる。

直交解 ( $V$ ) の因子軸を回転させることによって  $V_p$  との最小化をはかるために、変換行列を  $T$  とし、次の関数を定義する。なお、各因子行列の次数は (観測変数  $\times$  因子数)、各変換行列の次数は (因子数  $\times$  因子数) とする。

$$tr(E'E) = tr[(V_p - VT)'(V_p - VT)]$$

この式を  $T$  に関して、偏微分し、その結果をゼロとおき、整理すると  $T$  は次の式で計算することができる。

$$T = (V'V)^{-1}V'V_p$$

Hendrickson & White (1964) は、 $V_p$  を仮説的な準拠構造行列とし、この  $T$  を次のようにして、準拠軸の変換行列を計算することを提案している。

$$T_r = TD_r$$

ただし、 $D_r = \text{diag}(TT)^{-1/2}$  である。

以上から、準拠軸間相関行列は  $C_r = T_r'T_r$  とし、準拠構造行列は  $V_{rs} = VT_r$ 、準拠パターン行列は  $V_{rp} = VC_r^{-1}$  とし計算することができる。

準拠軸は、因子軸によって定義される超平面に直交に立てられた軸である (Thurstone, 1935)。この定義により、Figure 3 でも説明したように、因子軸と準拠軸とは直交の関係となる。この2つの軸の体系間で対応する相関を対角項にもつ行列を  $K$  とし、因子軸の変換行列を  $T_f$  と表すと、清水 (1978, 2003) が展開しているように、これらの関係は次のように整理することができる。

$$K = T_f'T_r \text{ あるいは } K = T_r'T_f$$

$$T_f = (T_r')^{-1}K \text{ あるいは } T_r = (T_f')^{-1}K$$

この  $K$  の要素は、準拠軸の変換行列  $T_r$  の各列ベクトルのノルムが 1 となるように計算されたものでもある (芝, 1979)。上の展開では  $D_r$  に相当し、 $K = D_r$  と書くこともできる。これは準拠軸間の相関行列あるいは因子間の相関行列から、次のように計算できる。

$$K = \text{diag}(C_r)^{-1/2} \text{ あるいは } K = \text{diag}(C_p)^{-1/2}$$

これらの関係から因子間相関行列は  $C_f = T_f'T_f$ 、因子構造行列は  $V_{fs} = VT_f$ 、そして準拠パターン行列は  $V_{fp} = VC_f^{-1}$  とし計算することができる。

以上では、準拠軸での回転を中心として式の展開をおこなってきた。芝 (1979) は、因子間相関行列と因子パターン行列が与えられれば、準拠構造行列を計算できることも紹介している。その場合、まず、 $K$  を因子間相関行列から  $K = \text{diag}(C_f)^{-1/2}$  により計算する。次に、 $V_{rs} = V_{fp}K$  により準拠構造行列を得ることができる。なお、ここで紹介してきた準拠軸を芝

(1979) は相反系という用語で説明している。

次に、斜交4因子行列の相互関係を清水 (1978) に従って整理しておくことにする。

$$V_{rs} = VT_r = V_{rp}C_r = V_{fs}C_r^{-1}K = V_{fp}K$$

$$V_{fs} = VT_f = V_{fp}C_f = V_{rs}C_r^{-1}K = V_{rp}K$$

$$V_{rp} = V(T_r')^{-1} = V_{rs}C_r^{-1} = V_{fs}K^{-1} = V_{fp}C_fK^{-1}$$

$$V_{fp} = V(T_f')^{-1} = V_{fs}C_f^{-1} = V_{rs}K^{-1} = V_{rp}C_rK^{-1}$$

このように、初期の直交行列に変換行列をかけると、因子軸でも準拠軸でも構造行列が得られる。

Procrustes 法や Promax 法は、 $E = V_p - VT$  という形式を前提としている。これは結果として、上で整理した式からも明らかなように、準拠構造行列を求めるというやり方をとっている。因子の解釈は因子パターンで行われるにもかかわらず、準拠構造を対象にした最小二乗解を求めることには批判もある。Mulaik (1972, 2010) は、因子パターン行列を最小化の対象とする方法を紹介している。この場合の最小化の関数は、次のように定義される。

$$tr(E'E) = tr[(V_p - V(T_f')^{-1})'(V_p - V(T_f')^{-1})]$$

この方法での解の計算では、繰り返しによる最小化を行うことになる (Mulaik, 1972)。このような提案はあるいが、いずれの方法でもほぼ同じ結果を得ることができる。そして、因子分析結果の解釈を行う因子パターン行列と準拠構造行列とは行列  $K$  により簡単に変換できることも指摘しておきたい。

### Promax 法による回転の例と R スクリプト

Thurstone (1935) のセントロイド解を対象に、R を使って Varimax 法で回転し、さらに Promax 法で計算してみることにする。ここで使用するデータは、因子分析の最も古典的なテキスト (Thurstone, 1935) から引用した (Table1)。この変数は 15 の心理テスト (能力) に関するものであり、第 1 因子にはすべての観測変数が高い値を示している。この第 2 因子と第 3 因子の布置図であった Figure 2 をみると、表の第 2 因子で正の値を示しているのが変数群 B で、負の値を示しているのが変数群 C である。変数群 A は、第 3 因子で正の値を示している。このように低い値ながら読み取ることはできる情報もあるが、このままではこの 3 つの因子を解釈することはできない。

Thurstone はその後の著作の中でも configuration という言葉を繰り返し使用している。共通因子空間での観測変数の布置という意味であり、Figure 1 の

Table 1 セントロイド解 (Thurstone (1935, P. 168))

変数名	第 1 因子	第 2 因子	第 3 因子
10	0.642	0.443	-0.150
2	0.579	0.499	-0.090
5	0.561	0.449	-0.041
3	0.712	0.228	0.092
4	0.633	0.134	0.061
1	0.685	0.159	0.157
8	0.529	-0.144	0.207
7	0.559	-0.146	0.233
9	0.546	-0.222	0.162
6	0.585	-0.293	0.274
15	0.475	-0.112	-0.132
14	0.428	-0.235	-0.149
17	0.619	-0.303	-0.194
11	0.598	-0.313	-0.272
18	0.436	-0.084	-0.099

観測変数の 3 つの群の位置関係のことである。因子分析の手順の 2 番目として、共通因子空間の大きさは因子解の推定として確定している。この空間内での観測変数のベクトルは共通性として、これも確定している。Table 1 にあるようにこの空間の 3 次元の軸は初期因子解 (ここではセントロイド) によって定義されたものである。Thurstone は、この空間を 3 つの群に対応した因子軸として、グラフ用紙の上での描く方法を手計算による計算の手順とともに考案した (Cattell, 1954)。そして、超平面からの垂線としての準拠軸を定義し、この準拠構造を対象にして単純構造の原理を提案した (Mulaik, 1972; 清水, 2003; 芝, 1979)。

Rotoplot 法は、コンピュータでグラフ上での回転を再現させたソフトである (Cattell, 1978)。これを使って、Thurstone (1935) が行った回転の道をたどることもできるが、ここでは、解析的な回転によって、Table1 の因子解から得られる布置図を探ってみることにする。そして、R での書法についても、そのスクリプトを示しながら、解説を加えてみることにする。

### スクリプト 1: 準備 (ライブラリと 2 次元プロットの スクリプト, データの読み込み

```
### Promax Hurley & Cattell (1966)
### scripted by Kazuaki Shimizu 2014.1.1
# nf 因子の数
# nv 変数の数
#####
```

```
library (psych)
library (GPArotation)
source ("factor_plot.R")
#### 回転対象の行列 (直交解：主因子解あるいは最尤解) の入力
Vo <- read.table("T1935p167.csv", sep=",", header =
  T, row.names=1)
Vo <- as.matrix (Vo, nrow = nv, ncol = nf)
nv <- nrow (Vo)
nf <- ncol (Vo)
mvnf <- nv*nf
V <- matrix (1:mvnf,nrow = nv, ncol = nf)
Vp <- matrix (1:mvnf,nrow = nv, ncol = nf)
```

スクリプト 2：Varimax 回転と大きな値を負で示す  
因子の確認と正負の逆転処理

```
###
### Varimax by GPArotation
###
Vgpa <- GPForth (Vo, Tmat = diag (ncol (Vo)),
  normalize = FALSE, method = "varimax")
Vv <- Vgpa$loadings
for (k in 1:nf)
| porm = 0.0
  for (j in 1:nv)
    | porm = porm + Vv[j, k] |
    if (porm < 0.0)
      | for (j in 1:nv)
        | Vv [j, k] <- Vv[j, k]*-1 |
      | |
    | |
V <- Vv
```

次の Figure 4 から Figure 6 が, GPArotation の Varimax 回転で得られた結果である。Varimax 法は

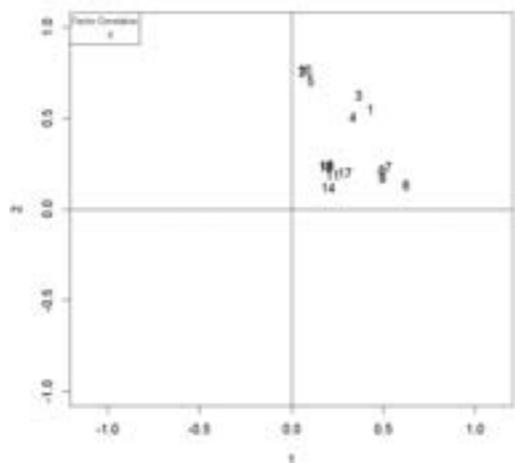


Figure 4 Varimax 解の第 1 因子と第 2 因子の 2 次元  
布置図

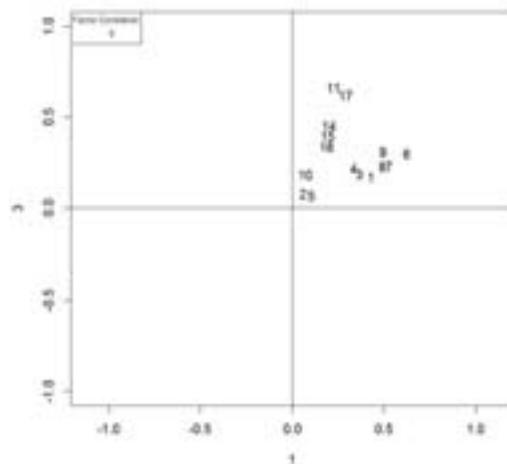


Figure 5 Varimax 解の第 1 因子と第 3 因子の布置図

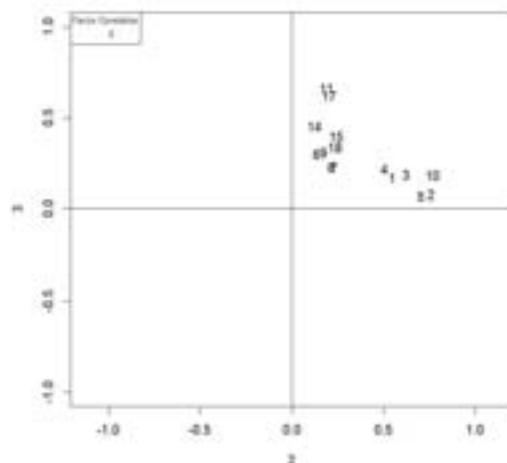


Figure 6 Varimax 解の第 2 因子と第 3 因子の布置図

直交を条件とした解析的回転である。このため、2次元の直交座標軸でこの負荷量を描くことは簡単である。これらの図をみると、観測変数群の中心に因子軸が通っているとはいえない。直交という制約による結果といえる。

スクリプト 3：Promax 法 (直交解の値を 4 乗) による準拠軸の変換行列の計算

```
#### 直交解 (Varimax) の負荷行列の要素の絶対値を 4 乗
p <- 4 + 1
for (i in 1:nv)
| for (j in 1:nf)
  | absv = abs (V[i,j])
  | Vp[i, j] = absv^p/absv |
```

```
###
### 最小二乗法により準拠軸の変換行列を計算
###
T <- solve(t(V)%*%V)%*%t(V)%*%Vp
DD <- (t(T)%*%T)
Dr <- diag(1:nf)
for (k in 1:nf)
  {Dr[k, k] <- 1/sqrt((DD[k, k]))}
Tr <- T%*%Dr
```

スクリプト4：準拠軸変換行列  $T_r$  から  $C_n$ ,  $K$ ,  $C_f$ ,  $T_f$ ,  $V_{rs}$ ,  $V_{fs}$ ,  $V_{rp}$ ,  $V_{fp}$  を計算

```
Cr <- t(Tr)%*%Tr
D <- diag(1:nf)
D <- 1/sqrt(diag(solve(Cr)))
nfnf <- nf*nf
K <- matrix(1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
for (i in 1:nf)
  {for (j in 1:nf)
    {K[i, j] <- 0.0}
    K[i,i] <- D[i] }
Cf <- K%*%solve(Cr)%*%K
Tf <- solve(t(Tr))%*%K
Vrs <- V%*%Tr
Vfs <- V%*%Tf
Vrp <- Vrs%*%solve(Cr)
Vfp <- Vfs%*%solve(Cf)
```

スクリプト5：2次元布置図（準拠構造行列）の作成（第1因子と第2因子）

```
factor_plot ( 1, 2, Vrs, Cf)
```

このスクリプトでは、関数 (factor\_plot) へ4つの引数を受け渡している。最初の2つが図示する因子の番号であり、次が準拠構造行列である。最後の因子間相関行列は、布置図の右上に因子間相関の値を表示するためである。この1と2を変更することで布置させる因子を変えることができる。

スクリプト6：2次元プロット作成のR関数

factor\_plot

```
## Two dimensional Plotting
factor_plot <- function (p1,p2,Vfp,Cf)
{
##### 因子パターンの plot
##### 因子 p1 × 因子 p2
cf_v <- round (Cf [p1,p2] ,2)
plot (Vfp [,p1] ,Vfp [,p2] , asp = 1,type = "n",
      xlim = c (-1, 1) , ylim = c (-1, 1) ,
      xlab = p1, ylab = p2,
```

```
main = "Reference Structure Plotting")
abline (h = 0,v = 0)
text (Vfp [,p1] ,Vfp [,p2] ,labels = row.names (Vfp))

legend ( "topleft",legend = cf_v , title = "Factor
Correlation", cex = 0.7,
        text.col = "green4", box.col = NULL )
}
```

以下の Figure 7 から Figure 9 が Promax 法から得られた準拠構造行列の布置図である。Varimax 法による直交回転で得られた図と比較すると、この結果はより単純構造に近いと判断することができる。なお、この表示法では、回転の対象とする因子を第1因子とすれば、第2因子の座標軸が (m-1) の超平面と考えることになる。

ここでもし、Varimax の結果をより単純構造を求めて回転させてみると想定すると、Figure 4 の第2因子の軸から直角に第1因子があるとして、この第2因子の軸（超平面）を右側（マイナス側）へ少し下げると、第1因子の変数群 B にこの超平面からの垂線が新しい第1因子として通ることになる。今度は、逆に第1因子の軸を超平面として、これをマイナス方向に傾けると変数群 B への新しい垂線すなわち第2因子へと軸を回転させることができる。この結果、第1因子と第2因子の因子間相関は正の方向で高くなる。Figure 7 は Promax 法でこのように回転した結果の布置図と考えることもできる。

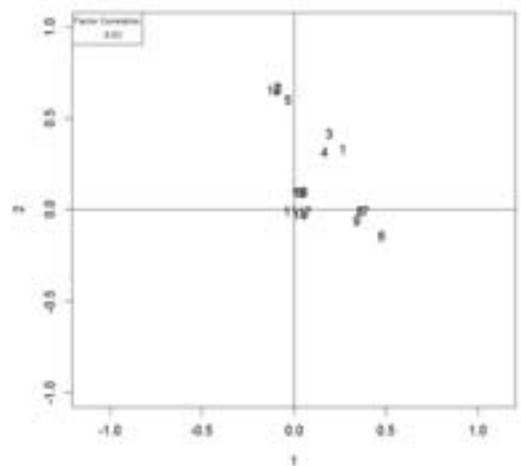


Figure 7 Promax 解（準拠構造）の第1因子と第2因子の布置図

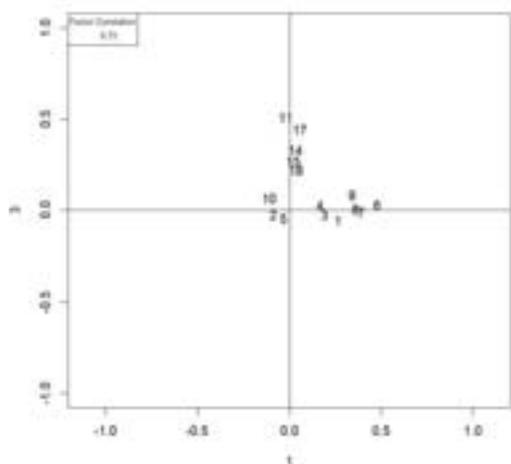


Figure 8 Promax 解（準拠構造）の第1因子と第3因子の布置図

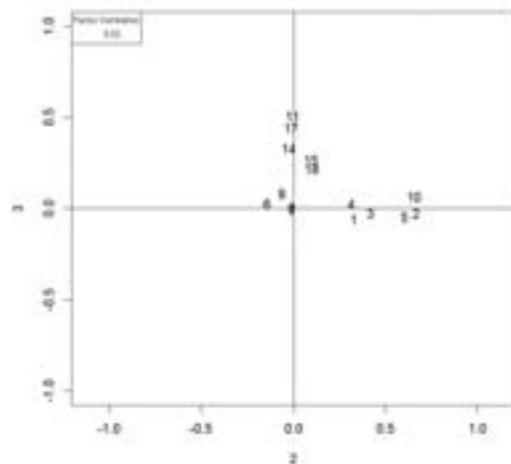


Figure 9 Promax 解（準拠構造）の第2因子と第3因子の布置図

### スクリプト7：出力とファイル出力

Rで計算結果を出力するには、Rコンソール画面であれば、対象となる変数名を記述すればよい。あるいはcsv形式でファイルへの出力する場合には、次のように記述することができる。

```
Vfp
Vrs
Tr
Tf
Cf
write.csv (Vfp, file="factor_pattern.csv", append = FALSE)
```

```
write.csv (Vrs, file="referene_structure.csv", append = FALSE)
write.csv (Tr, file="reference_transformation.csv", append = FALSE)
write.csv (Tf, file="factor_transformation.csv", append = FALSE)
write.csv (Cf, file="factor_correlation.csv", append = FALSE)
```

### スクリプト8：行列計算

Rでは、行列計算は簡潔に記述することができる。ここでは上で使った計算だけを示す。

```
行列の積  $A=BC$  A <- B%*%C
逆行列の計算  $A^{-1}$  solve (A)
行列の転置  $B'$  t (B)
```

### スクリプト9：斜交解のCfとVfpからVrsを計算する方法

```
D <- diag (1:nf)
D <- 1/sqrt (diag (solve (Cf)))
nfnf <- nf*nf
K <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
for (i in 1:nf)
{ for (j in 1:nf)
{ K [ij] <- 0.0}
K [ii] <- D [i] }
Vrs <- Vfp%*%K
```

ここでは、因子パターン行列と因子間相関行列は既知としている。因子の数mもnfとしてこれも既知としているので、前処理としての回転やファイルからの入力と関連する変数の定義が必要である。

### スクリプト10の1：Rotoplotの計算の準備

```
source ("factor_plot.R")
Vo <- read.table ("T1935p167.csv", sep=",", header = T,row.names=1)
Vo <- as.matrix (Vo, nrow = nv, ncol = nf)
nv <- nrow (Vo)
nf <- ncol (Vo)
nfnf <- nf*nf
To <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
S <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
T <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
Tr <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
K <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
Cr <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
Tf <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
Cf <- matrix (1:nfnf,nrow = nf, ncol = nf)
nvnf <- nv*nf
```

```
Vrs <- matrix (1:nvnf,nrow = nv, ncol = nf)
Vfp <- matrix (1:nvnf,nrow = nv, ncol = nf)
Vfs <- matrix (1:nvnf,nrow = nv, ncol = nf)
for (i in 1:nf)
  { for (j in 1:nf)
    { To [i,j] <- 0.0
      S [i,j] <- 0.0 }
    To [i,i] <- 1.0
    S [i,i] <- 1.0 }
```

Rotoplot の計算では、変換行列にシフト行列（超平面の変換数値から構成）をかけることで行われる。ここでは、変換を行わないので、初期の変換行列（To）もシフト行列（S）も単位行列としている。直交解である1つの因子を対象として正負を逆転する場合には、この因子の対角項の値を-1.0とし、ほかを1.0として計算することもできる。なお、スクリプトにある matrix は、以下の計算で使用すること、そして、行列の大きさを定義するための記述である。

スクリプト 10 の 2 : Rotoplot で  $K$ ,  $T_r$ ,  $V_{rs}$ ,  $C_r$ ,  $T_f$ ,  $C_f$ ,  $V_{fs}$ ,  $V_{fp}$  を計算

```
T <- To%%S
D <- diag (1:nf)
D <- 1/sqrt (diag (solve (t (T) %%T)))
for (i in 1:nf)
  { for (j in 1:nf)
    { K [i, j] <- 0.0 }
    K [i, i] <- D [i] }
Tr <- T%%K
Vrs <- Vo%%Tr
Cr <- t (Tr) %%T
Tf <- solve (t (Tr)) %%K
Cf <- t (Tf) %%Tf
Vfs <- Vo%%Tf
Vfp <- Vfs%%solve (Cf)

source ("factor_plot.R")
factor_plot (1, 2, Vrs, Cf)
```

### おわりに

共分散構造分析による因子的不変性の理論を紹介する際に、Horn, McArdle, & Mason (1983) による「configural invariance」という用語に「布置的不変性」という訳語を与えた（清水, 1989）。名詞である configuration には「配置」という訳語が当てられることもある。この訳語を検討する際に、Thurstone の著作物を紐解いてみたところ、この用語が繰り返

してあらわれることに気がついた。彼が強調したのは、Figure 1 の布置であった。

初期の因子解は、観測変数間の相関行列を分解するという目的から得られたものであり、その推定値である Table 1 の3つの因子を解釈することはできなかった。当然のこととして Table 1 のような多次元の初期因子解から尺度を構成することはできない。なお、多次元尺度解析法（MDS）の文脈でも、「2次元空間における変数の布置」というように「配置」ではなく、「布置」が使われていることも指摘しておきたい。

共通因子空間に布置する変数を表現することは、清水（2012）でも紹介したように、因子回転の不確定性として知られているように、無限に可能なのである。Thurstone (1935) の単純構造の提案は、不確定性を解決し、心理学的に解釈可能な因子を特定するためのものであった。本稿で紹介してきたように、彼は、この考えを現実のものとするために準拠軸と準拠構造を考案したのであった（Cattell, 1952, 1978 ; Mulaik, 1972）。Cattell & Foster (1963) は、このアイデアを Rotoplot 法としてコンピュータの上で実現した。

Cattell 研究室では、コンピュータからの出力をスライドで投影し、シフト行列に入れる数値を Cattell 自身が決定していた。これを引き継いだ辻岡研究室では、ラインプリンターや出力をコンピュータと結んだディスプレイ装置を使うことによって、Promax 回転後により適切な布置をもとめて Rotoplot による回転を行っていた（辻岡, 1975）。

視覚的な回転には研究者の主観が入るという点で批判されることがある。解析的な回転法であれば、回転方法と使用したソフト名を明記すれば、追試が可能となる。多様な解析的な回転方法が併存する現状では、ベターな回転方法に頼らざるを得ない。このベターであるとの判断をどのように下すことができるのであろうか。

因子分析の過去を振り返ると Varimax 法を最終回転とする研究がみられた。この回転結果が、共通因子空間に布置する変数を表現することにおいてベターでなかったことは、Figure 4 から Figure 6 をみれば明らかである。因子行列において回転結果をみたのでは、回転としての不十分さは見えない。最新の斜交回転においても、回転結果が十分に単純な構造を示しているかを共通因子空間において確認するた

めには、2次元座標軸の上での布置図を作成することが必要なのではないだろうか。

斜交軸体系をそのまま直接2次元の座標軸上に描く道具はまだ提供されていないようである。Figure 7からFigure 9からも明らかなように、準拠軸というThurstone (1935)の古典的な提案は、現代においても意義あるものといえよう。

### 引用文献

- Bernaards, C., & Jennrich, R. (2013). *Package 'GPArotation'*.  
<<http://www.stat.ucla.edu/research/gpa/>> (2013年12月30日).
- Cattell, R.R. (1952). *Factor analysis: An introduction and manual for psychologist and social scientist*. New York, NY: Harper & Brothers.
- Cattell, R.R. (1966). The Scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, **1**, 245-276.
- Cattell, R.R. (1978). *The scientific use of factor analysis in behavioral and life science*. New York, NY: Plenum.
- Cattell, R.B., & Foster, M.J. (1963). The Rotoplot program for multiple single-plane, visually-guided rotation. *Behavioral Science*, **8**, 156-165.
- 藤村和久・清水和秋・村山 繁・長尾治明 (1975). Procrustes法(斜交)とPromax法のプログラム 関西大学大学院人間科学, **5**, 45-63.
- 福中公輔 (2012). 回転 豊田秀樹(編著) 因子分析法入門—Rで学ぶ最新データ解析—(Pp.141-164) 東京図書.
- Hendrickson, A.E., & White, P.O. (1964). Promax: A quick method for rotation to oblique simple structure. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **17**, 65-70.
- 久本博行 (2003). Intaractive 因子分析システム 関西大学社会学部紀要, **34**(2), 37-82.
- Horn, J. L., McArdle, J. J., & Mason, R. (1983). When is invariance no invariant: A practical scientist's look at the ethereal concept of factor invariance. *Southern Psychologist*, **1**, 179-188.
- Hurley, J.R., & Cattell, R.B. (1962). The Procrustes program: Producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, **7**, 258-262.
- Mulaik, S.A. (1972). *Foundations of factor analysis*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Mulaik, S.A. (2010). *Foundations of factor analysis (2nd ed.)*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.
- Revelle, W. (2013). *Package 'psych'*. <<http://personality-project.org/r/>> (2013年12月30日).
- 芝 祐順 (1979). 因子分析法(第2版) 東京大学出版会.
- 清水和秋 (1978). 斜交因子分析について 関西大学大学院人間科学, **11**, 39-56.
- 清水和秋 (1989). 検証的因子分析, LISRELそしてRAMの概要. 関西大学社会学部紀要, **20**(2), 61-86.
- 清水和秋 (2003). 因子分析における探索の意味と方法 関西大学社会学部紀要, **34**(2), 1-36.
- 清水和秋 (2011). 項目と潜在変数との相関を使った項目分析—因子負荷量, 因子構造そして因子パターンと関係の再考察— 関西大学心理学研究, **2**, 1-6.
- 清水和秋 (2012). 延長因子分析の方法論—変数と因子との相関係数として定義される因子構造を用いて— 関西大学心理学研究, **3**, 1-13.
- 辻岡美延 (1975). 確認的因子分析における検査尺度構成—序言— 関西大学社会学部紀要, **6**(1), 2-4.
- 辻岡美延・藤村和久 (1975). 斜交因子解のための Rotoplot法 関西大学社会学部紀要, **6**(1), 46-52.
- Thurstone, L.L. (1935). *The vectors of the mind*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- 柳井晴夫 (1999). 因子分析法の利用をめぐる問題を中心にして 教育心理学年報, **39**, 96-108.