項目因子分析で構成した尺度の因子パターン，共通性，信頼性そして因子的真実性

清　水　和　秋　関西大学社会学部

Factor Pattern, Communality, Reliability, and Factor-Trueness of the Scale Constructed by Item-Factor Analysis

Kazuaki SHIMIZU　(Faculty of Sociology, Kansai University)

Exploratory factor analysis for items is used to establish meaningful factors underlying the multi-dimensional constructs. Checking the factor pattern matrix, the scales representing the factors are constructed. Automatically, alpha coefficients are reported as the reliabilities of such scales. The purpose of this study is to demonstrate that the scale reliability can directly calculate as the communality of this scale by the factor pattern matrix and inter-factor correlation matrix of item common factors. In single factor model, the square of the factor structure of a scale calculated by the correlation between the scale and the common factor is equal to the coefficient omega for the factor-based reliability of a scale by McDonald (1999). To expand the theory on the communality of a scale in the one dimensional space of items to in the multi-oblique-factor space, the factor structures and the factor patters of common factors of a scale are defined using item factor patterns and factor correlations. The scalar of the row vector of scale factor structures multiplied by the column vector of scale factor patterns is the communality and the reliability of this scale in the item-factor space. Examples of scale communalities and coefficients of factor-trueness are demonstrated with the script of R for scale statistics in item-factor space.

Key words: exploratory factor analysis, scale construction, factor structure, communality, omega

Kansai University Psychological Research
2010, No.1, pp.9-24

0. はじめに

測定の信頼性に関する議論は，今世紀に入って，新しい局面を迎えている。議論のポイントは α 係数（Crobach，1951）を信頼性の推定値として受け入れるかどうかにある。α の信頼区間を推定することにより，より確実な信頼性に関する情報を提供しようとする研究や提案がある（例えば，Duhachek & Iacobucci (2004)やFan & Tompson(2001)など)。心理測定の理論家の多くが，α 係数については，批判的な議論を展開している中で，積極的に活用することをSijtsma(2009)は提起した。この楽観的な問題提起に対して，Green & Yang(2009)は，Cattell & Tsujioka (1964) を引用しながら，強い反論を加えている。ポイントは，尺度の構造が α 係数の理論が仮定するような単純な１次元でないこと，測定の誤差間に相関があること，である。その結果として，α 係数の理論的仮定が現実のデータには当てはまらないとしている。Bentler(2009)も，主成分分析と因子分析モデルとを峻別することを主張しながら，因子分析をベースとする構造方程式モデリングの立場から，尺度を構成する項目の構造という観点からの信頼性の推定を強く主張している。Revelle & Zinbarg(2009)は，McDonald (1985, 1999)の ω（尺度分散に占める共通因子の分散）を推奨し，α 係数が簡便に計算できるように，統計ソフトのR（psychパッケージ）でも ω の計算が可能であることを紹介している。

心理学研究で典型的な尺度構成は，項目の因子分析

を行い，因子パターンの高い項目を選び出して，尺度を構成し，α 係数により信頼性を推定するという手順で行われる。この矛盾した事態の中で，心理測定の理論家は，上で紹介したように，α 係数を因子分析から説明しようとする立場と因子分析をベースとするモデルから信頼性を定義しようとする立場に別れている。

本稿では，構成した尺度の統計量を項目からの因子分析で得られた共通因子空間に布置してみることにする。そして，尺度の共通性に検討を加えてみることにする。このアイディアは，実は，Cattell & Tsujioka (1964)あるいは辻岡(1964)によるものである。彼らの議論は，等質性への批判としての抑制の原理と構成した尺度の方向を因子的真実性係数で定義することにあり，残念なことに，構成した尺度の共通性と信頼性の関係には十分に言及していなかった。

尺度構成の研究では，彼らの論文は，等質性にだけ焦点を当てることへの警鐘に加えて，項目を選択することの意味を広い文脈から議論するために引用されることがおおい。この立場からの項目分析は，項目の性質を因子空間において検討することになる。完全に単純な構造であれば，構成した尺度は因子と同じ方向を向くことになる。彼らは，尺度を構成する際に，等質的に小さくまとまっている項目群よりも，因子空間に広がりのある項目を合成するほうが，構成概念により適切でそして現実的であることを強調し，抑制の原理とこれによる項目分析の理論を提案している。信頼性の方法論では，このように，項目を選択するという操作も議論に加えないと本質的な姿を見失うのではないかと考えている。

本稿では，因子分析の理論から信頼性を考えるという視点を提供してみたい。そして，代表的な信頼性の推定方法である α 係数にかわる ω を，構成尺度の共通性という観点から紹介してみたい。なお，この内容の一部は，Shimizu(2007)と清水(2007)で発表している。

1. 因子的真実性：構成した尺度とその方向

辻岡(1964)は，心理学評論の特集「心理検査の諸問題」で，Cattell & Tsujioka(1964)による因子軸の方向への尺度構成の方法論「因子的真実性の原理」を紹介しながら，等質性の高い項目から尺度を合成することの危険性を次のように指摘している。長くなるが引用してみることにする。

「合成尺度の方向は欲する因子の方向からますますはなれ，特定の項目に近い方向の項目を純粋培養するようなものであり，等質性の原理は方向を失った船が大海を航行するが如きものになる。これはちょうどただ僚船が近くに沢山いるから自分の進行方向が正しいと信ずるにすぎない。人格の広汎な領域全部に対する準拠系を失い，ただ相寄り合うものが近くにいるということに安住を見いだしているにすぎないところの単発主義であり，構造主義的ではないといえるのである。このような項目培養は特殊因子分散を増大せしめ，不変性を低くする。(p.87)」

R.B. Cattellと辻岡の共同研究は，当初は，16P.F.の尺度の内部構造が等質的ではないと批判するComrey(1961)への反論を目的としたものであった。ポイントは 2 つあった。1 つは，内部の構造が等質的あることは尺度構成の必要条件ではなく，項目分析の対象となる項目を因子軸の方向に抑制する(suppress)ように合成することによって，構成した尺度が実質的な意味を因子と共有することのほうが重要であるという主張である。彼らは，「等質性の原理」による項目分析に対して，「因子的真実性(factor-trueness)の原理」として新しい方法を提案している。

もう 1 つは，構成した尺度と因子軸との一致の程度を因子的真実性係数として定義したことである。通常は因子分析を項目から行っている。構成した尺度の因子パターンや共通性を算出することなく，α 係数などによる信頼性の推定へと分析を進める。構成した尺度がどの方向を向いているかを顧みることはほとんどなかった。R.B. Cattellと辻岡の独創的な点は，構成した尺度の因子パターンや共通性を，項目の因子パターン（因子構造）や共通性そして因子間相関から計算できることを明らかにしたことである。そして，構成した尺度の共通性と因子構造との比から因子軸と構成した尺度との共通因子空間での方向のズレの程度を因子的真実性係数とした（辻岡・清水(1975)も参照)。

現代の心理尺度構成の現場では，因子パターンの値が高い項目を集めて尺度を構成することが望ましいとする神話が信じられている。特定の因子にだけ因子パターンをもつ純粋な（pure）項目によって尺度を構成すれば，高い等質性を期待することができるというものである(Comrey,1961)。

同義語反復のような項目を質問紙に並べることに意義を見いだせないように，純粋な項目だけからなる共通因子空間を期待することは，上で紹介したように現実的ではない。現実の因子分析結果では，項目は，共通因子の空間に夜空の星座のように布置しているのである。R.B. Cattellと辻岡とによる因子的真実性の原理は，この空間で尺度を合成するということについての

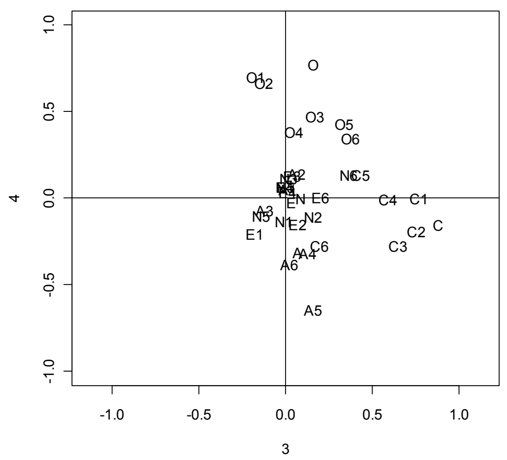

Figure 1 Two dimesional plot of item factor patterns and scale factor pattterns
C1～C6: items of Conscientiousness, C: scale constructed using these items
O1～O6: items of Openness to Experience, O: scale constructed using these items
The correlation between these factors is .161.

知恵であるといえよう。

本稿で取り上げる例題データから１つの結果（Figure1）をここで紹介しておくことにする。詳細は後ほどとして，概略だけを記すと，項目からの因子分析を行い，その結果から因子ごとに尺度を構成し，この尺度の因子パターンを本稿で紹介する方法で算出した。Figure１の縦軸ではO1～O6 の項目から尺度Oを，横軸ではC1～C6 から尺度Cを構成している。項目の因子分析から得られた２次元の空間に，構成した尺度を布置させたわけである。本稿では，尺度の共通因子空間における長さ（＝共通性）と因子軸のとの角度（＝因子的真実性係数）を項目の因子パターンなどから算出する方法を展開しながら，尺度の信頼性が尺度の共通性と等しくなることを明らかにする。そして，Figure1 のような共通因子空間で尺度を評価することの意義を議論してみることにする。

2. 古典的テスト理論による信頼性と共通性

1904 年にC.E. Spearmanは２つの論文（Spearman, 1904a,b）を発表している。同じ雑誌に掲載されたこの２つの論文をそれぞれの始まりとする古典的テスト理論（Classical Test Theory:以下CTTと略）と因子分析法（Factor Analysis:以下FAと略）とは，ほぼ１世紀にわたって独立した道を歩んできた。ここでは，CTTの古典的な定義を紹介し，FAから本稿の中心的テーマである信頼性に検討を加えてみることにする。

2.1 CTTでの信頼性係数の定義

ある観測変数の個人iの得点をx_iとする。真の測定対象であった得点t_iと観測にランダム関係する誤差e_iとから，この得点をCTTでは次のように表す。

(1)　$x_i = t_i + e_i$

誤差がランダムであり，真の得点と相関しないと仮定すると観測得点の分散は，真の得点の分散と誤差分散の和として表すことができる。すなわち，

(2)　$\sigma^2(x) = \sigma^2(t) + \sigma^2(e)$

である。この関係から信頼性係数は，次のように定義されてきた。

(3)　$\rho(x) = \dfrac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(x)} = 1 - \dfrac{\sigma^2(e)}{\sigma^2(x)}$

測定の信頼性は，このように１つの観測変数（＝尺度）を対象とした理論体系において構築されてきた。２つの未知の項を１つの既知の観測値から特定することはできない。CTTでは，強平行という不自然な仮定をおくことによって，再検査法，平行テスト法などから信頼性を推定する方法を提案してきた。尺度を構成する項目統計量から信頼性を推定する方法論としては，KR20 式やα係数などがある。これらの方法も，構成要素の内部構造をみることができないCTTの限界を越えるものではなかった。

2.2 CTTの信頼性推定：α係数

因子分析をおこない，その結果から尺度を構成し，信頼性をα係数で推定する，という手順は，心理学の研究方法の１つとして定着している。主因子法と主成分分析法との混同や回転を直交のVarimax法で止めるという誤用は，もはや過去の話となってきた。この状況の中でも，十分な共通理解に至っていないのが，尺度の構成と構成した尺度の評価を１つの理論体系の下で統一的に取り扱うという点にあるように思われる。

信頼性の推定値の下限を与えるα係数は，L.J.Cronbachの名前と共に心理学では最もよく知られている専門用語の１つではなだろうか。知られてこなかったことは，彼の論文（Cronbach, 1951）のオリジナリティについてである（Sijtsma,2009）。再検査と題として，L.Guttmanは，信頼性をλ_1からλ_6という記号を与えながら定義を行っている（Guttman,1945）。この中のλ_3がα係数と同値となることは，SPSSでも確認が可能である。内部一貫性としての信頼性についてのオリジナルな提案はL.Guttmanによると考えるべきではないだろうか。信頼性の下限に関しては，λ_4との議論（ten Berge &

Socan(2004)など）もあるが，ここでは，CTTの立場からみた信頼性をα係数の定義からその特徴を議論するに留める。

α係数は，n個の項目から尺度x_sが構成されるとすると，以下のように定義される。

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\left(x_j\right)}{\sigma^2\left(x_s\right)}\right)$$

$$(4)\qquad = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\left(x_j\right)}{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\left(x_j\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma\left(x_j x_k\right)}\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\left(x_j\right)}{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\left(x_j\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma\left(x_j\right)\sigma\left(x_k\right)\rho\left(x_j x_k\right)}\right)$$

すなわち，１から尺度の分散で項目分散の和を割った値を引き，これに，$n/(n\text{-}1)$を掛けてα係数を得ることができる。尺度の分散を個々の項目の分散と共分散で示したのが２段目である。共分散を相関係数で示した３段目から明らかなように項目間の相関がゼロとなると尺度の分散は，項目分散の和となり，αはゼロとなる。項目間の相関が高い場合には，項目を合成した尺度得点の分散が大きくなり，内部一貫性としての信頼性係数の値が高くなることがこの式から明らかである。

内部一貫性としての信頼性係数が，利用の面で成功を収めたのは，単純な統計量から簡単に計算が可能であるという点にある。因子分析の因子パターンとして，項目の構造を確認しているにもかかわらず，一般的なα係数の利用では，値の高低にだけ関心が集まる。

α係数を同族モデルから検討することも行われている（例えば，Lucke(2005)など）。関連して，τ等価の観点からの議論もあった（Jöreskog(1971)など）。CTTのこのような仮定をベースとしてα係数の意味を追求することは，それほど生産的なこととは思えない。次に，尺度を構成する項目の次元性と内部の構造を明らかにする方法としての因子分析から，尺度の信頼性を検討してみることにする。

2.3 FAからみた観測変数の信頼性

因子分析は複数の変数間に潜在する共通因子を探索あるいは確認するための方法論である。複数の変数に潜在する因子を探索する方法という表現もできる。構造方程式モデリング（あるいは共分散構造分析）の観点からは，原因としての潜在変数の因子が現象としての観測変数を引き起こしているとすることもできる。

共通因子モデル（Bollen(1989)など）を観測変数jの個人iについての得点をx_{ji}として，次のように表してみることにする。

$$(5)\qquad x_{ji} = \tau_j + \lambda_{j1}\eta_{1i} + \lambda_{j2}\eta_{2i} + \cdots + \lambda_{jm}\eta_{mi} + \varepsilon_{ji}$$

ここでτ_jは観測変数jの切片（あるいは平均）であり，$\lambda_{j1},\cdots,\lambda_{jm}$は観測変数$j$の$m$個の因子パターンであり，$\eta_{1i},\cdots,\eta_{mi}$は$m$個の個人$i$の因子得点である。そして，観測変数$j$の個人$i$の独自性得点は$\varepsilon_{ji}$とする。

観測変数jの分散を因子分析モデルで定義してみると次のように表すことができる。

$$(6)\qquad \begin{aligned}\sigma^2\left(x_j\right) &= h_j^2 + \theta_j^2\\ &= h_j^2 + s_j^2 + e_j^2\end{aligned}$$

すなわち，観測変数の分散を共通性h_j^2と独自性θ_j^2の和とするのが因子分析モデルであり，探索的因子分析ではn変数に潜在するm個の共通因子を求め，構造方程式モデリングでは，共通因子と独自性に関してデータとの適合度の良い仮説的モデルを検討する。

FAとCTTの違いとしてThurstone(1947)やLord & Novick(1968)などが指摘してきたことは，特殊性s_j^2の仮定にある。FAは共通因子空間の情報量をh_j^2として推定することで，観測変数に含まれる変数自体に付随する特殊分散を誤差分散e_j^2と合わせて，排除する方法を採用している。ここで注意しなければならないことは，FAのモデルはn個の観測変数の関係性において共通性を推定しているということである。

因子分析のモデルが生まれてきた背後には，C.E. Spearmanの追求が一般知能にだけ向かい，観測変数としての道具の情報には関心を払わなかったからではないだろうかと推測している。結果として，FAとCTTは異なった道を歩むことになった。この間隙を埋めようと因子分析の専門家たちは特殊性を取り扱うFAモデルの拡張を試みているようであるが，成功はしていない。既知の観測変数の情報から推定するパラメタの数が多くなりすぎて一意に解を推定する困難な課題を一般的なn変数の関係性だけから解決することができないからである。

観測変数jの信頼性をCTTのようにランダム誤差だけを除く形式で定義してみると次のように表すことができる。

(7)　$\rho(x_j)=\dfrac{h_j^2+s_j^2}{\sigma^2(x_j)}=1-\dfrac{e_j^2}{\sigma^2(x_j)}$

観測変数の分散をランダム誤差の分散から分離することができないFAでは，この式は成り立たない。因子分析モデルでの信頼性は次の式から定義することになる。

(8)　$\rho(x_j)=\dfrac{h_j^2}{\sigma^2(x_j)}=1-\dfrac{\theta_j^2}{\sigma^2(x_j)}=1-\dfrac{s_j^2+e_j^2}{\sigma^2(x_j)}$

特殊性の分散は，CTTでは真の得点の分散に含まれている。FAは，共通性を推定するという操作を行うことにより，特殊性とランダム誤差の和として独自性（θ_j^2）をモデルから排除している。この結果，FAの共通性だけからその観測変数の信頼性を定義すると，CTTよりも特殊性分だけ小さくなるようにみえる。なお，標準形式でのFAモデルでは，観測変数の分散は１であるので，共通性が信頼性でもある。

2.4 FAと主成分分析モデルなどとの比較

FAとの類似性が指摘されてきた主成分分析は，モデル項の部分とランダム誤差の和からなり，特殊性の項がないFAの変形モデルと解されることもある。項目の信頼性という観点からは，FAよりは高い値を期待できることは，(7)式に当てはめて考えてみれば明らかである。

特殊性は観測変数jに固有な分散であり，個々の観測変数ごとに独立に定義されるものである。FAは，これまでにも述べてきたように，n個の変数に潜在する共通因子をモデル化している。ここに，１つの変数だけに関係する分散を取り込むことは，FAのモデルに反するだけではなく，誤った結果を導くことになりかねない。

信頼性という観点からは損をしているようにみえるFAであるが，独自性を特殊性とランダム誤差との和としたことによって，独自性間に共分散（あるいは相関）を仮定する道を残した。ランダム誤差が互いに相関することは仮定しにくいが，信頼できる分散として定義されてきた特殊性間に共分散を仮定することはそれほど不自然ではないからである。

項目のワーディングにより特殊な分散が混入することはよく知られている（例えば，清水・柴田（2008）や清水・吉田(2008)など)。再検査での繰り返し測定間の共分散は，このような特殊性間の共分散と考えることができよう（例えば，清水・花井(2008)や清水・山本（2008）など)。特殊性とランダム誤差との分離には成功していないが，独自性という潜在変数を仮定することにより，FAそして構造方程式モデリングは，心理測定においてより柔軟なモデル化の道を拓いたと考えている。

項目応答理論（Item Response Theory）は，古典的テスト理論をベースとして，モデルの項とランダム誤差の和から構成されている。項目特性に関する困難度と識別力のパラメタを推定するこの方法論では，分析の対象とする項目群が１次元性であることを強い条件としており，項目の特殊性の存在を想定していない。このため，項目間に潜在する共通性を想定していないこのモデルからの信頼性は，FAよりは主成分分析からの結果に近いと予想される。

3. 共通因子空間における尺度

探索的因子分析の因子パターン行列から因子に対応した尺度の構成がおこなわれている。項目の共通因子空間での構造を因子パターン行列で確認しているにもかかわらず、内的整合性の原理による項目分析をさらに適用して、構成した尺度と項目との相関係数を報告することもある。本稿では，因子分析で構成した尺度の統計量を、共通因子の用語で統一的に取り扱ってみることにする。

ここでは，n個の項目を対象として探索的因子分析を行い，m個の因子が得られたものとする。このm次元の共通因子には，n項目が布置している。ここに構成したm個の尺度を布置させてみることにする。その手がかりを，構成した尺度と因子との相関，すなわち因子構造とする。これに因子間相関の逆行列を掛けることにより尺度の因子パターンを求め，尺度の共通性を算出してみることにする。

3.1 共通因子が１次元の尺度

因子の数が１（$m=1$）の場合について，まず，検討してみることにする。ここでは，項目jの得点をx_{ji}としてp個の項目の合計を尺度得点x_{si}として次のように表す。

(9)
$$\begin{aligned} x_{si} &= x_{1i}+x_{2i}+\cdots+x_{ji}+\cdots+x_{pi} \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_{ji} \end{aligned}$$

なお，因子分析結果から項目の選択が行われなかった場合には$p=n$であり，n項目からp個を選択した場合には$p \neq n$である。

個々の項目を１次元の因子として因子分析モデルで

次のように表してみることにする。

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
x_{1i} &= \tau_1 + \lambda_{11}\eta_{1i} + \varepsilon_{1i} \\
x_{2i} &= \tau_2 + \lambda_{21}\eta_{1i} + \varepsilon_{2i} \\
&\cdots \\
x_{ji} &= \tau_j + \lambda_{j1}\eta_{1i} + \varepsilon_{ji} \\
&\cdots \\
x_{pi} &= \tau_p + \lambda_{p1}\eta_{1i} + \varepsilon_{pi}
\end{aligned}
$$

ここで項目j について説明すると τ_j は切片であり，λ_{j1} は第 1 因子の因子パターンである。潜在変数である因子得点は η_{1i} であり，これは全ての変数に共通している。独自性は変数ごとに異なり， ε_{ji} は項目j の独自性得点である。

次に，尺度得点を項目の因子分析モデルで表すために，(9)式に(10)式の関係を代入して整理してみる。

$$
(11)\quad x_{si} = \sum_{j=1}^{p}\tau_j + \eta_{1i}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1} + \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{ji}
$$

共通因子分析モデルの定義（例えば，Harman(1967), McDonald(1985)やThurstone(1947)など）に従い，ここでは，因子得点の平均と独自性得点の平均をゼロと置くことにする。これにより尺度得点の平均は，個々の項目の切片の合計として表すことができる。すなわち，

$$
(12)\quad \bar{x}_s = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p}\tau_j = \sum_{j=1}^{p}\tau_j
$$

となる。

尺度の分散は，以上の関係から次のように展開することができる。

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
\sigma^2(x_s) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{si} - \bar{x}_s)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{p}\tau_j + \eta_{1i}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1} + \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{ji} - \sum_{j=1}^{p}\tau_j\right)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\eta_{1i}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\right)^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{ji}\right)^2 \\
&\quad + 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\eta_{1i}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{ji}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j^2
\end{aligned}
$$

この結果，尺度の分散は，因子パターンの合計の平方と独自性の平方の和として表すことができることになった。

次に，尺度と因子との共分散を同様に求めてみることにする。ここでも，共通因子分析モデルとして，因子得点の平均をゼロ，そして，因子分散を1と置き，独自性と因子得点が無相関の関係にあるとする。

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
\sigma(x_s, \eta_1) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{si} - \bar{x}_s)(\eta_{1i}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\eta_{1i}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1} + \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{ji}\right)(\eta_{1i}) \\
&= \sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_{1i}{}^2 + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ji}\eta_{1i} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_{i1}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}
\end{aligned}
$$

この結果，因子パターンの和が，構成した尺度と因子との共分散となる。

潜在変数である因子と観測変数との相関は，因子分析の文脈では，因子構造（例えば，Harman(1967)あるいは清水(2003)など）と呼ばれれる。

以上の準備を踏まえて，次に，構成した尺度と因子との相関係数を求めてみることにする。これは(14)式の共分散をそれぞれの標準偏差で割ることによって求めることができる。ここでも，因子の標準偏差を1として，標準形式でのモデルとすると，次の式から相関係数を得ることができる。

$$
(15)\quad \rho(x_s, \eta) = \frac{\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j^2}}
$$

1 因子の共通因子分析モデルでは，因子構造の値と因子パターンの値は一致する。そして，この値を2乗すると、この変数の共通性 h_s^2 となる。このようにして，項目の因子分析から抽出した共通因子空間に尺度の共通性を得ることができたわけである。この値は、McDonald (1999, p.89)が尺度の分散に対する因子の分散の比として定義したωに一致する。すなわち、

$$
(16)\quad h_s^2 = \omega = \frac{\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j^2}
$$

である。

3.2 多次元共通因子に対応する尺度

項目からの因子分析では，1 次元というのは特殊な場合である。通常はm個の共通因子を抽出し，回転を行い，その結果から尺度を構成することになる。(9)式から(16)式までの 1 次元の展開をm次元に拡張するこ

とを次に検討してみたい。

ωに関しては，一般因子と群因子からなる階層的なモデルがMcDonald (1999)によって展開されている。このモデルに関しては，Zinbarg, Revella, Yovel, & Li (2005)，Zinbarg, Yovel, Revella, & McDonald (2006)やZinbarg, Revell, & Yovel (2007)などいくつかの検討が行われている。ここでは，一般的なm個の因子からなる共通因子モデルを対象とする。モデルをm因子に拡張して次のように表すことにする。

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
x_{1i} &= \tau_1 + \lambda_{11}\eta_{1i} + \lambda_{12}\eta_{2i} + \cdots + \lambda_{1k}\eta_{ki} + \cdots + \lambda_{1m}\eta_{mi} + \varepsilon_{1i} \\
x_{2i} &= \tau_2 + \lambda_{21}\eta_{1i} + \lambda_{22}\eta_{2i} + \cdots + \lambda_{2k}\eta_{ki} + \cdots + \lambda_{2m}\eta_{mi} + \varepsilon_{2i} \\
&\cdots \\
x_{ji} &= \tau_j + \lambda_{j1}\eta_{1i} + \lambda_{j2}\eta_{2i} + \cdots + \lambda_{jk}\eta_{ki} + \cdots + \lambda_{jm}\eta_{mi} + \varepsilon_{ji} \\
&\cdots \\
x_{ni} &= \tau_n + \lambda_{n1}\eta_{1i} + \lambda_{n2}\eta_{2i} + \cdots + \lambda_{nk}\eta_{ki} + \cdots + \lambda_{nm}\eta_{mi} + \varepsilon_{ni}
\end{aligned}
$$

ここでの因子分析はn個の項目を対象としたものであり，$\lambda_{jk}\eta_{ki}$は，変数jの第k因子の因子パターンと個人iの第k番目の因子得点を掛けた項である。その他の項については，(10)式と基本的には同じであるので説明は省略する。(17)式のスカラー表記をベクトル（項目と切片，そして，独自性の次数はn，因子得点はm）と因子パターン行列（次数は（$n\times m$））とで，次のように表してみることにする。

$$
(18)\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}
$$

スカラー表記では多次元モデルは記号が煩雑なるので，以下では，辻岡・清水(1975)のように行列で展開することにする。ただし，ここではランダム変数としての表記を採用する（例えば，Bollen(1989)，Mulaik(2010)や柳井・繁桝・前川・市川(1990)など参照)。

次に，仮に，n個の中から第k番目の因子に高い因子パターンを持つ項目としてp個の項目が選択されたものとする。なお，このpは，因子によって異なる数となることもある。

選択された項目の得点をベクトルで${}_k\boldsymbol{x}$と表し，第k因子を対象にしてp個の項目から構成される尺度得点を${}_k x_i$と表す。この得点は次のように計算することができる。

$$
(19)\quad
\begin{aligned}
{}_k x_i &= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{1}'\left({}_k\boldsymbol{\tau} + {}_k\boldsymbol{\Lambda\eta} + {}_k\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_t\boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{1}'{}_t\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

ここで、${}_k\boldsymbol{\Lambda}$は、$\boldsymbol{\Lambda}$の中から選ばれたp個の項目についてだけの因子パターン行列である。$\boldsymbol{\eta}$は因子得点ベクトルであり、m個の因子からなる。${}_k\boldsymbol{\tau}$と${}_k\boldsymbol{\varepsilon}$は、$p$個の項目の切片のベクトルと独自性得点のベクトルである。この式での$\boldsymbol{1}'$は、p個の1からなる単位列ベクトルを転置した行ベクトルである。

次に，選ばれたp個の項目から構成した尺度の平均と分散を求めてみることにする。ここでの展開では，確率変数ベクトルとして得点を取り扱うので，以下の計算では，期待値による展開をとる。

まず，この尺度の平均は，次のように表すことができる。

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
{}_k\bar{x} &= E[\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{x}] \\
&= E[\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_t\boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{1}'{}_t\boldsymbol{\varepsilon}] \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_t\boldsymbol{\Lambda}E[\boldsymbol{\eta}] + \boldsymbol{1}'E[{}_t\boldsymbol{\varepsilon}] \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau}
\end{aligned}
$$

因子得点と独自性の平均をゼロと置くので，尺度の平均は，該当する項目の切片の合計となる。次に，これを踏まえて，尺度の分散を次のように求めてみることにする。

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
\sigma^2\left({}_k x\right) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left({}_k x_i - {}_k\bar{x}\right)^2 \\
&= E\Big[\left[(\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau}\right] \\
&\qquad \left[(\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau}\right]'\Big] \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda}E[\boldsymbol{\eta\eta}']_k\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'E\left[{}_k\boldsymbol{\varepsilon}\,{}_k\boldsymbol{\varepsilon}'\right]\boldsymbol{1} \\
&\qquad + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda}E[\boldsymbol{\eta}\,{}_k\boldsymbol{\varepsilon}']\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'E\left[{}_k\boldsymbol{\varepsilon\eta}'\right]_k\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{1} \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}\,{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{1}
\end{aligned}
$$

ここで$\boldsymbol{\Phi}$は因子間相関行列であり，${}_k\boldsymbol{\Theta}$は対角項がp個の項目の独自性からなる対角行列である。

さらに構成した尺度と因子得点との共分散を求めてみることにする。ここでも共通因子分析モデルとして，因子と独自性とが独立であるとすると次のようになる。ここでは，尺度得点とm個の因子得点との共分散を求めるので，次数mのベクトルで表すことにする。

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
E[{}_k x\boldsymbol{\eta}'] &= E\left[\left((\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\tau}\right)\boldsymbol{\eta}'\right] \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda}E[\boldsymbol{\eta\eta}'] + \boldsymbol{1}'E\left[{}_k\boldsymbol{\varepsilon\eta}'\right] \\
&= \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}
\end{aligned}
$$

以上から，第k番目に因子を対象に選択されたp個の項目から構成された尺度と因子との相関、すなわち尺度の因子構造をm次のベクトルで表すと次のようになる。なお，ここでは，共分散ベクトルを，尺度の標準偏差（(21式)の平方根）で割っている。

$$
(23)\quad {}_k\boldsymbol{v}_{fs}{}' = \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{1}}}
$$

尺度のm因子の因子パターンベクトルは、因子構造ベクトルに因子間相関行列の逆行列を掛けて計算することができる。すなわち，

$$
\begin{aligned}
{}_k\boldsymbol{v}_{fp}{}' &= {}_k\boldsymbol{v}_{fs}{}'\boldsymbol{\Phi}^{-1} \\
&= \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}}
\end{aligned} \tag{24}
$$

である。斜交因子では，変数の共通性は，この変数の因子パターンベクトルを取り出し，これに因子間相関行列を掛け、さらに因子パターンベクトルの転置を掛けることによって、計算することができる。この計算は，因子構造ベクトルに因子パターンベクトルの転置を掛けることと同じである。第k因子を対象にして構成した尺度の共通性は，次のように展開することができる。

$$
\begin{aligned}
h_k^2 &= {}_k\boldsymbol{v}_{fp}{}'\boldsymbol{\Phi}{}_k\boldsymbol{v}_{fp}\left(= {}_k\boldsymbol{v}_{fs}{}'{}_k\boldsymbol{v}_{fp}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}_{kt}\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}}\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} \\
&\qquad \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}} \\
&= \frac{\mathbf{1}'{}_t\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_t\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1}}{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}
\end{aligned} \tag{25}
$$

多因子モデルでの共通性を、構成尺度においても定義することができたわけであり、多次元空間でこの尺度の布置を確認しながら、信頼性の推定値を得ることができることになる。なお，この(25)式でm=1 とする 1 因子モデルは，(16)式を行列表記し，$\boldsymbol{\Phi}$ をスカラーで値を 1 とおいたωに一致する。

CTTの枠組みからみる信頼性は，尺度の分散に占める真の分散の割合として定義されてきた。真の分散に代わって具体的に操作可能な共通因子の分散から信頼性を定義したω（McDonald,1985,1999)も，このCTTの枠組みに従っているといえよう。ここで紹介してきたCattell & Tsujioka(1964)あるいは辻岡(1964)の発想は，共通因子空間において，構成した尺度を，そのベクトルの長さ（＝共通性）とベクトルの向かう方向（＝因子的真実性係数）から評価しようとするものであった。本稿で展開してきたように，独立に歩んできたこの 2 つは，結果として，同じ結論に至ったわけである。

3.3 因子的真実性係数

因子的真実性係数r_{ft}の値は、構成尺度の方向と因子の方向との角度のずれの余弦（cosine）で表される（Cattell & Tsujioka, 1964: 辻岡, 1964)。因子空間における尺度の位置を共通性の平方とし、これをOTと表す。因子構造は、この尺度の当該因子への垂線の交わる点の値であり、これをOSと表すと因子的真実性係数は次の式で計算することができる。

$$
r_{ft} = \cos\alpha = \frac{OS}{OT} = \frac{v_{fs}}{\sqrt{h^2}} \tag{26}
$$

1 次元のモデルでは、構成した尺度もこの因子の軸の上に乗らざるをえないわけで、因子的に真実な尺度の構成へと必然的に導かれる。尺度の構成の正否は、尺度の因子パターンの値、あるいは、共通性の値において，評価することができる。

多因子での因子的真実性係数は、共通性（＝ω）の平方根で尺度の因子構造の値を割った値となる。すなわち、構成した尺度の方向と因子の方向との余弦を次のように計算することができる。ここでは，m因子の因子的真実性係数ベクトルを計算してみることにする。

$$
{}_k\boldsymbol{r}_{ft} = \frac{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}}}{\sqrt{\dfrac{\mathbf{1}'{}_t\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_t\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1}}{\mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Lambda\Phi}{}_k\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'{}_k\boldsymbol{\Theta}\mathbf{1}}}} \tag{27}
$$

このm個からなるベクトルの中で第k番目の値が, 興味の対象である尺度を構成しようとした因子と構成した尺度との方向余弦に相当する。残りの値も，構成した尺度とm-1 個の因子との方向余弦である。対象としたk因子での値が 1 に近く，残りがゼロに近くなるならば，完全な単純構造の尺度を構成することができたことになる。

辻岡・清水(1975)では，延長因子分析を対象として因子的真実性係数とこれによる項目分析の方法を展開した。この時代にはコンピュータの性能の関係もあり，項目からの因子分析は数が多くなると計算が不可能であり，尺度をいくつかの下位尺度に分割し，これを対象として因子分析を行うことが一般的であった。このようにして得られた共通因子空間に因子と項目との相関を手がかりに項目の因子構造を算出し，項目の因子パターンに変換する方法が延長因子分析であった。因子的真実性の原理による項目分析では，この項目の因子空間の情報を使って，新しい尺度を因子軸の方向性を勘案しながら構成することができた。この方法論で強調してきたのは構成した因子の方向であり，(25)式の共通性は，これを計算するための途中の情報という程度の扱いであった。本稿では，この共通性に新しい視点から検討を加えてみたわけである。

探索的因子分析を項目を対象として行い，この結果

から尺度を構成するという手順を踏む場合には，構成した尺度の評価には，信頼性に加えて，尺度の方向性を加えるべきである。そうすることで，尺度構成の評価のための統計量は，本稿で展開してきたように，因子分析の理論体系の中で統一的に取り扱うことができるようになる。

実際のデータにこの方法を適用してみることにする。辻岡・清水(1975)では，FORTRANのリストを提供したが，ここでは，Rで計算を行い，このスクリプトを付録として付けることにする。

4. 適用例

探索的因子分析結果からの尺度構成が本稿の目的である。ここでは，清水・山本(2007)のBig Five形容詞短縮版 2005 を例として取り上げてみる。この研究では，関西大学社会学部心理学専攻の授業で 2005 年 6 月から 7 月に，Big Five形容詞版 2005（7 件法 30 項目）の調査を行っている。調査への参加に同意した対象者は 226 人であった。結果の詳細は，清水・山本(2007)あるいは山本(2008)を参照してもらうこととして，ここでは，因子分析結果だけを引用する（清水・山本(2007,p.68)の表 1 より）。

探索的因子分析では，スクリー・グラフから因子数を 5 とし，主因子法の繰り返しにより共通性を推定した。この主因子解をVarimax法で直交回転し，さらにPromax法で斜交回転した。この結果がTable 1 であ

Table 1 Factor Pattens and Correlations among Factors of Big Five Adjective Short Form 2005

item sfactors	N	E	C	O	A	communatlity
N1 不安になりやすい	**0.866**	-0.020	-0.012	-0.128	0.025	0.806
N2 心配性な	**0.783**	0.073	0.156	-0.099	0.004	0.593
N3 傷つきやすい	**0.768**	0.061	0.017	0.123	0.052	0.549
N4 悩みがちな	**0.768**	-0.058	-0.006	0.074	0.018	0.611
N5 動揺しやすい	**0.600**	-0.022	-0.145	-0.097	0.035	0.436
N6 神経質な	**0.529**	-0.121	0.363	0.141	-0.171	0.427
E1 もの静かな*	0.061	**0.876**	-0.178	-0.201	-0.134	0.748
E2 控えめな*	-0.071	**0.699**	0.065	-0.142	-0.285	0.561
E3 外向的な	-0.042	**0.698**	0.035	0.135	0.189	0.646
E4 話し好きな	0.133	**0.670**	0.012	0.044	0.161	0.453
E5 陽気な	-0.037	**0.646**	0.000	0.074	0.225	0.535
E6 内気な*	-0.319	**0.527**	0.201	0.012	-0.119	0.554
C1 責任感のある	0.085	0.058	**0.769**	0.005	-0.040	0.569
C2 無責任な*	0.037	0.107	**0.750**	-0.184	0.083	0.599
C3 ルーズな*	0.015	-0.015	**0.645**	-0.269	-0.021	0.426
C4 勤勉な	0.169	-0.046	**0.588**	0.001	0.021	0.362
C5 集中力がある	-0.204	-0.123	**0.432**	0.141	-0.073	0.258
C6 あきっぽい*	0.030	-0.061	**0.192**	-0.269	0.087	0.117
O1 独創的な	-0.078	-0.120	-0.177	**0.705**	0.146	0.507
O2 想像力に富んだ	0.001	0.034	-0.125	**0.674**	0.086	0.474
O3 美的感覚の鋭い	-0.061	-0.198	0.166	**0.481**	0.014	0.278
O4 好奇心が強い	-0.025	0.297	0.047	**0.391**	0.123	0.338
O5 洞察力のある	-0.013	0.047	0.335	**0.435**	-0.108	0.361
O6 機転のきく	-0.274	0.027	0.373	**0.354**	0.081	0.488
A1 親切な	0.154	0.084	0.009	0.057	**0.831**	0.709
A2 やさしい	0.135	0.091	0.063	0.145	**0.781**	0.705
A3 寛大な	-0.129	-0.006	-0.122	-0.062	**0.622**	0.374
A4 わがままな*	-0.148	-0.123	0.126	-0.313	**0.434**	0.332
A5 反抗的な*	-0.174	-0.148	0.155	-0.637	**0.328**	0.547
A6 批判的な*	-0.090	0.056	0.019	-0.375	**0.293**	0.196
Neuroticism(N)	1.000	-0.347	-0.128	-0.132	-0.123	
Extraversion(E)	-0.347	1.000	0.051	0.274	0.034	
Conscientiousness(C)	-0.128	0.051	1.000	0.161	0.342	
OpennesstoExperience(O)	-0.132	0.274	0.161	1.000	0.158	
Agreeableness(A)	-0.123	0.034	0.342	0.158	1.000	

Note: * is reversed item.

る。この分析では，SPSS ver. 13 を使用している。Big Fiveの構成概念にほぼ対応する 5 因子が得られた。第 1 因子（情動性因子：Neuroticism）と第 2 因子（外向性因子：Extraversion）は，それぞれ 6 項目の単純構造の結果となった。第 3 因子（誠実性因子：Conscientiousness）は 5 項目，第 4 因子（開放性因子：Openness to Experience）と第 5 因子（協調性因子：Agreeableness）は 4 項目からなると考えるほうが妥当なようである。詳細は山本(2008)を参照されたい。ここでは，全ての因子が仮説通りであるとして，各因子とも 6 項目で尺度構成を行うことにした。

Table 2 が α 係数（$=\lambda_3$）と(25)式から計算される ω とを比較した表である。第 1 因子と第 2 因子のNとEは，因子パターンが非常に高い値を示している。これらの尺度では，ω も α も.8 を越える値である。Table3 の尺度の因子パターンをみると，NとEはほぼ完全な単純構造を示している。これらの因子的真実性係数も極めて高い値となった（Table5）。因子的真実性係数は構成した尺度と因子との角度でもあり，この係数が高くなれば，Table5 の値は，Table1 の因子間相関に近づく。

Table 2 Reliability indeces of Big Five Scales by EFA

scale	λ_3	ω
Neuroticism(N)	0.859	0.879
Extraversion(E)	0.843	0.876
Conscientiousness(C)	0.717	0.753
OpennesstoExperience(O)	0.705	0.767
Agreeableness(A)	0.750	0.789

Note: *1 λ_3 is formulated by Guttman(1945).
λ_3 is the same as the coefficient α by Cronbach(1951).

Figure2 は，NとEの因子パターンを図示したものである。項目の因子パターンにはNあるいはEの記号に項目番号の数字を与えている（Table 1 も参照）。因子間の相関は-.347 であるが，図示の都合上ここでは直

Table 3 Factor Patterns and Communalities of Constracted Scales

scale	N	E	C	O	A	communality
Neuroticism(N)	**0.937**	-0.019	0.081	0.003	-0.008	**0.879**
Extraversion(E)	-0.061	**0.915**	0.030	-0.017	0.008	**0.876**
Conscientiousness(C)	0.034	-0.021	**0.877**	-0.149	0.015	**0.753**
OpennesstoExperience(O)	-0.115	0.022	0.159	**0.779**	0.088	**0.767**
Agreeableness(A)	-0.065	-0.012	0.065	-0.307	**0.853**	**0.789**

Table 4 Factor Structures of Constracted Scales

scale	N	E	C	O	A
Neuroticism(N)	0.934	-0.339	-0.042	-0.114	-0.096
Extraversion(E)	-0.381	0.934	0.085	0.247	0.054
Conscientiousness(C)	-0.053	-0.028	0.853	-0.016	0.286
OpennesstoExperience(O)	-0.257	0.287	0.330	0.840	0.280
Agreeableness(A)	-0.134	-0.042	0.315	-0.157	0.834

Table 5 Coefficients of Factor-Truenesses for Constracted Scales

scale	N	E	C	O	A
Neuroticism(N)	**0.996**	-0.362	-0.045	-0.122	-0.102
Extraversion(E)	-0.407	**0.997**	0.091	0.264	0.058
Conscientiousness(C)	-0.061	-0.032	**0.982**	-0.018	0.330
OpennesstoExperience(O)	-0.293	0.327	0.377	**0.959**	0.319
Agreeableness(A)	-0.150	-0.047	0.354	-0.177	**0.939**

角に 2 つの因子軸を交差させて描いている。合成の対象となった項目群の中心を延長したあたりに構成した尺度が布置している。

因子パターンに低い値があったCやOそしてAの信頼性は.7 台となった。このCとOの因子を 2 次元でプロットしたのがFigure1 であった。NやEと比べると，CとOは空間上に大きく広がっていた。等質性という観点からみた違いが，これらの 2 つの図に端的に現れている。α の値からみれば，OやCの尺度は，それほど良いとはいえない。(4)式でみたように，α 係数が高くなる条件は，項目間の相関が正で高いことであった。Figure2 のEやNの項目群と比べて，CやOの項目は互いに相関の程度がそれほど高くないことがこの α 係数の数値に反映されているわけである。

CとOは，EやNと同じように，因子空間上の位置をみると項目の合成としての尺度の構成は成功している。項目が因子空間上に広がって布置していても，Cattell & Tsujioka (1964)あるいは辻岡(1964)が抑制の原理から説明しているように，合成することによって尺度としてまとめることができるわけである。この操作の適否は，構成した尺度の因子空間上での長さと位置，すなわち共通性（Table3 の右端）と因子的真実性係数（Table5）の値から評価されることになる。CやOは，NやEと比べると値は少々低くなるが，α 係数からみえる姿とは異なり，尺度の構成としては，成功しているといえそうである。

Figure3 ではAとOを図示してみた。Aは，Table2 では｛E・N｝と｛C・O｝の中間的な傾向を示していたが，Table3 の因子パターンの値は，Cよりも低い。Table5 の因子的真実性係数では，5 つの尺度中で最も悪い数値である。このAは単純構造ではなく，因子Oで-.307 の因子パターンの値を示している。この図から項目A5 が，尺度の因子軸からのずれを引き起こしているのではないかと読み取ることができる。

そこで，項目選択を試みてみることにする。ただし，ここでは，Oのマイナス方向に布置しているA5 の項目を尺度から除外して，尺度に関する統計量を再計算することにとどめる。その結果では，構成した尺度の共通性（＝ω）は.766 と若干低くなるが，O因子の因子パターンは-.164 となり，A因子の因子的真実性係数は.984 となり，尺度の方向性を改善することができた。項目と尺度の意味内容に関する議論は，清水・山本(2008)と山本(2008)を参照されたい。ここで分析の対象とした項目群は，その後，Big Five形容詞短縮版 2006 として改訂している。

因子分析では，Table1 のような因子パターンの表から結果を解釈することがおおい。図でこの結果を詳細に検討するべきであることは，ここで紹介した 3 つの図からも明らかである。現実には，しかしながら，図での検討が行われてこなかった。その理由は，斜交の座標軸をその角度を再現して描くことがPC上では困難な課題であったからかもしれない。古典的な因子分析の世界では，Thurstone(1947)が導入した準拠軸の体系から描き出すことは可能である（例えば，Mulaik(2010)や清水(2003)と久本(2003)を参照。)。準拠軸体系での準拠構造は因子軸体系の因子パターンと

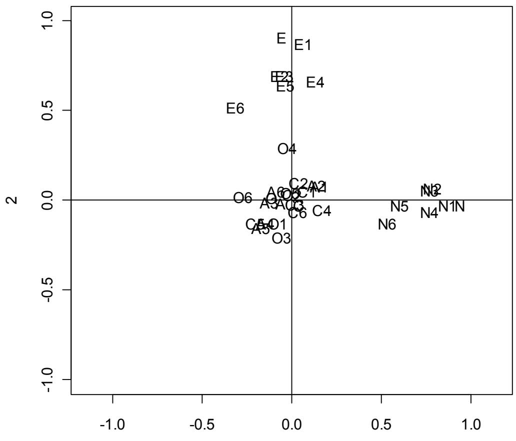

Figure 2 Two dimesional plot of item factor patterns and scale factor pattterns
E1～E6: items of Extraversion, E: scale constructed using these items
N1～N6: items of Extraversion, N: scale constructed using these items
The correlation between these factors is −.347.

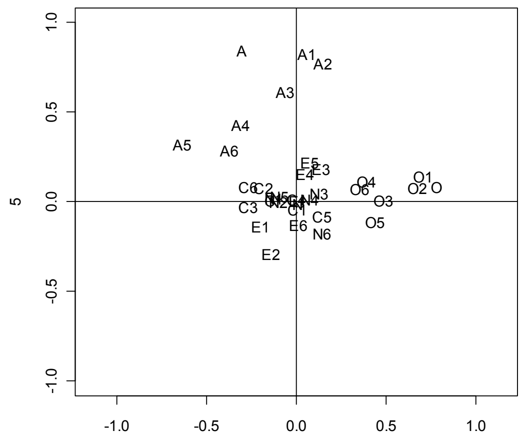

Figure 3 Two dimesional plot of item factor patterns and scale factor pattterns
A1～A6: items of Agreeableness, A: scale constructed using these items
O1～O6: items of Openness to Experience, O: scale constructed using these items
The correlation between these factors is .158.

は比例関係にあり，m-1次元の超平面から直交で立てた準拠軸を活用することで，直交の2次元座標軸での因子の回転を行っていた。辻岡・清水(1975)のように，本稿では，因子軸体系の中での展開としたので，Rによる図の表示には，因子間の角度が反映されていない。結果の解釈では，この点に注意しなければならない。

5. おわりに

心理学の測定では，CTTが仮定した観測得点を真の得点とランダム誤差の和とするモデルは，現実的ではないのではないだろうか。十分に大きなNの数と理想的な分布を条件としてモデルは構築されてきた。現実に研究者が手にできるのは，大規模な調査でない限り，この条件下では限定されたデータとなる。CTTによる信頼性の定義と推定の方法論は，何枚もの靴下を重ねてはいるようなもので，足下でおきている現実には直接には触れることができなかったといえるのではないだろうか。

因子分析の立場から信頼性にアプローチしようとする研究はCarmines & Zeller(1979)がまとめているように，数多くの用語を生み出してきた。θやΩなどのような係数は，しかしながら，実際の応用研究では使用されることはほとんどなかった。共通性に特殊性を足すことで真の得点の分散に近づくことが，CTTの文脈に従う限りは，理想の姿のようにみえる。特殊性を誤差項に独自性として括ることは，信頼性の推定値がCTTによるものよりも低くなるではないかと推測されてきた。C.E. Spearmanの2つの論文の間を行き来するだけで，このような試みからは，最終的な回答を手にすることができなかったわけである。

Spearman(1904b)の因子分析の立場に明確に立つことによって，そして，Cattell & Tsujioka (1964)とMcDonald(1999)の提案に従えば，ここで展開してきたようにCTTよりも因子と構成した尺度との関係性という適切な評価基準を加えて信頼性を手に入れることができるわけである。

項目の共通性は，Table1に示したように，それほど高くない。.7を上回る項目は，30項目中で4個だけである。個々の項目の信頼性は低くとも，項目を合成することによって尺度を構成し，より高いレベルの信頼性を確保することができることをSpearman-Brownの公式が明らかにしている。今回の結果でも，共通因子空間では構成した尺度のベクトルが個々の項目のものよりも図にあるように長くなった。構成要素である項目と尺度の共通性の関係は，(25)式にあるように単純なものではない。この標準誤差の推定も残された課題ではあるが，項目から得られた共通因子空間に尺度を布置させる方法の有効性は明らかである。

信頼性(reliability)を総合的で統一的な座標軸から議論を展開したのはC.E. Spearmanから博士論文の指導を受けたR.B. Cattellである。彼は，整合性（consistency）という独自な用語を導入し，時間，変数，対象者の3次元の軸を設定している(Cattell,1964)。この中で，狭義の信頼性を時間軸の再検査信頼性に限定し安定性（stability）と，変数間において得られる信頼性を等質性(homogeneity)と呼んでいる。さらに，対象者間に不変な転移可能性（transferability）という3つ目の下位概念導入している。R.B. Cattellの体系は，その重要性にもかかわらず，それほどの注目を集めることはなかった。その理由を，信頼性を，心理測定の理論家も，応用的研究者も，古典的テスト理論に強く結びつけてきたという点にあるのではないかと推測している。因子分析とその延長である構造方程式モデリングからR.B. Cattellのこの体系を現実のデータ解析の場面において統一的に取り扱うことができるのではないかと考えている。

本稿では，変数の軸での尺度構成とその評価を構成した尺度の共通性と因子的真実性係数から展開してきた。探索的因子分析から得られた因子の方向性は，当然のこととして，対象とした標本の制約をうけることになる。1つの標本のみから因子の軸の方向を定めることには誰しも不安を感じるはずである。これをR.B. Cattellは転移可能性という用語で説明しようとした。測定の内容が対象者間に転移が可能であるかを整合性の1つの条件としたわけである。現代の因子分析の世界では，この転移可能性は，因子的不変性（factorial invariance）に相当するのではないだろうか。

複数の標本の同時分析によって因子的不変性を検証する方法論は，既に確立している（例えば，清水(2003)など）因子分析モデルをベースとする信頼性の推定の方法は，構造方程式モデリングに簡単に置き換えることができることを多くの研究者が明らかにしている（例えば，Bentler(2009)やKano & Azuma(2003)あるいはRaykov(1997,2001)など）。これらを組み合わせることで，確実な因子の軸の方向性を確認することができると考えている。

時間軸においても因子的不変性を検討する方法論は，Jöreskog(1979)やSörbom(1975)が確立している。清水・花井(2008)や清水・山本(2008)で応用場面へこれらの方法を適用したように，時間を越えて不変な因

子の構造を検証することもできる。

不変であることは普遍というための条件である。R.B. Cattellのいう整合性では，3つの軸の中において普遍であるような因子と尺度とを追求することになる。しかしながら，この3つの軸を想定したことによって，変化することも測定の中に取り込まなければならないことになる。信頼性はR.B. Cattellの狭義の観測変数間に求め，時間軸では安定性から変化の質と量のモデル化（清水，2008a,b）という方向での展開を構想している。これについては次の課題としたい。

引用文献

Bentler, P. (2009). Alpha, dimension-free, and model-based internal consistency reliability. *Psychometrika*, 74, 137-143.

Bollen, K.A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York, NY: John Wiley.

Carmines, E.D., & Zeller, R.A. (1979). *Reliability and validity assessment*. Beverly Hills, CA: Sage. （水野欽司・野嶋栄一郎訳　(1983)　テストの信頼性と妥当性　朝倉書店）

Cattell, R.B. (1964). Validity and reliability: A proposed more basic set of concepts. *Journal of Educational Psychology*, 55, 1-22.

Cattell, R.B., & Tsujioka, B. (1964). The importance of factor-trueness and validity, versus homogeneity and orthogonality, in test scales. *Educational and Psychological Measurement*, 24, 3–30.

Comrey, A.L. (1961). Factored homogeneous item dimensions in personality research. *Educational and Psychological Measurement*, 21, 417-431.

Cronbach, L.J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.

Duhachek, A, & Iacobucci, D. (2004). Alpha's standard error(ASE): An accurate and precise confidence interval estimate. *Journal of Applied Psychology,* 89, 792-808.

Fan, X., & Thompson, B. (2001). Confidence intervals about score reliability coefficients, please: An EPM guidelines editorial. *Educational and Psychological Measurement*, 61, 517–531.

Green, S.B., & Yang, Y. (2009). Commentary on coefficient alpha: A cautionary tale. *Psychometrika*, 74, 121-135.

Guttman, L. (1945). A basis for analyzing test-retest reliability. *Psychometrika*, 10, 255-282.

Harman, H.H. (1967). *Modern factor analysis* (2*nd ed.*). Chicago, IL : University of Chicago Press.

久本博行（2003）Intaractive因子分析システム関西大学社会学部紀要，34（2），37-82

Jöreskog, K. G. (1971). Statistical analysis of sets of congeneric tests. *Psychometrika*, 36, 109–133.

Jöreskog,K.G. (1979). Statistical estimation of structural models in longitudinal developmental investigations. In J.R. Nesselroade and P.B. Baltes (Eds.), *Longitudinal research in the study of behavior and development* (pp.303-351). New York: Academic Press.

Kano, Y., & Azuma, Y. (2003). Use of SEM programs to precisely measure scale reliability. In H. Yanai, A. Okada, K. Shigemasu, & Y. Kano (Eds.), *New developments in psychometrics* (pp. 141–148). Tokyo: Springer.

Lucke, J.F. (2005). The α and the ω of Congeneric Test Theory: An Extension of Reliability and Internal Consistency to Heterogeneous Tests. *Applied Psychological Measurement*, 29, 65-81.

Lord, F. M., & Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.

McDonald, R. P. (1985). *Factor analysis and related methods*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

McDonald, R. P. (1999). *Test theory: A unified approach*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mulaik, S.A. (2010). *Foundations of factor analysis* (2*nd ed.*). Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

Raykov, T. (1997). Scale reliability, Cronbach's coefficient alpha, and violations of essential tauequivalence for fixed congeneric components. *Multivariate Behavioral Research*, 32, 329–354.

Raykov, T. (2001). Bias of coefficient alpha for congeneric measures with correlated errors. *Applied Psychological Measurement*, 25, 69–76.

Revelle, W., & Zinbarg, R. (2009). Coefficients Alpha, Beta, Omega, and GLB: Comments on Sijtsma, *Psychometrika*, 74, 145-154.

清水和秋 (2003)　因子分析における探索の意味と方法　関西大学社会学部紀要，第34巻第2号、1-36

清水和秋 (2007) αはやめてωにしよう－因子分析で構成した尺度の共通性と信頼性－ 日本心理学会第71回大会発表論文集, 416

Shimizu, K. (2007). Reliabilities of sub-scales corresponding to the factors by exploratory factor analysis: Omega as a communality of a scale in item common factors. The 72nd annual and 15th international meeting of the psychometric society, Tokyo, Japan.

清水和秋 (2008a) 変化の質と量のモデル化—古典的テスト理論からの訣別—日本心理学会第 72 回大会発表論文集, 448

清水和秋 (2008b) 変化の質と量のモデル化－その2：縦断2集団間での因子と独自性の平均構造－日本教育心理学会第50回総会発表論文集, 114

清水和秋・花井洋子 (2008) キャリア意思決定の安定性と変化そして不安からの影響—大学1・2年生を対象とした半年間隔での縦断調査から— キャリア教育研究, 26(1), 19-30.

清水和秋・柴田由己 (2008) 大学生のEmotional Intelligence Scale (EQS) の構造とモデル化 関西大学社会学部紀要, 39(2), 13-34

清水和秋・山本理恵 (2007) 小包化した変数によるパーソナリティ構成概念間の関係性のモデル化－Big Five・不安（STAI）・気分（POMS）－ 関西大学社会学部紀要 第38巻第3号 61-96

清水和秋・山本理恵 (2008) 感情的表現項目によるBig Five測定の半年間隔での安定性と変動－個人間差、状態・特性不安、自尊感情との関連－ 関西大学社会学部紀要, 39(2), 35-67

清水和秋・吉田昂平 (2008) Rosenberg自尊感情尺度のモデル化－wordingと項目配置の影響の検討－関西大学社会学部紀要, 39(2), 69-97

Sijtsma, K. (2009). On the use, the misuse, and the very limited usefulness of Cronbach's alpha. *Psychometrika*, 74, 107-120.

Sörbom, D. (1975). Detection of correlated errors in longitudinal data. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 28, 138-151.

Spearman, C.E. (1904a). The proof and measurement of associated between two things. *American Journal of psychology*, 15, 72-101.

Spearman, C.E. (1904b). General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of psychology*, 15, 201-293.

ten Berg, J.M.F., & Socan, G. (2004). The greatest lower bound to the reliability of a test and the hypothesis of unidimensionality. *Psychometrika*, 69, 613-625.

Thurstone, L.L. (1947). *Multiple-factor analysis*. Chicago, IL :University of Chicago Press

辻岡美延 (1964) テスト尺度構成における新しい原理 心理学評論, 8, 82-90.

辻岡美延・清水和秋 (1975) 項目分析における項目統計量と構成尺度の統計量－因子的真実性係数と因子的妥当性.関西大学社会学部紀要,**7**(1),107-120.

山本理恵 (2008) 4つの測定アプローチによるBig Fiveの安定性と平均変動－大学生を対象とした半年間隔での3回の縦断調査－ 関西大学大学院修士論文(未刊行)

柳井晴夫・繁桝算男・前川眞一・市川雅教 (1990) 因子分析－その理論と方法－ 朝倉書店

Zinbarg, R.E., Revelle, W., & Yovel, I. (2007). Estimating ω_h for structures containing two group factors: Perils and prospects. *Applied Psychological Measurement*, 31, 135-157.

Zinbarg, R.E., Revelle, W., Yovel, I., & Li, W. (2005). Cronbach's α, Revelle's β, McDonald's ω_h : Their relations with each and two alternative conceptualizations of reliability. *Psychometrika*, 70, 123-133.

Zinbarg, R.E., Yovel, I., Revelle, W., & McDonald, R.P. (2006). Estimating generalizability to a latent variable common to all of a scale's indicators: A comparison of estimators for ωh. *Applied Psychological Measurement*, 30, 121–144.

(2010.1.6 受稿 2010.1.26 受理)

APPENDIX

Rによるωの計算

ファイルは，カンマ区切り（csv形式）で，次のファイルを準備する。

因子パターン行列(factor_pattern.csv)変数×因子の数値の行列
（行には変数名，列には因子名を引用符で括って記述する。）

共通性ベクトル(communalities.csv)
変数（１列）の数値
（行には変数名を同じように付ける。）

因子間相関行列(factor_correlation.csv)
因子×因子の数値の行列
（行と列に因子名を同じように付ける。）

メイン・スクリプト
因子別に選択する項目数と項目番号（因子パターン行列での行の順番）を記述する。
Rのコンソールへコピペをして，実行させる。

関数omegaのスクリプト
データファイルと同じディレクトリに置く。
Rの起動時に，このディレクトリに変更すること。

２次元座標軸作成のスクリプト

メイン・スクリプト

```
## ωと因子的真実性
##   nv : 因子分析での変数の数
##
##   ni : 尺度構成の対象となる変数の数
##   kr[j] : 対象項目の番号j  （jをni個分選択する）
##   記述例
##      ni <- 3    3 項目から尺度を構成
##      kr[1] <- 対象番号 1  例えば 4
##      kr[2] <- 対象番号 2       12
##      kr[3] <- 対象番号 3       9
source("omega.R")
nv <- 30                ##仮の数，尺度に含める最大の項目数
kr <-  as.vector(1:nv)
#第１因子での項目指定
ni <- 6
kr[1] <- 1
kr[2] <- 2
kr[3] <- 3
kr[4] <- 4
kr[5] <- 5
kr[6] <- 6
omega(ni,kr)

#第２因子での項目指定
ni <- 6
kr[1] <- 7
kr[2] <- 8
kr[3] <- 9
kr[4] <- 10
kr[5] <- 11
kr[6] <- 12
omega(ni,kr)          ##以下略
```

関数omegaのスクリプト（ファイル名：omega.R）

```
omega <- function(ni,kr)
#
#探索的因子分析結果からωを計算するRスクリプト
#2009.1.3
#①：ディレクトリの変更を確認のこと
#            複数の因子のωを計算する場合には，それぞれの因子ごとに
#            このスクリプトを実行すること。
#②準備するファイル（条件：カンマ区切り（csv）形式のファイル）
#  V.csv  ＜＝因子パターン行列から対象とする変数（nvXnf）
#              変数名（第 1 列）と因子名（第 1 行）を記述。
#  hb.csv ＜＝この変数の共通性（nvX１）  変数名
#  Cf.csv ＜＝因子間相関行列（nfXnf）     因子名
#  nv  ＜＝変数の数   引数の１番目
#  nf  ＜＝因子の数   引数の２番目
#  ni  ＜＝選択した項目の数
#③実行  R Console  画面で次の入力をする。
## ファイルの読み込み
{
V  <-  read.table("factor_pattern.csv",  sep=",", header=T,row.names=1)
nv <- nrow(V)
nf <- ncol(V)
V <- as.matrix(V, nrow=nv, ncol=nf)
View(V,"inputted factor pattern matrix")
Cf  <-  read.table("factor_correlation.csv",  sep=",", header=T,row.names=1)
Cf <- as.matrix(Cf,nrow=nf, ncol=nf)
hb  <-  read.table("communalities.csv",  sep=",", header=T,row.names=1)
hb <- as.vector(hb)

h  <- as.vector(1:ni)
d  <- as.vector(1:ni)

ninf <- ni*nf
Vfp <- matrix(1:ninf,nrow=ni, ncol=nf)
```

```
VfpCf <- matrix(1:ninf,nrow=ni, ncol=nf)
nini <- ni*ni
VfpCfVfpT <- matrix(1:nini,nrow=ni, ncol=ni)

print("selected item number")
for (i in 1:ni )
{
  k <- kr[i]
  print(k)
  h[i] <- hb[k,1]
  for (j in 1:nf)
  {
  Vfp[i,j] <- V[k,j]
  }
}
print("for input check")
print("selected factor patterns")
print(Vfp)
print(h)
print(Cf)
## 計算過程
## VfpcfVpf'
VfpCf <- Vfp %*% Cf
VfpCfVfpT <- VfpCf %*% t(Vfp)
veci <- rep(1,ni)
## 1'VfpcfVpf
iVfpCfVfpT <- veci %*% VfpCfVfpT
## 1'VfpCf
iVfpCf <- veci %*% VfpCf
## 1'VfpcfVpf1
sumh <- iVfpCfVfpT %*% veci
d <- veci - h
sumd <- t(d) %*% veci
v_scale <- sumh + sumd
sd_scale <- sqrt(v_scale)
Vfs_scale <- iVfpCf / sd_scale[1,1]
Vfp_scale <- Vfs_scale %*% solve(Cf)
h_scale <- Vfs_scale %*% t(Vfp_scale)
SD_h_scale <- sqrt(h_scale)
trueness_scale <- Vfs_scale/SD_h_scale[1]
print("Results")
#結果の出力
#ω(=尺度の共通性)
print("Omega = Communality of this scale(Cattell & Tsujioka,1964)")
print(h_scale, d=3)
#尺度の因子パターン
print("Factor Pattern of this scale")
print(Vfp_scale, d=3)
#尺度の因子構造
print("Factor structure of this scale")
print(Vfs_scale, d=3)
#因子的真実性係数
print("Coefficients of factor-truenesses")
print(trueness_scale, d=3)
}
```

2次元座標軸作成のスクリプト

```
#### 2次元プロット作図のメイン：Table1とTeble3の因子パターンから
Vfp <- read.table("factor_pattern_for_plot.csv", sep=",", header=T,row.names=1)
Cf <- read.table("factor_correlation.csv", sep=”,”,header=F)
nv <- nrow(Vfp)
nf <- ncol(Vfp)
Vfp <- as.matrix(Vfp, nrow=nv, ncol=nf)
Cf <- as.matrix(Cf , nrow=nf, ncol=nf)
View(Vfp,"Factor Pattern Matrix")
source("factor_plot.R")
###図示したい因子の組み合わせを変更する。
## factor_plot(横軸とする因子,縦軸の因子,Vfp)
## 次の例は第1因子と第2因子の図示
factor_plot(1,2,Vfp)
factor_plot(4,5,Vfp)

#####ファイル名：factor_plot.R
factor_plot <- function(p1,p2,Vfp)
{
#### 因子パターンのplot
#### 因子p1 × 因子p2
plot(Vfp[,p1],Vfp[,p2], asp=1,type="n",xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1), xlab =p1, ylab = p2)
abline(h=0,v=0)
text(Vfp[,p1],Vfp[,p2],labels=row.names(Vfp))
}
```