

カオス機構に基づく柔軟なパターン生成

伊 藤 秀 隆*

Flexible Pattern Generation Based on Chaotic Mechanisms

Hidetaka ITO

1. はじめに

非線形な動的システムにおいて広く観測される複雑で非周期的な定常状態としてカオス現象と呼ばれるものがあり、カオス的なシステムの解析、制御や設計に関する研究が様々な分野において進められている。本稿では、非周期性と並んでカオス現象を特徴づける不安定周期軌道群のシステム制御や情報処理への応用可能性に注目し、典型的なカオス生成機構を規範とする柔軟な周期パターン生成器の数値的設計に関する取り組みを紹介する。

2. カオス現象

カオス現象とは、決定論的な（確率的要素を含まない）微分方程式や写像で記述される非線形動的システム（例えば能動素子を含む電子回路など）における、長期予測が不可能で非周期的な定常状態であり、状態空間内でその定常性を表す軌道の束をカオスアトラクタとよぶ。すなわち、適当な初期状態から出発したシステムの軌道は（過渡状態を経て）カオスアトラクタに吸引され、その内部で二度と同じ状態を経ることなく非周期的に振る舞い続ける。縦軸に状態変数の1つ、横軸に時刻をとって波形をプロットすると、周期的に繰り返さずに振動し続ける複雑な波形が観測される。

ところが、そのような非周期性にも関わらず、カオスアトラクタには無数の不安定周期軌道（その軌道上に厳密に初期状態を与えると、一定時間後に再び同じ状態に戻ってくるような軌道）が埋め込まれており、それらの不安定周期軌道の相互間をシステムの軌道が

さまよい続けることによって非周期的な軌道が生み出される。一方で、軌道がカオスアトラクタの外部へ逸脱することではなく、また、何らかの外乱によって軌道が一時的にアトラクタの外部へ押し出されても、一定の範囲内であれば、アトラクタの漸近安定性によって軌道はアトラクタへ戻る。さらに、カオスアトラクタ内の任意の2点の近傍同士を結ぶ軌道が存在するという性質（推移性）もある。カオスの工学的応用における重要な要素技術であるカオス制御¹⁾は、上記のようなカオスアトラクタの性質、特に不安定周期軌道の存在に基づいて、様々な制御則によって所望の不安定周期軌道を安定化するものであり、システムの動作領域の拡張や高機能化が可能となる。

3. 非線形ダイナミクスに基づく周期パターンの生成

一方、ロボット工学などの進展に伴って、神経振動子モデル、リカレントニューラルネットワーク、多項式力学系などの非線形動的システムを活用してパターン生成を行う研究が盛んになってきている^{2~4)}。このアプローチでは、引き込み（同期）現象や分岐現象（パラメータの変化に伴うダイナミクスの質的変化）を活用して、変化する環境に対する、ハードコーディングされた（固定的な数値データとして与えられた）パターンよりも高い適応能力や、互いに協調するパターンの生成などを実現している。これらの従来研究において学習あるいは設計されているパターン（システムの軌道）は主として安定な周期軌道（周期アトラクタ）であるが、軌道間の推移性、フィードバック制御、同期化制御などを併用しながら更に柔軟な振る舞いを目指すにあたっては、カオスアトラクタによって束ねられた複数の不安定周期軌道の活用も興味深い方向性と考えられる。

原稿受付 平成25年10月9日

*システム理工学部 電気電子情報工学科 准教授

えられる。

4. カオスシステムの設計論

連続時間のカオスシステムの探索や設計に関しては、一階連立の状態微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x \in R^n, n \geq 3)$$

の右辺のベクトル値関数によって定義される（例えば多項式で記述される）速度ベクトル場のカオス性の網羅的探索や、電子回路で実装されるベクトル場のスイッチング（切り替え）に基づくカオス的信号の生成など、いくつかのアプローチがある^{5~7)}。ただし、多くの場合、不变測度（軌道の束のどのあたりをどのような割合で通過するか）やリアプノフ指数（カオス性の程度を表す数値）などの統計的な指標や、新奇な形状のカオスアトラクタの作成などが設計目標であり、カオスアトラクタに埋め込まれる不安定周期軌道自体の形状（波形）や力学的性質にはほとんど考慮がなされていない。

以上のような背景のもとで、本稿では、所望形状の不安定周期軌道を複数個内包するカオス的連続時間システムの数値的設計（コンピュータ上の数値計算・シミュレーションに基づく設計）に関する検討を行う。そのためにまず、典型的なカオス生成機構のもとで複数の不安定周期軌道（以下、「標準周期軌道」とよぶ）を配置しつつ機械的な手順で構成が可能なカオス生成テンプレート（ベクトル場の関数近似の目標となる数値的構造）を提案する。以下の実装例では、このテンプレートは3個の標準周期軌道を内包する軌道の束であり、所望の周期軌道が得られるようにバネ-質点系のシミュレーションモデルを用いて変形する。この変形後のテンプレートに沿うようなベクトル場関数を階層型ニューラルネットの学習によって求め、パターン生成器としての微分方程式を構築する。なお、ここで言う微分方程式とは、紙の上に容易に書き下せる類のものではなく、コンピュータ上のプログラムと数値データファイル（非常に多くの係数をまとめたもの）から生成されるものである。

5. カオス生成テンプレートを用いた複数周期軌道の数値的設計

5.1 カオス生成機構を規範とした不安定周期軌道の埋め込み

複数の不安定周期軌道を単一のベクトル場において共存させることを考えたとき、その安定性を個々の軌道ごとに設定するだけでは、目標軌道が良好に実現できなければなく、複数の軌道の不安定性の衝突に

よって意図しない安定周期軌道が生成され、不安定周期軌道間の推移性が損なわれる。そこで本研究では、典型的なカオス生成機構（いわゆる「引き伸ばしと折り畳み」）を規範とした不安定周期軌道の埋め込みを行う。ここでは簡単な一例として、3次元状態空間内の半平面（ポアンカレ断面）

$$\Sigma = \{(x, y, z) | x \geq 0, y = 0\}$$

を軌道が横切る際のx座標に関する図1のような1次元写像を取り上げる。この写像を実現するような連続時間系の軌道群の設定には自由度があるが、以下の実装例では、xy平面上の螺旋軌道を主要な構成要素とする図2、3の軌道群（半周ごとに21本の軌道で代表させている）を採用する。この軌道群の作成方法の詳

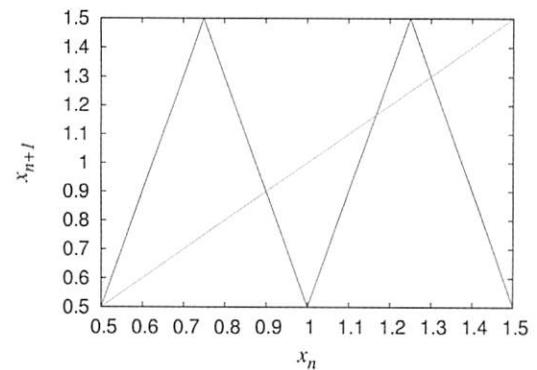


図1 規範とするカオス的1次元写像

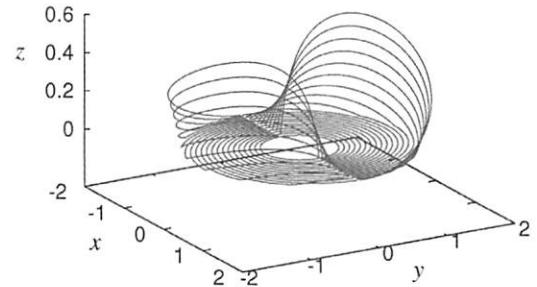


図2 図1の写像に対応する軌道群
(カオス生成テンプレート)

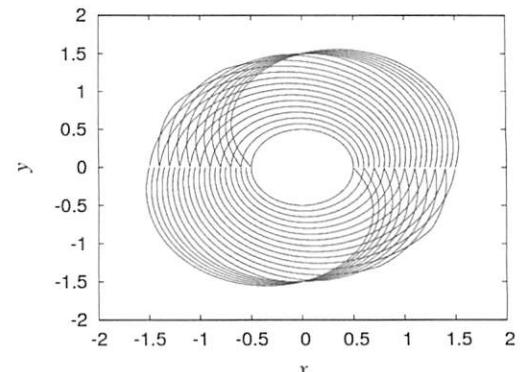


図3 図2の軌道群のxy平面への投影

細⁸⁾は割愛するが、半周あたり2倍の「引き伸ばし」(隣接する軌道間の間隔の拡大)と1回の「折り畳み」を施した。この場合、軌道群は図4に示すように、形状がある程度揃って位置が異なる3個の不安定1周期軌道(標準周期軌道)を内包することになり、この軌道群を(変形前の)「カオス生成テンプレート」とよぶこととする。なお、数値計算上は、このテンプレートは上記21本の各軌道上にそれぞれ360点設定した合計7,560点の代表点の集合として表現される。

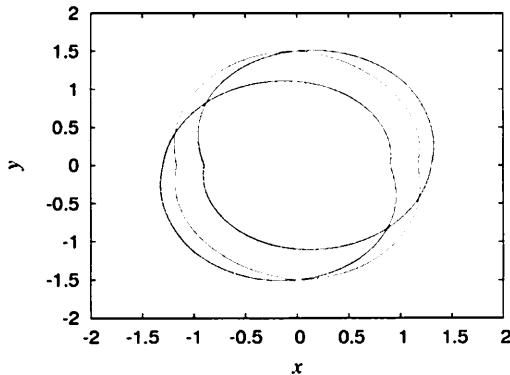


図4 テンプレートに埋め込まれた3個の標準周期軌道(左からa, c, b)

5.2 周期軌道の配置とテンプレートの変形

次に、テンプレート上の標準周期軌道をカオス生成機構を保ったまま所望の軌道に近づけるための変形について検討する。所望の軌道は代表点の所望位置の集合として取り扱う。なお、今回は代表点のx座標のみに関する変形によって所望の軌道を生成することとする。テンプレートの変形を行うための手法には、適切な区分線形変換の構築、ニューラルネットワークによる変換関数の学習、バネ-質点系モデルの適用などが考えられるが、いずれの場合においても、同相写像によって変形が行われる、すなわち変形前後のシステムが位相的に同値となるような処置が必要である。本研究ではバネ-質点系の物理的シミュレーションモデルを用いた変形を行う。このモデルは8近傍の代表点間を仮想的にバネで接続して構成し、標準周期軌道の形状を所望のものに向かって徐々に変化させながら、バネの弾性エネルギーの総和を最急降下法によって最小化することによって、テンプレートを構成する軌道群全体の変位を求めていく。以上で「変形後のテンプレート」が求まる。

なお、3個の標準周期軌道は3次元状態空間内で互いに絡み合っており、所望の周期軌道の配置によっては同相写像による変形が不可能となる(バネ-質点系が破綻する)ことがあるが、そのような場合には、適

当な埋め込み関数を用いてテンプレート全体を4次元空間に埋め込めばよい⁹⁾。

5.3 ニューラルネットによるベクトル場の学習

最後に、変形後のテンプレートに沿うようなベクトル場関数を3層階層型ニューラルネットの学習(関数近似)によって求める。学習のための中心的な教師データは、変形後のテンプレート上の代表点の座標(ニューラルネットの入力)と各点における目標速度ベクトル(ニューラルネットの目標出力)の組であり、目標速度ベクトルは、同一軌道上で隣接する2つの代表点の座標の差分を用いて生成する。さらに、軌道群全体がアトラクタとなるために必要な吸引的性質を設定するため、テンプレートの近傍に上下各2層からなる代表点群および目標速度ベクトルを追加配置する。「折り畳み」領域の一部など、テンプレートの形状が複雑になっている領域では、機械的に追加配置された複数の目標速度ベクトルが互いに矛盾することがあるが、この問題はニューラルネットの学習を通じて解消される。

6. 応用例

本章では、応用へ向けた一検討として、テンプレートを用いた二足歩行ロボットの複数歩行パターンの生成を例題として取り上げる。以下の数値実験例は、小型ヒューマノイドロボットHOAP-3の歩行のための関節角度指令値の生成に関するものであり、図5、6に示す「平面歩行」「足踏み歩行」(以下、歩行パターンA、歩行パターンBとする)のための右足5関節(右股関節左右、右股関節前後、右膝、右足首前後、右脚足首左右)の角度指令値のうち、「右股関節左右運動」関節の1周期分の指令値を所望の周期軌道とする。歩行パターンAおよびBの軌道上で1周期360点のサンプリングを行った角度指令値に適切な正規化と初期時

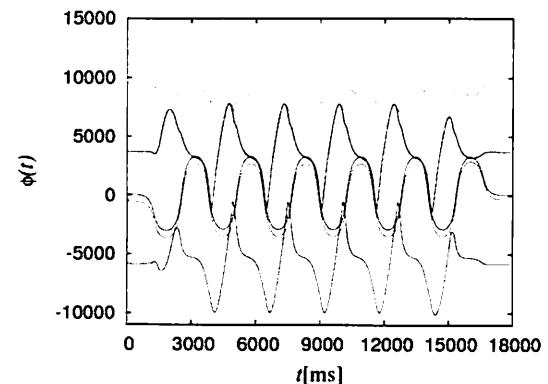


図5 歩行パターンAのための右足5関節の角度指令値

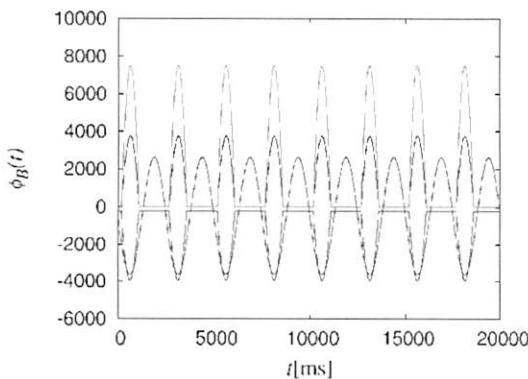


図6 歩行パターンBのための右足5関節の角度指令値

刻の選定を施すことによって、テンプレート上の標準周期軌道aおよびbの変形目標を作成する。図7に、それらの変形目標を、変形前のテンプレートに埋め込まれた標準周期軌道と重ねて示す。

まず、バネ-質点系モデルを用いた変形によって図8に示すような変形後のテンプレートが得られた。次に、変形後のテンプレートを目標カオスアトラクタとして、ニューラルネットによるベクトル場の関数近似を行う。用いたニューラルネットは一般的な3層階層型（3入力3出力）であり、誤差逆伝搬法による学習を行った。

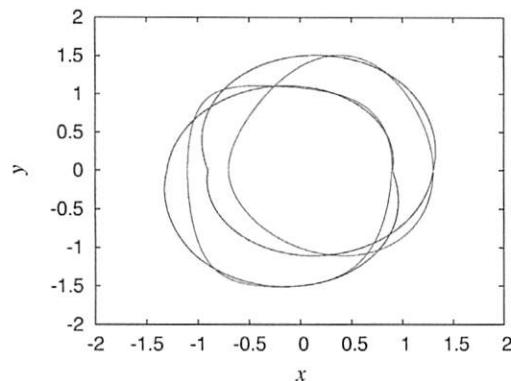


図7 標準周期軌道a,bと各軌道の変形目標

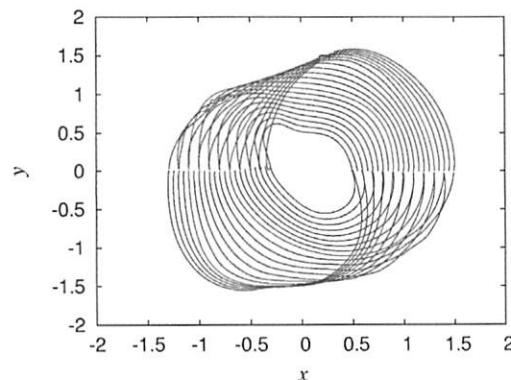


図8 変形後のテンプレート

学習によって得られたベクトル場によって定まる微分方程式系（ニューラルネット近似系）の軌道を4次のルンゲクッタ法で求めた結果、図9に示すようなカオスアトラクタが得られた。また、ポアンカレ断面上の初期値 $(x_n, 0, 0)$ から出発した軌道が次にポアンカレ断面を通過する点を $(x_{n+1}, 0, z_{n+1})$ と表すとき、 x_n と x_{n+1} の関係をプロットすると図10のようになり、意図したカオス生成機構に従って3個の1周期軌道（本例ではそのうちの2個を所望の周期軌道として扱った）が埋め込まれていることが推定（以下で検証）できる。

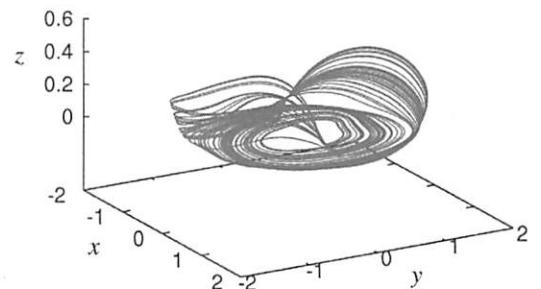


図9 ニューラルネット近似系のカオスアトラクタ

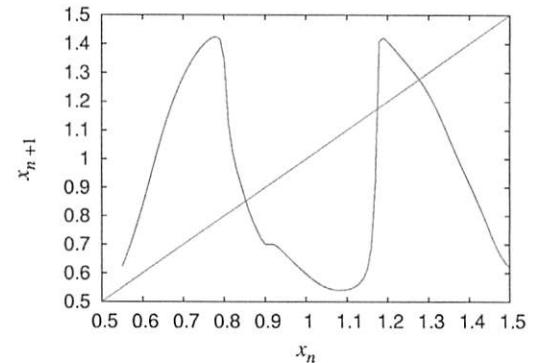


図10 近似系のリターンマップ

上記の推定をもとに、ポアンカレ写像(2次元写像)の不動点の位置を反復法で数値的に求め、それらをニューラルネット近似系の初期値として与えることにより、図11に示すような所望の周期軌道を取り出すことができた。さらに、これらの時系列を所望の関節角度指令値と比較したところ、図12、13のとおり良好に一致した。なお、詳細は省略するが、テンプレートのより大きな変形（図14に変形結果を例示する）に対しても、適切なチューニングのもとで本手法は適用可能である。

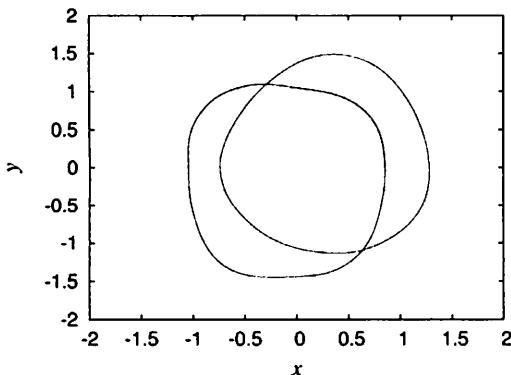


図11 近似系のカオスアトラクタに埋め込まれた周期軌道 a, b

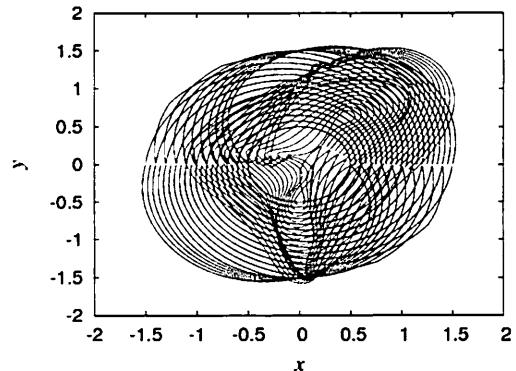


図14 テンプレートのより大きな変形例
(変形前後を重ねて描画)

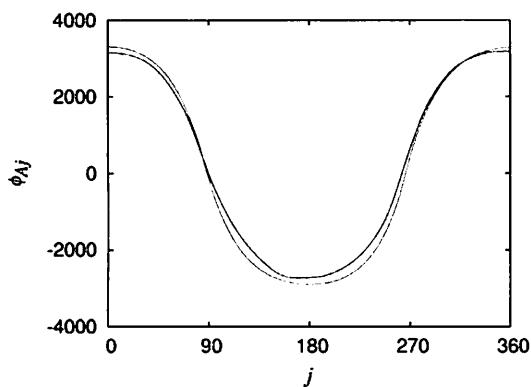


図12 周期軌道 a の時系列と所望の関節角度指令値との比較

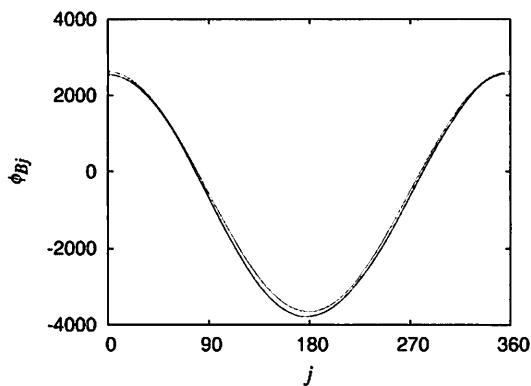


図13 周期軌道 b の時系列と所望の関節角度指令値との比較

7. おわりに

今後は、実機との連携に関する検討や、テンプレート上の複数周期軌道を外部環境に応じて高度に利用するための制御手法の検討を行う。また、今回用いたもの以外の多様なカオス生成機構^{10, 11)}の活用による設計の自由度の拡張に関する検討も重要と考えられる。

謝辞 本稿の作成にあたり、本学大学院生 門田直樹氏の協力を受けました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 小西啓治：計測と制御, 41, 606-612 (2002).
- 2) 多賀巖太郎：日本ロボット学会誌, 15, 680-683 (1997).
- 3) Y. Kuroe, K. Miura: Proc. 2006 International Joint Conference on Neural Networks, 3478-3485 (2006).
- 4) 岡田昌史, 中村仁彦：日本ロボット学会誌, 22, 1050-1060 (2004).
- 5) J.C. Sprott: Physical Review E, 50, R647-650 (1994).
- 6) I. Zelinka, G. Chen, S. Celikovsky: International Journal of Bifurcation and Chaos, 18, 911-942 (2008).
- 7) J.M. Muñoz-Pacheco, E. Tlelo-Cuautle: Journal of Applied Research and Technology, 7, 5-14 (2009).
- 8) 門田直樹, 伊藤秀隆, 前田 裕：計測自動制御学会第48回システム工学部会研究会資料, 32-36 (2013).
- 9) H. Ito, T. Furuoka, A. Kumamoto: Proc. 2011 International Conference on Informatics and Computational Intelligence, 191-196 (2011).
- 10) T.D. Tsankov, R. Gilmore: Physical Review E, 69, 056206 (2004).
- 11) C. Letellier, E. Roulin, O.E. Rössler: Chaos, Solitons and Fractals, 28, 337-360 (2006).