関西大学心理学研究　2012 年　第 3 号　pp.1-13

延長因子分析の方法論
── 変数と因子との相関係数として定義される因子構造を用いて ──

清　水　和　秋　関西大学社会学部

Methodology of Extension Factor Analysis: Using the factor structure defined as the correlations between variables and factors

Kazuaki SHIMIZU (Faculty of Sociology, Kansai University)

In this note three kinds of the extension factor analysis were reviewed focusing on the term of the factor structure: The correlations between extended variables and factor score estimates (Dwyer, 1937; Mosier, 1938; Horn, 1973), the decomposition method of correlations among variables and factors (Gorsuch, 1997) adapting the regression component analysis (Schönemann & Steiger, 1976), and the measurement model of structural equation modeling adding the extension variables. These methods were discussed relating to the terminology of factor analysis such as the factor loading, the factor pattern, and the factor structure. The application of the extension factor analysis to evaluate the results of the item parceling constructed for the observed variables in the factor analysis or structural equation modeling was also mentioned. The R-scripts of the Gram-Schmidt triangular decomposition for the Gorsuch' s extension method was also presented.

Key words: factor structure, factor score estimates, indeterminacy, parceling

Kansai University Psychological Research
2012, No.3, pp.1-13

1. はじめに

因子と変数との関係をあらわす用語として、因子負荷量（factor loading）の他に因子パターン（factor pattern）と因子構造（factor structure）が使われている。清水（2011）でも指摘したように、これらの用語は、その重要性にもかかわらず、因子分析の黎明期から混乱を内包したままに使われてきた。因子分析の創始者たちの著作物を紐解きながら用語を整理し、因子と変数との相関係数として定義された因子構造の意味を再検討してみることにする。そして、この定義を応用した延長因子分析（Dwyer, 1937; Mosier, 1938）を取り上げてみることにする。

Cattell（1956）は、いくつかの項目を合わせて尺度を構成し、これを対象として因子分析を行うことを提案している。項目よりも信頼性と分布で心理測定上でより望ましい性質を期待できるとして、これを Cattell は parcel（小包）とよんでいる。延長因子分析は、小包化した変数を対象とした因子分析で抽出した共通因子空間に小包化する前の個々の項目を布置させる方法として利用することもできる（Gorsuch,1997; 辻岡・清水，1975）。

本稿では、古典的な延長因子分析とその後の展開について、因子得点推定における不確定性という観

点から検討を加え、Rのスクリプトとともに紹介してみることにする。そして、構造方程式モデリングによる延長因子分析の可能性も検討してみることにする。

2. 因子負荷量から因子パターン・因子構造へ

簡単に、因子分析の創始者が使った用語を確認すると次のようになる。Spearman（1904）は、一般因子と変数との関係を、saturationとしている。Thurstone（1931）は、この2つの関係について、Spearmanの用語には触れずに、weightあるいはloadingとしている。Spearman（1939）は因子の次元性に関する論争を展開する中で、weightとloadingそしてcoefficientを併記し、saturationは使用していない。これは同じイギリス人の因子分析理論家であるThomson（1939）が、清水（2011）で紹介したように、saturationの新しい用語としてloadingを勧めているからかもしれない。そして、1次元の一般因子を双因子（bi-factor）という一般因子モデルを多次元に拡張した結果を説明する用語としてはloadingがより適切であると考えたからもしれない。なお、Spearmanの理論とThurstoneの理論的な検討を加える中で、Thomson（1939）は、因子得点と変数との相関係数がsaturationに相当することを明らかにしている。

このように因子分析の先駆者の間ではloadingに定まったかにみえるがことはそれほど単純ではない。Thurstone（1935）は、主因子法あるいはセントロイド法から得た因子と変数との関係をfactor loadingとしているが、因子軸回転後の値に対してもprimary（trait）loadingと負荷量を使っている。

現在の使われている因子パターン（factor pattern）をloadingという用語を使わずに定義したのがHolzinger（1940）である。彼はこの論文の中で、因子解をn変数の第j番目の変数の標準得点について、m個の共通因子に加えて特殊と信頼できない（誤差）因子の線形式を次のように定義している。

(1) $$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + \cdots + a_{jm}F_m + b_jS_j + e_jT_j$$

そして、主因子法での因子解の推定を行い、因子の名前は、斜交回転後の因子パターン行列において与えている。この論文が重要であるのは、(1)式のa_{j1}～a_{jm}として表記されている因子パターンとは別に変数と因子の相関係数を斜交因子におけるstructure（構造）としてはじめて定義した点にある（Holzinger & Harman, 1941）。

Spearman（1939）の一般因子のweight、loadingあるいはcoefficientは、$m=1$の特殊な場合であり、(1)式のa_{j1}に相当する。1次元であることからこの値は、patternとstructureの両方の性質を備えている。多因子の場合でも、m個の共通因子が互いに相関していない直交因子の場合にだけ、同様に因子パターン行列と因子構造行列の区別はなく、因子行列と呼ばれる。

因子分析の代表的なテキストであったThurstone（1947）では、structureは因子と変数との関係についての構造を意味する用語で使われており、因子と変数との相関行列である因子構造行列はR_{pj}と表記されるだけである。Cattell（1952）もThurstoneがHolzingerによる因子構造の定義に従っていないことに言及している。

PsycINFOで"factor loading"を検索語として調べてみると、1930年代からのヒットしたレコード件数は、それぞれ10年刻みで整理してみると、1930年から2009年では、33、60、124、246、364、374、722、1506となった。2010年以降でも439件もある。因子負荷量という用語は、Thompson & Daniel（1996）による因子パターンと因子構造をいずれかを意味するかということでの混乱を回避するために使用をやめるようにという警告にもかかわらず、一般的に使用されているようである。日本でもこの状況は変わらないのではないだろうか。

因子分析の結果の解釈は、伝統的に(1)式のa_{j1}～a_{jm}を対象として行われてきた。これらの値は因子という潜在変数へのある種の偏回帰係数であり、z_jとF_1～F_mとの相関係数である因子構造の値とは異なる。因子軸の回転は、因子パターンが行列全体として単純な構造を示す方向を求めて行われることになる。因子構造行列は、Thurstone（1935, 1947）が因子得点の回帰法による推定でR_{pj}と特別に表記しているように、因子の解釈では使用されることはなかった。しかしながら、Gorsuch（1983）やHanson & Roberts（2006）は、因子分析結果の報告では、因子間に相関がある場合には因子パターン行列と因子構造行列の両方を解釈の対象とすべきとしている。Thompson（2004）もまた、因子分析結果の報告では、因子パターン行列、因子構造行列、そして、因子間相関行列

を掲載することを勧めている。代表的な因子分析の解析ソフトであるSPSSで出力されるこれらの行列を検討すれば明らかなように、因子と変数との相関関係は単純なものとはならない。因子の共通因子空間における方向は、因子パターン（あるいは、因子パターンとは比例の関係にある準拠構造（例えば、清水（2003a）など参照））を対象とした回転によって決定される。因子構造の値は、回転によって方向が決められた因子と観測変数の相関係数のことであり、因子と変数の関係を相関係数として記述する統計量と考えるべきではないだろうか。

因子の解釈の対象としての因子構造についての検討は別な機会として、ここでは、因子構造が因子得点と変数との相関係数として定義されることの応用に検討を加えてみることにする。

因子構造を「因子と変数との相関係数」とする定義は2つの方向で応用されてきた。1つは、固有分解から因子負荷量を求める主因子法の計算を避ける代替的な計算法である尺度の総点と尺度を構成する項目との相関係数である。尺度の全体が1つの構成概念を測定していると仮定するこの方法は、手計算の時代から内的整合性の原理による項目分析という名称の下で長く使われてきた。現代においては、潜在する次元数を確認しないこの原理による項目分析は、過去の遺物となったといえよう（清水，2011）。

もう1つは、延長因子分析である（Dwyer, 1937; Mosier, 1938; Cattell, 1952）。あらかじめ行われた因子分析には含まれていなかった追加変数を因子分析によって抽出した共通因子空間に布置させようとする方法である。因子分析から得ることができた因子得点と新しく加えた変数との相関係数をこの新しい変数の因子構造とし、これに因子間相関係数の逆行列を掛け合わせることで、新しく加えた変数の因子パターンを推定しようとする方法である。本稿では、この古典的延長因子分析とその後の展開に検討を加えてみることにする。

3. 因子分析モデル

⑴式の因子分析の基本モデルを行列で表してみることにする。なお、因子分析の数式表記は、清水（2003a, 2011）と同じように、古典的な因子分析の文献で使われてきた記述モデルで行うことにする。まず、ある標本のN人の被験者について、n変数の測定を行ったものとする。そして、m次元として解釈することができるm個の因子を抽出することができたものとする。次に、この観測変数の標準得点行列を$\boldsymbol{Z}$（$N \times n$）とすると因子分析の記述モデルは次のように表すことができる。

⑵ $$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}'_{fp} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}$$

ここで、$\boldsymbol{F}$は（$N \times m$）次の因子得点行列であり、$\boldsymbol{V}_{fp}$は（$n \times m$）次の因子パターン行列であり、⑴式のa_{j1}〜a_{jm}を第j番目の変数の因子パターンm個の値とするとこの行列の要素（$n \times m$）はn個の変数の因子パターンからなる。この共通因子空間とは独立した独自性に関するものが（$N \times n$）次の独自性得点行列$\boldsymbol{U}$と独自性を対角項にもつ（$n \times n$）次の対角行列$\boldsymbol{D}$である。⑴式では、特殊性と誤差とを独立させた表記をそのまま使ったが、この2つを合わせたものが独自性である（Thurstone, 1935）。

$\boldsymbol{R}$を（$n \times n$）次の変数間の相関行列とすると、次のように展開することができる。

⑶ $$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \frac{1}{N}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} \\ &= \boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f\boldsymbol{V}'_{fp} + \boldsymbol{D}^2 \end{aligned}$$

なお、独自性は互いに独立な標準得点形式であるので$\boldsymbol{U}$を掛け合わせ人数Nで割ると単位行列となる。$\boldsymbol{C}_f$は（$m \times m$）次の因子間相関行列である。この行列の値は、探索的因子分析では、単純構造を求めて回転された因子軸間の角度の余弦（cosine）から得られる。なお、⑶式では、因子得点間の相関行列でもある。

$\boldsymbol{V}_{fp}$は初期の因子解を回転した結果の因子パターン行列であった。これに対して、Holzingerが定義したように変数と因子との相関係数が因子構造であり、この行列$\boldsymbol{V}_{fs}$（$n \times m$）は、次のように計算することができる。

⑷ $$\boldsymbol{V}_{fs} = \frac{1}{N}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{F}$$

因子パターン行列と因子構造行列との関係は次のように表すことができる。すなわち、

⑸ $$\boldsymbol{V}_{fs} = \boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{V}_{fp} = \boldsymbol{V}_{fs}\boldsymbol{C}_f^{-1}$$

である。

4. 古典的延長因子分析

以上の因子分析モデルは、n 変数を対象として展開した。因子得点も真の因子得点であり、実際のデータ解析では得ることができない。ここでは、この得点の推定値 $\hat{\boldsymbol{F}}$ を算出したものとする。そして、同じ N 人を対象として i 個の変数を追加することができたものとする。この標準得点行列を ${}_i\boldsymbol{Z}$（$N\times i$）と表して、上の因子得点との相関係数を(4)式のように求めてみることにする。

$$(6)\quad {}_i\boldsymbol{V}_{fs} = \frac{1}{N}\,{}_i\boldsymbol{Z}'\hat{\boldsymbol{F}}$$

この式で得られた新しい変数の因子構造行列に(5)式のように因子間相関行列の逆行列を次のように掛けると

$$(7)\quad {}_i\boldsymbol{V}_{fp} = {}_i\boldsymbol{V}_{fs}\boldsymbol{C}_f^{-1}$$

新しく追加した変数の因子パターンの値を得ることができる。すなわち、因子分析での対象ではなかった新たに加えられた i 個の変数を m 次元の n 変数から抽出された共通因子空間に布置させることができる。Dwyer（1937）が提案したこのアイディアを Mosier（1938）が一般的な多因子モデルへと展開している。

5. 因子得点の不確定性：推定値としての限界

Cattellの影響の下で、辻岡・清水（1975）は、Horn（1973）と同じように、因子得点を回帰法（Thurstone, 1935）で推定した値を使用し、延長因子分析にも検討を加えている。モデルの因子得点を取り扱うことはできないので、実際のデータを対象としたデータ解析での操作は、その推定値を計算にしなければならない。その結果、因子得点の推定値は因子得点とは同じとならない。因子得点の推定値を一意に定めることができないという Wilson（1928）が指摘した因子得点の不確定性（indeterminacy）がここに横たわっている。

より適切な因子得点の推定値を求めて、数多くの方法が提案されてきた（芝, 1971, 1972）。代表的な方法が真の因子得点と推定値の差を最小とすることを目的関数とする Thurstone（1935）が提案した回帰法であった。もう1つは因子得点の不偏推定量としての推定値を求めようとする方法で、バートレット推定量と呼ばれている（Bartlett, 1937）。

データ解析の現象として顕れることの1つは、推定値間の相関行列が、因子間の相関行列に一致しないということである。直交の因子間の関係を保持することを条件としたバートレット推定量が Anderson & Rubin（1956）による解かれた。同じ直交条件を回帰法で展開した方法が Shiba（1969）によって提案されている。芝（1972）は回帰法を F_{13} とし、直交条件の推定式を F_{14} と表記している。それぞれの因子得点の推定値行列は、次のように計算することができる。

$$(8)\quad \hat{\boldsymbol{F}}_{13} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}_{fs}$$

$$(9)\quad \hat{\boldsymbol{F}}_{14} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ここで、$\boldsymbol{V}$ は直交の因子行列である。

斜交の因子間相関を保持することを条件とする推定方法に関しては、芝（1972）の数理的展開をベースとして清水（1981）が展開した。この式を F_{24} と表記すると、次のように表すことができる（清水, 2010b）。

$$(10)\quad \hat{\boldsymbol{F}}_{24} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\left(\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{V}'_{fp}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}_f^{\frac{1}{2}}$$

もし、因子分析結果が直交であったなら、因子間相関行列は単位行列となり、因子構造行列は直交の因子行列となる。すなわち、斜交の拘束条件の(10)式が、(9)式の直交条件を内包しているといえる。なお、ten Berge, Krijinen, Wansbeek, & Shapiro（1999）も、相関行列ではなく共分散行列を対象として、同じ結果を導いている（市川, 2010）。

因子得点の推定方法としてSPSSでは、回帰法、バートレット法そして Anderson & Rubin 法が提供されている。清水（2010b）では、回帰法 F_{13} とここで紹介してきた因子間相関を拘束条件とした F_{24} とを計算するための R スクリプトが掲載されている。なお、この推定値 F_{24} を利用した研究については清水・三保（2011）を参照されたい。

この結果を用いて、先の(6)式の $\boldsymbol{F}$ に(10)式の F_{24} による推定値行列を代入すれば、因子パターンを得た

際に確定した因子間相関と同じ因子軸の枠の中で、追加した新しい変数を布置させることができることになる。

$$(6')\quad {}_i\hat{\boldsymbol{V}}_{fs} = \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\hat{\boldsymbol{F}}_{24} = {}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\left(\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{V}'_{fp}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{V}_{fp}\boldsymbol{C}_f^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}_f^{\frac{1}{2}}$$

ここで ${}_i\boldsymbol{R}$ は追加した変数と因子分析の対象となった変数の相関行列である。

因子得点の推定方法の中でいずれがよりよい推定値を与えてくれるのかという点に関して、理論的研究（例えば、Harris（1967）、McDonald & Burr（1967）、丘本（1986）、Steiger　& Schönemann（1978）、Shiba（1969）、芝（1971, 1972）や Tucker（1971）など）だけではなくシミュレーション研究や実際の推定値の比較研究（例えば、Horn（1965）、Feva & Velice（1992）や Grice & Harris（1998）など）も行われてきた。最近では、Beauducel（2007）が、Schönemann & Steiger（1976）による回帰成分分析を応用して、ここで紹介してきたような推定方法の間には大きな違いがないことを明らかにしている。推定値方法間の比較の議論では、丘本（1986）はバートレット推定量と回帰法を比較して後者の方が望ましいとしている。Mulaik（1972）は、Harris（1967）の議論を紹介し、バートレット推定量の方が望ましいとしていた。Mulaik（2010）の新しい版では、バートレット推定量を直交の因子解に限定し、応用場面で使われる斜交の回転結果では回帰法の方がより望ましいという結論を下している。

モデルの因子得点と推定値との相関係数は一般的には 1.0 とはならない（例えば、芝（1972）など）。ここでは、モデルの因子得点と因子得点の推定値の差を回帰法のように次の式で定義してみることにする。

$$(11)\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} - \hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}$$

ここで、$\boldsymbol{W}$（$n\times m$）次は、因子得点の重み行列（SPSS では、因子得点係数行列）である。回帰法では、このトレースを最小とする $\boldsymbol{W}$ を求めることになる。その結果を整理したものが(8)式から(10)式であった。

ここでは、加えた新しい変数と因子得点との関係を Steiger（1979a）に従ってさらに検討を加えてみることにする。まず(11)式を次のように入れ替えてみる。

$$(12)\quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{E}$$

次に、i 個の新しく加えられた変数の標準得点行列 ${}_i\boldsymbol{Z}$ を両辺に掛け合わせ N で割ってみることにする。

$$(13)\quad \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{F} = \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{W} + \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{E}$$

これは(6)式と(6’)式から、次のように書き換えることができる。

$$(13')\quad {}_i\boldsymbol{V}_{fs} = {}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{W} + \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{E} = {}_i\hat{\boldsymbol{V}}_{fs} + \frac{1}{N}{}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{E}$$

因子分析の因子得点は、主成分分析の場合とは異なり一意に定まるのではなく、(13)式の右辺第 2 項の（1／N）${}_i\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{E}$ は無視できるほど小さいとはいえないかもしれない（Steiger, 1979a）。

回帰法は、上で紹介したように推定値としての望ましい性質（最良線形予測子とも呼ばれる（例えば、市川（2010）など）を備えてはいても、$\boldsymbol{E}$ が完全にゼロ行列となるとは思えない。この結果として、(6’)式の因子得点の推定値は因子間相関という拘束条件を満たしても、(6)式の近似値を提供するに過ぎないといわざるをえない。Gorsuch（1997）は、因子得点の推定値を使って計算した値が(6)式の本来の値よりも高くなることを指摘し、Shönemann & Steiger（1976）による変数と因子との超行列を回帰成分分析的に分解する方法を応用した、次に紹介する延長因子分析の新しい方法を提案している。

6. Gorsuch（1997）による延長因子分析

ここで、これまでと同じように、n 個の変数に潜在する m 個の因子を探索的因子分析により抽出することができたとし、この変数についての因子分析モデルは(2)式から(5)式とする。ただし、ここでは(2)式の観測変数の標準得点行列に添え字をつけて ${}_p\boldsymbol{Z}$（$N\times n$）次とする。そして、この一群の変数群とは別に、(6)式と同じように、新しく i 個の変数を同じ調査対象者で測定を行うことができたとする。因子得

点は推定値ではなく真の因子得点とし、N人を対象とした3種類の得点を1つの行列${}_c\boldsymbol{Z}$ $\{N\times(n+i+m)\}$で表してみることにする。

⒁ $${}_c\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}{}_p\boldsymbol{Z} & {}_i\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}$$

Shönemann & Steiger（1976）のように、変数と因子から構成したこの行列からこれらの間の超行列の相関行列$c\boldsymbol{R}$を次のように展開してみることにする。

⒂ $$\frac{1}{N}{}_c\boldsymbol{Z}'{}_c\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}{}_{pp}\boldsymbol{R} & {}_{pi}\boldsymbol{R}' & \boldsymbol{V}_{fs}\\ {}_{ip}\boldsymbol{R} & {}_{ii}\boldsymbol{R} & \left({}_i\boldsymbol{V}_{fs}\right)\\ \boldsymbol{V}'_{fs} & \left({}_i\boldsymbol{V}'_{fs}\right) & \boldsymbol{C}_f\end{bmatrix}$$

この括弧で括った（${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$）のみが未知の行列であり、上で紹介してきた古典的方法は、因子得点の推定値を介在させ、この行列を直接計算しようするものであった。これを批判したGorsuch（1997）は、Shönemann & Steiger（1976）が因子得点の不確定性問題への回答（Steiger & Shönemann（1978）、Steiger（1979b）やMuliak（2010）参照）を得る方法として提案した変数の得点と因子得点との相関行列からなる超行列の分解方法を、⒂式の相関行列${}_c\boldsymbol{R}$に適用し、これを分解するための直交行列${}_c\boldsymbol{P}$を得る手順を検討している。この${}_c\boldsymbol{P}$の大きさは$\{(n+i+m)\times k\}$でkの数を、彼は、この直交化のコア変数の数であるnとしている。

⒃ $${}_c\boldsymbol{R}={}_c\boldsymbol{P}\,{}_c\boldsymbol{P}'+{}_c\boldsymbol{E}$$

ここで${}_c\boldsymbol{E}$は、直交化によっても説明することのできない残差行列とする。${}_c\boldsymbol{P}$を⒁式のように表現するとそれぞれは次にように表すことができる。

⒄ $${}_c\boldsymbol{P}'=\begin{bmatrix}{}_p\boldsymbol{P}' & {}_i\boldsymbol{P}' & {}_f\boldsymbol{P}'\end{bmatrix}$$

これを⒂式に適用すると次のように展開することができる。

⒅ $${}_c\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}{}_p\boldsymbol{P}\\ {}_i\boldsymbol{P}\\ {}_f\boldsymbol{P}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}_p\boldsymbol{P}' & {}_i\boldsymbol{P}' & {}_f\boldsymbol{P}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}{}_{pp}\boldsymbol{E} & {}_{pi}\boldsymbol{E} & {}_{pf}\boldsymbol{E}\\ {}_{ip}\boldsymbol{E} & {}_{ii}\boldsymbol{E} & {}_{if}\boldsymbol{E}\\ {}_{fp}\boldsymbol{E} & {}_{fi}\boldsymbol{E} & {}_{ff}\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

この結果から、新しく加えたi個の変数と因子得点との相関行列${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$を取り出すと、次のように表すことができる。

⒆ $${}_i\boldsymbol{V}_{fs}={}_i\boldsymbol{P}\,{}_f\boldsymbol{P}'+{}_{if}\boldsymbol{E}$$

この残差行列が限りなくゼロ行列になると仮定すると未知であった⒂式の（${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$）を${}_i\boldsymbol{P}$と${}_f\boldsymbol{P}$の転地との掛け合わせから計算することができることになる。

Gorsuch（1997）は、${}_c\boldsymbol{P}$を得る方法として、Shönemann & Steiger（1976）の成分分析的な手法をグラム・シュミットの直交化により計算している。行列の対角化の代表的な計算手法であるこの直交化では、まず、第1番目の変数が第1成分と等しいと仮定し、次に、この1成分目の分散を取り除いた残差行列から第2成分を2番目の変数で定義し、最後の変数までこの手順を繰り返す。このように計算することによって、直交化の対象となった行列の分散を説明しつくすことができる（Thourstone,1935; Harman, 1976; 芝，1975）。

⒂式の相関行列には、延長因子分析として追求すべき行列である${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$は、ここまでに入手できるデータと理論からでは未知のままである。Gorsuch（1997）の新しい方法は、既知の因子分析の対象とした変数間の相関行列、この変数と新しく追加した変数との相関行列、そして、因子分析から得られたこの変数と因子と相関行列である因子構造行列からなる行列${}_n\boldsymbol{R}$ $\{(n+i+m)\times n\}$を対象にして、直交化した行列${}_c\boldsymbol{P}$ $\{(n+i+m)\times n\}$を得ようとするものである。

⒇ $${}_n\boldsymbol{R}'=\begin{bmatrix}{}_{pp}\boldsymbol{R}' & {}_{ip}\boldsymbol{R}' & \boldsymbol{V}_{fs}\end{bmatrix}$$

この延長因子分析のためのグラム・シュミットの直交化は、次の手順で行う（Gorsuch, 1983）。まず、${}_n\boldsymbol{R}$から第1成分ベクトルと取り出すことにする。この行列の1行1列の値はn変数の第1変数自身の相関係数1.0であるので、この第1列の相関係数の値を取り出し${}_c\boldsymbol{p}_1$ $\{(n+i+m)\times1\}$というベクトルを構成する。このベクトルとこの転地ベクトルを掛け合わせ、${}_n\boldsymbol{R}$から引くことによって残差行列${}_{n.1}\boldsymbol{R}$を求める。

(21) $${}_{n\cdot1}R={}_{n\cdot}R-{}_c\boldsymbol{p}_{1\,c}\boldsymbol{p}'_1$$

次に、2行2列の値の平方根によって、第2列の残差行列の第2列の要素を割り、${}_c\boldsymbol{p}_2$ $\{(n+i+m)\times 1\}$ というベクトルを構成する。このベクトルを同じように掛け合わせ、次の残差行列を求める。

(22) $${}_{n\cdot 2}R = {}_{n\cdot 1}R - {}_c\boldsymbol{p}_2\,{}_c\boldsymbol{p}_2'$$

この手順を n 番目のベクトルを求めるまで繰り返し ${}_c\boldsymbol{P}$ を求める。これから ${}_i\boldsymbol{P}$ と ${}_f\boldsymbol{P}$ を取り出し、(19)式で ${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$ を計算し、さらに、これに因子間相関逆行列を(7)式のように掛けることによって、延長因子分析の目的であった ${}_i\boldsymbol{V}_{fp}$ を計算することができる。このRのスクリプトはAppendixに掲載する。

7. SEMによる方法

因子得点そのものが、既に心理測定の操作の対象となって久しい時間が経過している。Jöreskog（1967）による最尤法による因子解の推定方法とJöreskog（1970）による共分散構造分析の提案は、因子得点と観測変数の得点との関係をパス係数（因子パターンに相当）と共分散（標準化すれば相関係数）として操作する現代の構造方程式モデリング（SEM: structural equation modeling）として実を結んでいる（例えば、清水（1989, 1994, 2003b）など）。LISRELやAmosなどのSEM専用ソフトではグラフィカルに因子と観測変数との関係を図として描くことができる（例えば、狩野・三浦（2002）など）。

SEMによる延長因子分析の例をFig. 1で描いてみた。ここでは図を簡単に描くために、因子分析の対象とした変数を（$n=8$）とし、因子の数を（$m=2$）としている。そして、因子分析に含まれなかった（$i=3$）個の変数を相関関係としておいてみた。なお、SEMでは、分散・共分散を対象としたパラメータ推定を行うので、変数間の関係も共分散の値となる。この図では、相関係数の値を得るために因子の分散を1とした標準化形式で表示している。

図のr1～r3の因子と追加した変数との相関係数は、(6)式や(19)式の ${}_i\boldsymbol{V}_{fs}$ に相当する。これらの値は、(7)式のように因子パターンへの変換が必要となる。直接 ${}_i\boldsymbol{V}_{fp}$ を推定するために測定モデルである因子からのパスとしてこれらの追加した変数を置くことも可能なように思えるが、このやり方では因子を構成する変数に変化を起こすことになるので、ここでは追加した変数は相関関係としておいてみた。

SEMの方法からは、このように、因子得点と追加した変数との相関係数を直接的に計算することができる。この点が、古典的な方法やGorsuchの成分分析の方法とは異なる。そして、SEMではFig.1のようなモデルのデータへの適合度に加えて、標準化前の共分散での推定値ではあるが、統計的な検定が可能となる。すなわち、SEMによる延長因子分析は、統計的により洗練された方法であるといえる。

SEMでは、変数間に一次独立の関係が必要とされる。(14)式の p と i との関係では、独立していることが条件ではなかった。部分的に重複があったとしても(20)式やそれ以降の展開での計算は可能である。延長因子分析を適用する場面では、尺度と項目との関係が複雑なものとなることが想定される。この場合でも、変数間に独立な関係をSEMでは確保しなければならない。

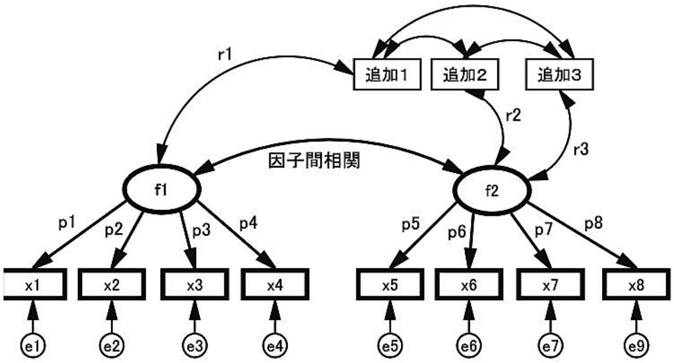

Fig.1　8変数2因子の測定モデルに3つの変数を追加
標準化解：因子パターンp1～p8、因子間相関
延長因子分析：因子と追加した変数との相関係数r1～r3

Fig.1のようなモデルから得た相関係数（因子構造）を因子パターンに変換する方法や追加した変数をパス関係に置くことによる測定モデルの意味、そして、追加変数と因子との関係の置き方によるモデルの適合度など、検討しなければならないことがいくつかある。古典的延長因子分析やGorsuchによる延長因子分析の結果との実際のデータによる比較などともあわせて、今後の課題としたい。

8. 終わりに

ここでは因子負荷量の用語に関して、最近の情報も加えながら、再検討行ってみることにする。そして、延長因子分析をSEMの観測変数の小包化の成否を評価する方法としての可能性についても議論してみることにする。

8.1 因子パターンあるいは因子負荷量

因子構造という用語は、因子と変数との相関係数という定義で使われるよりは、Thurstoneの単純構造の原理のように「因子と変数との関係」を「構造」と表現する形で使われることのほうが多い。Harman（1976）は、Thurstone学派が因子行列を $\boldsymbol{V}$ と表記して、因子パターンと因子構造の区別を付けずに因子解として曖昧なままに使用していることを批判している。Thurstoneがはじめて使った因子負荷量という用語も同じように曖昧に使われているようではあるが、Thurstone（1935）では、この用語を現在の「因子パターン」の意味で使用している。Thurstone（1947）でも同様であり、Holzinger（1940）やHolzinger & Harman（1941）が定義した「因子パターン」と「因子構造」には言及もなく、因子空間における変数の布置に因子負荷量という用語を使い、構造は因子の組成というようなニュアンスで使っている。このようにみると用語をThurstoneが混乱させたわけではなく、その後の因子分析の代表的なテキスト（例えば、Gorsuch（1983）やHarman（1976）など）の中に、因子負荷量、因子パターンそして因子構造が、これらの定義は与えられてはいても並行的に使われていたことに原因があるのではないだろうか。

今世紀になって出版されたこの分野テキストの中でThompson（2004）は、探索的因子分析やSEMの解析結果のすべての表で、因子パターンと因子構造の2つを並べて表示している。彼は、この2種類の値を因子の解釈に活用すべきとGorsuch（1983）を引用しながら主張し、負荷量を用語として使わないと宣言している。*Educational and Psychological Measurement* 誌において、Hanson & Roberts（2006）やThompson & Daniel（1996）などは、因子の解釈では因子パターンと因子構造の両方を対象とすべきと主張している。その後、同誌では、因子パターンと因子構造の両方を掲載するようになった。

因子パターン行列と因子構造行列との間には(5)式の関係がある。因子パターン行列と因子間相関行列が提供されているならば、Excelでも因子構造行列を計算することが可能である。変数の数が多くなれば、2つの行列を論文に掲載するとなれば大きなスペースが必要となる。Thompsonたちの主張には強い違和感をおぼえた。

次の文はJohn R. Nesselroade（University of Virginia）からの私信（2006年1月16日）の一部である。“People such as Gorsuch in his book on factor analysis recommend looking at both the loadings and the structure values to try to interpret the factors. I think this is reasonable, but myself I would give more "weight" to the pattern elements (the loadings) in trying to understand the factors.” これは筆者が因子分析の用語について問い合わせたメールへの返信の一部であり、彼は、Thurstoneと同様に「パターン」に「負荷量」を当てている。

「構造」という言葉が混乱を起こしている本当の原因は、準拠軸体系の下での準拠軸と変数との相関である「準拠構造（reference structure）」が十分に理解されていないからではないかと推測している。清水（2003a）でも紹介したように、ThurstoneやCattellはこの準拠構造が因子パターンと比例関係にある性質を踏まえて、因子の回転はこの準拠構造で行い、解釈もこれで行っていた。初期の因子解を解釈可能な方向へと回転させるために、因子数から1次元を引いた超平面に垂線を立て、これを準拠軸とすることで、グラフ上での回転が行われてきた。この紹介は別な機会として、ここでは「構造」という用語が出現することを指摘するにとどめる。

因子を解釈するという観点からは、因子パターン行列を対象とし、因子分析の創始者のThurstoneに敬意を払って、Nesselroadeのように、因子負荷量を使用してもいいのでないかと考えている。

Holzinger が因子と変数との相関係数として因子構造を定義したことは、ここで紹介してきたような混乱を引き起こしたのかもしれない。しかし、変数と因子との相関係数という性質は、Spearman が知能の一般因子の妥当性を関連変数との相関係数での追求したことだけではなく、その後の延長因子分析などの展開に引き継がれることにつながったと評価することができるのではないだろうか。

8.2 小包化の評価

Dwyer（1937）や Mosier（1938）にはじまる古典的延長因子分析の方法は、因子得点を推定の対象としていた。Gorsuch（1997）が名付けている新しい方法は、直接には因子得点の推定値を使用しないが、間接的に変数間の相関関係から成分分析的な手法で延長因子分析の統計量である因子と新しく追加した変数の相関係数を推定しようとするものであった。

SEM が本格的に普及してきている。Amos などの SEM ソフトという道具の前では、Gorsuch の方法は時代遅れなものにみえるかもしれない。

因子分析の対象の変数を質問項目とすると、項目では測定値としての信頼性が低いことは明らかである。項目の反応カテゴリーが等間隔でないということも、測定の適切性への疑問として問題提起されることがあった。因子分析や SEM のソフトは、清水（1994）でも指摘したように、漸近的分布自由（asymptotically distribution-free: あるいは漸近的分布非依存法）によって、十分に大きな数の対象者を確保することができれば、後者の問題はほぼ解決済みといえる（応用例として、例えば、Shimizu, Vondracek, & Schulenberg, 1994 など）。

SEM の実際的な解析場面では、清水・山本（2007）や清水・三保（2010）でも検討したようにいくつかの項目を合わせて小包とすることが行われている（狩野，2002a,b）。清水・山本（2007）では、Coffman & MacCallum（2005）が提案した３つの方法を検討し、因子パターンを平均化することで測定する領域を再現する方法が望ましいことを報告している。

シミュレーション研究でも、例えば、Meade & Kroustalis（2006）は、項目そのものよりは小包化した変数のほうが、測定不変の検証に適していることを報告している。また、Yang, Nay, & Hoyle（2010）は、順序尺度では小包化が SEM においては望ましいことを報告している。このように、項目よりも小包化した方が望ましいという結論は明らかではあるが、具体的な手順については検討の余地が残されている。この状況の中で、Williams & O’Boyle（2008）は、小包化を適用した研究を概観し、小包化の方向での研究が増えていくだろうと予測している。そして、どのようにして小包化を行ったのかということに関して情報を提供すべきであるとしている。

小包化が成功しているかどうかを SEM で評価することは難しい。小包化した変数と小包化の前の項目を同じモデル図に描いたとしても、分析の対象のデータが正則ではなくなるからである。Gorsuch による延長因子分析の方法が、上でも指摘したように、小包変数の結果を確認する上では、より適切と考えられる。

8.3 尺度の改訂

因子分析法は、Spearman や Thurstone の時代から心理尺度を構成することに貢献してきた。因子分析結果からの項目の選択は、因子パターン行列を対象として、因子軸の方向に一致することを基準として行われている。尺度構成でもこのように、因子構造行列はその対象ではない。

Cattell & Tsujioka（1946）や辻岡（1964）は、因子分析で得た因子軸の方向に、選択する項目の合計変数（尺度）のベクトルの方向を一致させることが、単純な等質性よりも重要であることを明らかにし、因子的真実性の原理を内的整合性の原理に代わる新しい因子分析からの尺度構成の方法として提案している。尺度の因子分析で得た共通因子空間に尺度構成の対象である項目の因子パターンを延長因子分析から計算するソフトを FORTRAN（辻岡・清水，1075）と R（清水，2010a）で提供している。

構成した尺度は、改訂することになる。Reise, Waller, & Comrey（2000）は、その理由として、不適切な心理測定法の適用、一つの標本からの一般化の危険性、構成概念の測度としての適切性、などをあげている。これに加えて、社会的・文化的文脈の変化によって、平均や分散といった基本的な統計量に、項目表現に埋め込まれた時代性が違いとして顕れることも考えられる。基本的な統計量だけではなく、項目の因子空間における布置する位置もまた変化すると考えられる。延長因子分析は、不適切なあるいは古い項目を新しい項目と置き換える尺度改訂の方法として位置づけることができるのでないだろ

うか。

尺度の改訂に際して、新しい項目を加えることによって測定内容が変化することが予想される。既存の尺度がカバーする構成概念の内容については、探索的因子分析とSEMによる確認的因子分析の方法を組み合わせた検討が必要であると考えている。この点についても今後の検討課題としたい。

引用文献

Anderson, R.D., & Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability*, **5**, 111–150.

Bartlett, M.S. (1937). The statistical conception of mental factors. *British Journal of Psychology*, **28**, 97–104.

Beauducel, A. (2007). In spite of indeterminacy many common factor score estimates yield and identical reproduced covariance matrix. *Psychometrika*, 72, 437–441.

Cattell, R.B. (1952). *Factor analysis*. New York: Harper.

Cattell, R.B. (1956). Validation and intensification of the sixteen personality factor questionnaire. *Journal of Clinical Psychology*, **12**, 205–214.

Cattell, R.B., & Tsujioka, B. (1964). The importance of factor-trueness and validity, versus homogeneity and orthogonality, in test scales. *Educational and Psychological Measurement*, **24**, 3–30.

Coffman, D.L, & MacCallum, R.C. (2005). Using parcels to convert path analysis models into latent variable models. *Multivariate Behavioral Research*, **40**, 235–259.

Dwyer, P.S. (1937). The determination of the factor loadings of a given test from the known factor loadings of other tests. *Psychometrika*, **2**, 173–178.

Fava, J.L., & Velicer, W.F. (1992). An empirical comparison of factor, image, component, and scale scores. *Multivariate Behavioral Research*, **27**, 301–322.

Gorsuch, R.L. (1983). *Factor analysis* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gorsuch, R.L. (1997). New procedure for extension analysis in exploratory factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, **57**, 725–740.

Grice, J.W. (2001). Computing and evaluating factor scores. *Psychological Methods*, **6**, 430–450.

Grice, J.W., & Harris, R.J. (1998). A comparison of regression and loading weights for the computation of factor scores. *Multivariate Behavioral Research,* **33**, 221–247

Hanson, R.K., & Roberts, J.K. (2006). Use of exploratory factor analysis in published research: Common errors and some comment on improved practice. *Educational and Psychological Measurement*, **66**, 393–416.

Harman, H.H. (1976). *Modern factor analysis* (3rd ed.). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Harris, C.W. (1967). On factors and factor scores. *Psychometrika*, **32**, 363–379.

Holzinger, K.J. (1940). A synthetic approach to factor analysis. *Psychometrika*, **5**, 235–250.

Holzinger, K.J., & Harman, H.H. (1941). *Factor analysis*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Horn, J.L. (1965). An empirical comparison of methods for estimating factor scores. *Educational and Psychological Measurement*, **25**, 313–322.

Horn, J.L. (1973). On extension analysis and its relation to correlations between variables and factor scores. *Multivariate Behavioral Research*, **8**, 477–489.

市川雅教（2010）．因子分析　朝倉書店．

Jöreskog, K.G. (1967). Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometirka*, **32**, 443–482.

Jöreskog, K.G. (1970). A general method for analysis of covariance structures. *Biometrika*, **57**, 239–251.

狩野 裕（2002a）．構造方程式モデリングは、因子分析、分散分析、パス解析のすべてにとって代わるか？ 行動計量学，**29**(2)，138–159.

狩野 裕（2002b）．再討論：誤差共分散の利用と特殊因子の役割　行動計量学，**29**(2)，182–197.

狩野 裕・三浦麻子（2002）．グラフィカル多変量解析（増補版）現代数学社．

McDonald, R.P., & Burr, E.J. (1967). A comparison of four methods of constructing factor scores. *Psychometrika*, **62**, 381–401.

Meade, A.W., & Kroustalis, C.M. (2006). Problems with item parceling for confirmatory factor analytic tests of measurement invariance. *Organizational Research Methods*, **9**, 369–403.

Mosier, C.I. (1939). Determining a simple structure when the loadings for certain tests are known. *Psychometrika*, **4**, 149–162.

Mulaik, S.A. (1972). *The foundations of factor analysis*. New York, NY: McGraw-Hill.

Mulaik, S.A. (2010). *The foundations of factor analysis* (2nd ed.). New York, NY: Chapman & Hall/CRC.

丘本　正（1986）．因子分析の基礎　日科技連．

Reise, S.P., Waller, N.G., & Comrey, A.L. (2000). Factor analysis and scale revision. *Psychological Assessment*,

12, 287-297.

Schönemann, P.H., & Steiger, J.H. (1976). Regression component analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **29**, 175-189

Shiba, S. (1969). New estimates of factor scores. *Japanese Psychological Research*, **11**, 129-133.

芝 祐順 (1971). 因子スコアの推定式　高木貞二 (編) 現代心理学と数量化 東京大学出版会 .

芝　祐順　(1972). 因子分析法　東京大学出版会 .

芝　祐順　(1975). 行動科学における相関分析法 (第 2 版)　東京大学出版会 .

清水和秋　(1981). 因子間相関を固定した斜交因子得点 関西大学社会学部紀要, **12**(2), 113-128.

清水和秋 (1989). 検証的因子分析, LISREL そして RAM の概要. 関西大学社会学部紀要, **20**(2), 61-86.

清水和秋 (1994). Jöreskog と Sörbom によるコンピュータ・プログラムと構造方程式モデル . 関西大学社会学部紀要, **25**(3), 1-41.

清水和秋 (2003a). 因子分析における探索の意味と方法 関西大学社会学部紀要, **34**(2), 1-36.

清水和秋 (2003b). 構造方程式モデリングによる平均構造の解析モデル　関西大学社会学部紀要, **34**(2), 83-108.

清水和秋 (2010a). 項目因子分析で構成した尺度の因子パターン, 共通性, 信頼性そして因子的真実性　関西大学心理学研究, **1**, 9-24.

清水和秋 (2010b). 因子得点の推定 http://www2.ipcku.kansai-u.ac.jp/~shimizu/research/papers/FactorScore.pdf (2012 年 1 月 10 日)

清水和秋 (2011). 項目と潜在変数との相関を使った項目分析― 因子負荷量, 因子構造そして因子パターンと関係の再考察―　関西大学心理学研究 , **2**, 1-6.

清水和秋・三保紀裕 (2011). 潜在差得点モデルからみた変化―大学新入生の半年間の適応過程を対象として― 関西大学社会学部紀要, **42**(3), 1-28.

Shimizu, K., Vondracek, F.W., & Schulenberg, J. (1994). Unidimensionality versus multidimensionality of the Career Decision Scale: A critique of Martin, Sabourin, Laplante, and Coallier. *Journal of Career Assessment*, **2**, 1-14.

清水和秋・山本理恵 (2007). 小包化した変数によるパーソナリティ構成概念間の関係性のモデル化― Big Five・不安 (STAI)・気分 (POMS) ― 関西大学社会学部紀要 , **38**(3), 61-96.

Spearman, C.E. (1904). General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, **15**, 201-293.

Spearman, C.E. (1927). *The abilities of man*. London : Macmillan.

Spearman, C.E. (1939). Thurstone's work re-worked. *Journal of Educational Psychology*, **30**, 1-16.

Steiger, J.H. (1979a). The relationship between external variables and common factors. *Psychometrika*, **44**, 93-97.

Steiger, J.H. (1979b). Factor indeterminacy in the 1930's and the 1970's: Some interesting parallels. *Psychometrika*, **44**, 157-167.

Steiger, J.H., and Schönemann, P.H. (1978). A history of factor indeterminacy. In S. Shye (Ed.), *Theory construction and data analysis* (pp. 136-178). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

ten Berge, T.M.F., Krijinen, W.P., Wansbeek, T.J., & Shapiro, A. (1999). Some new results on correlation-preserving factor scores prediction methods. *Linear Algebra and its Applications*, 289, 311-318.

Thompson, B. (2004). *Exploratory and confirmatory factor analysis*. Washington, DC: American Psychological Association.

Thompson, B., & Daniel, L.G. (1996). Factor analytic evidence for the construct validity of scores: A historical overview and some guidelines. *Educational and Psychological Measurement*, **56**, 197-208.

Thomson, G. (1939). *The factor analysis of human ability*. London : University of London Press.

Thurstone, L.L. (1931). Multiple factor analysis. *Psychological Review*, **38**, 406-427.

Thurstone, L.L. (1934). The vectors of mind. *Psychological Review*, **41**, 1-32.

Thurstone, L.L. (1935). *The vectors of mind*. Chicago, IL : University of Chicago Press.

Thurstone, L.L. (1947). *Multiple factor analysis*. Chicago, IL : University of Chicago Press.

辻岡美延　(1964). テスト尺度構成における新しい原理 心理学評論 , **8**, 82-90.

辻岡美延・清水和秋 (1975). 項目分析における項目統計量と構成尺度の統計量―因子的真実性係数と因子的妥当性 .　関西大学社会学部紀要 , **7**(1), 107-120.

Tucker, L.R. (1971). Relations of factor score estimates to their use. *Psychometrika*, **36**, 427-436.

Williams, L.J., & O'Boyle, E.H. (2008). Measurement models for linking latent variables and indicators: A review of human resource management research using parcels. *Human Resource Management Review*, **18**, 233-242

Wilson, E.B. (1928). On hierarchical correlational systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **14**, 283-291.

Yang, C., Nay, S., & Hoyle, R.H. (2010). Three approaches to using lengthy ordinal scales in structural equation models: Parceling, latent scoring, and shortening scales. *Applied Psychological Measurement*, **34**, 122-142

Appendix　Gorsuchによる延長因子分析のスクリプト

```
#####
## Gorsuch（1997）による延長因子分析
##     1）データ入力
##          因子分析で使用した変数＋新たに加えた変数の得点データ
##                                       ->  X_PandI
##          因子分析結果
##               因子パターン行列  -> Vfp_p_in
##               因子間相関行列    -> Cf
##          np：因子分析の観測変数の数
##          ni：新たに追加した変数の数
##          nf：因子の数
##     2）ファイル出力
##               Vfp_i 〈—  延長因子分析結果の因子パターン行列
##
X_PandI <- read.csv("data_p_i.csv",header = T)
Vfp_p_in    <- read.csv("standard_Vfp_simple.csv",header = T)
Cf   <- read.csv("standard_Cf_simple.csv",header = T,row.names = 1)
Xpi          <- X_PandI
Vfp_p   <- Vfp_p_in
np <- nrow(Vfp_p)
nf <- ncol(Vfp_p)
ni   <- ncol(X_PandI) - np
npi <- np+ni
Vfp_p <-as.matrix(Vfp_p, nrow = np, ncol = nf)
npf <- np*nf
Vfs_p <-matrix(1:npf, nrow = np, ncol = nf)
Cf   <- as.matrix(Cf, nrow = nf, ncol = nf)
Rpi <- cor(Xpi)
Vfs_p <- Vfp_p % * % Cf
npip <- npi*np
npipi <- npi*npi
npif   <- npi+nf
npifp <- npif*np
npif   <- np+ni+nf
npif2 <- npif*npif
npifp <- npif*np
Vo <- matrix(1:npifp, nrow = npif, ncol = np)
Rxx <- matrix(1:npif2, nrow = npif, ncol = npif)
for (i in 1:npif)
{ for (j in 1:np)
{ Vo [i,j] <- 0.0 }}
for (i in 1:npif)
{for (j in 1:npif)
{ Rxx [i,j] <- 0.0 }}
for (i in 1:npi)
{ for (j in 1:npi)
{ Rxx [i,j] <- Rpi [i,j] }}
for(i in 1:nf)
```

```
{ ii <- i+npi
   for (j in 1:np)
 { Rxx [ii,j] <- Vfs_p [j,i] }}
for(i in 1:nf)
{ ii <- i+npi
   for (j in 1:np)
 { Rxx [j,ii] <- Vfs_p [j,i] }}
for(i in 1:nf)
{ ii <- i+npi
   for (j in 1:nf)
 { jj <- j+npi
      Rxx [ii,jj] <- Cf [i,j] }}
k <- 1
 Vo [k,k] <- Rxx [k,k]
   k1 <- k+1
   for (i in k1:npif)
   { Vo [i,k] <- Rxx [i,k] }
for (i in k:npif)
{ for (j in k:npif)
{ Rxx [i,j] <- Rxx [i,j] -Vo [i,k] *Vo [j,k] }}
for (k in 2:np)
{
 Vo [k,k] <- sqrt(Rxx [k,k] )
   k1 <- k+1
   for (i in k1:npif)
   { Vo [i,k] <- (Rxx [i,k] ) ／ Vo [k,k] }
for (i in k:npif)
{ for (j in k:npif)
{ Rxx [i,j] <- Rxx [i,j] -Vo [i,k] *Vo [j,k] }}
}
nip <- ni*np
nif <- ni*nf
npf <- np*nf
Vo_i <- matrix(1:nip, nrow = ni, ncol = np)
Vo_f <- matrix(1:npf, nrow = np, ncol = nf)
Vfs_i <- matrix(1:nif, nrow = ni, ncol = nf)
for (i in 1:ni)
{ ii <- i+np
   { for (j in 1:np)
Vo_i [i,j] <- Vo [ii,j] }}
for (j in 1:nf)
{ jj <- j+np+ni
   { for (i in 1:np)
Vo_f [i,j] <- Vo [jj,i] }}
Vfs_i <- Vo_i % * % Vo_f
Vfp_i <- Vfs_i % * % solve(Cf)
write.csv (Vfp_i, file = "Vfp_i.csv", append = FALSE)
```