

同心2重球殻内の熱対流について

板野 智昭*、二宮 隆弘**

Heat Convection in Double Concentric Spherical Shells

Tomoaki ITANO, Takahiro NINOMIYA

1. はじめに

自然発生的な地震はもちろん人為的に起こされる核実験などを波源として、地表面や地球内部を伝搬する地震波は、時には震源からみて地球の裏側まで到達することがある。これらの波の振幅は地球の規模からすると非常に微小ではあるが、振動は長時間持続し、巨大地震においては驚くべきことに数ヶ月後まで振動が記録されたこともある（あたかも巨大なゴムの塊の様に、地球がわずかな伸び縮みを長周期で数ヶ月間も繰り返していることになる）。現代では観測技術の向上にともない世界各地に地震計が配置され、地球全周に渡って張り巡らされたこれらの地震計が記録するデータの解析から地球の内部構造についてもかなりの部分が明らかになってきた⁽¹⁾。

地球の内部構造を知る上で大事な鍵として、次のような事実が挙げられる。初等教育で学ぶように、連続的な媒質（連続体）の内部を伝播する波動は、波の進行方向へ媒質が振動する縦波と、波の進行方向とは垂直な方向に媒質が振動する横波の各成分の和として表すことができる*¹。一般に、横波と縦波は伝搬速度が異なる（縦波は横波よりも伝搬速度は速い）ため、震源から遠く波が伝搬するにつれて、波はこれらの成分からなる特徴的なモードに分解した形で観測される（波の分散性）。また我々が経験からよく知っている様に、無限の媒質中において、固体中では縦波も横波も伝わるができるが、液体や気体などの流体内では横波は遠くまで伝わるができず、すぐに減衰する。

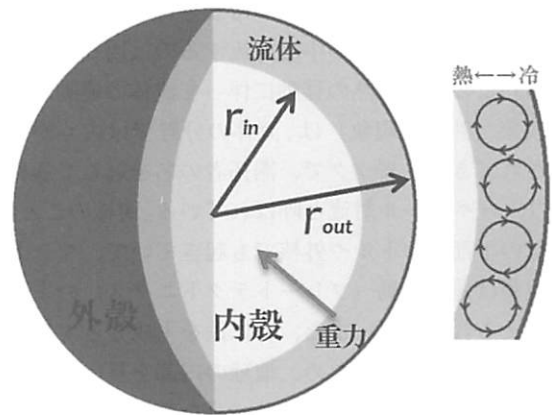


Fig. 1 地球内部の外核でおきている対流の概念図

身近な例を挙げると、空気中を伝わり我々の鼓膜に到達する音波は縦波からなる。さて、大地震が発生した際、震源からみて地球の裏側（たとえば日本からみてチリ）でも、地震計で振動が計測される。ただし、地球の真中心を通過する横波は観測されない*²。この事実に基づいて地震波の解析を詳細に進めると、地表面から3000[km] から5000[km] のあたりに液体状の領域が存在することが予想される⁽²⁾。

この地球中央部にある液体状の領域は外核と呼ばれている。外核のさらに内側には固体状の内核、外殻より上層には流動性の固体からなる下部マントル、さらに上層には上部マントルや地殻が存在する。内外核の

原稿受付 平成25年 8月 1日

*システム理工学部 物理・応用物理学科 准教授

**理工学研究科 博士課程前期課程

*¹ 核実験によって発生する波は主に圧縮性の縦波成分からなるため、自然発生的な地震と区別をすることができ、この区別によって核実験の国際的な相互監視が可能になっている。

*² ただし、外核とマントルの境界における反射で縦波から横波に転じる波や、地殻の表面を伝搬して到達する波は、横波として観測される。

領域を構成する主成分は純鉄、もしくは硫黄や酸素などと結合した鉄の合金だと推定されている。地質学的なデータから、地球内部には、放射性的な元素も多く含まれていると予想されていて、これが地球内部の温度を高く保っている主な熱源となりうる。これまで人類が知りえた様々な物理や化学・地学などの知識をもとになされた推定によれば^{*3}、温度は6000[K]程度、圧力は360[GPa]を越える。地球は球だから熱の逃げ場は地表面しかないが、幸いにして地表面を構成する物質の断熱性が高いため、地表は生命が育まれるのに適した環境でありながら、地球深部は高温に保たれ続けている。

地球の深部から地表にかけて徐々に温度が下がるため、液体状の外核の内側と外側の境界には温度差が存在する。これもよく知られた経験的事実であるが、流体を下部から熱し上部を冷却してやると流れが起きる。たとえば、上部表面から冷まされ下部から加熱されると、味噌汁が鍋の中で対流するのは周知の事実である。このような熱の移動に伴って流体の運動が起きる現象（熱対流現象）は、流体の分野では古くから研究されてきたトピックで、開拓者の名を冠して通称レイリー・ベナル対流と呼ばれている。同様のことは、地球の下部マントルや外核でも起きていて、マントルの運動は地殻変動（プレートテクトニクス）の主因だと考えられている。また、特に鉄を主成分とする外核は電気伝導性が高いため、地球の内部を貫いている磁束（地磁気という。方位磁針で北をN極が指すのは地球自身が大きな磁石として働いていることが原因）の中を液体状の鉄が対流するとそこに誘導起電力が発生し、その結果外殻には電流が流れる。発生した電流は地磁気を更に強めたり、あるいは弱めて地球の磁極を反転させたりする機構（ダイナモ理論）と関係があると考えられている。地磁気は、我々の生活と無縁ではない。発生した磁場は地球の周囲を取り巻いて、太陽が地球に向けて吹きつける荷電粒子が地表に近づかないように生態系を守っている。こうして考えると地球というのは実によくできたものだと感慨を感じずを得ないだろう。

このような外殻内の対流運動を念頭に起きつつ、我々は1年ほど前から、温度差があり半径の異なる同心二球面間の流体の運動（同心二重球殻間の熱対流）の研究を始めた。すでに先行研究は山ほどあり、特に地球環境を模して、球が回転している場合について多くの成果が残されている^(4,5)。我々は、より単純なケー

スとして、球が無回転の場合の対流の起源、固有モードの縮退、そこからの流れの分岐などについて、研究を行ってきた。ここではその成果の一部を披露したい。

2. 定式化

著者らが知る限り、以下で行う定式化はChandrasekhar⁽³⁾に依るところが大きい。内径 $\tilde{r}_0 - \Delta\tilde{r}$ 、外径 $\tilde{r}_0 + \Delta\tilde{r}$ の2重球殻内に充填された流体の熱対流について考える。中心を原点とし、極座標 $(\tilde{r}, \theta, \phi)$ をとる。ここで、物理量 $\tilde{\cdot}$ は有次元量である。半径 $\tilde{r} = \tilde{r}_0 \mp \Delta\tilde{r}$ において、流体の温度 $\tilde{\theta}$ は $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 \pm \Delta\tilde{\theta}$ 、また、流体の速度場 \tilde{u} は $\tilde{u} = 0$ を境界条件とする。速度場 $\tilde{u}(\tilde{r}, \theta, \phi, \tilde{t})$ 、圧力場 $\tilde{p}(\tilde{r}, \theta, \phi, \tilde{t})$ 、温度場 $\tilde{\theta}(\tilde{r}, \theta, \phi, \tilde{t})$ は、次の支配方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{u}) &= 0 \\ \tilde{\rho} (\partial_{\tilde{t}} \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u}) &= -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\mu} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} + \tilde{\rho} \tilde{g} \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\theta} + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\theta} &= \tilde{\kappa} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\theta} + \tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

流体の密度 $\tilde{\rho}$ が温度のみの関数であり、全領域にわたって流体の温度が $\tilde{\theta}_0$ 付近ならば、 $\tilde{\rho}$ は $\tilde{\theta}$ の線形関数で近似することができる（ここでの仮定をより正確に表現するならば $|\tilde{\alpha}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0)| \ll 1$ ）。

$$\tilde{\rho} \approx \tilde{\rho}_0 \rho(\tilde{\theta}), \quad \rho(\tilde{\theta}) = 1 - \tilde{\alpha}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0)$$

ここで $\tilde{\alpha}$ は熱膨張率である。また、重力加速度 \tilde{g} は原点からの距離 \tilde{r} の関数であり、以下のように表されるとする。

$$\tilde{g} = -\tilde{g}(\tilde{r}) \mathbf{e}_r$$

支配方程式の自明な定常解（steady solution, “S”, $\partial_{\tilde{t}} = 0$ ）を次に挙げる。この解は静止状態に対応し、 \tilde{r} にのみ依存する圧力場と温度場で表現される。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_S &= 0, \quad \tilde{\nabla} \tilde{p}_S = -\tilde{\rho}_0 \rho(\tilde{\theta}_S) \tilde{g}(\tilde{r}) \mathbf{e}_r, \\ \tilde{\theta}_S &= \tilde{\theta}_{S2} \tilde{r}^2 + \frac{\tilde{\theta}_{S1}}{\tilde{r}} + \tilde{\theta}_{S0}. \end{aligned}$$

圧力場は上式の積分から、また境界条件より定数 $\tilde{\theta}_{S1}$ 、 $\tilde{\theta}_{S0}$ が決まる。

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{S2} &= -\frac{\tilde{\epsilon}}{6\tilde{\kappa}} \\ \tilde{\theta}_{S1} &= \frac{\tilde{r}_0^2 - \Delta\tilde{r}^2}{\Delta\tilde{r}} \left(\Delta\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\epsilon}}{3\tilde{\kappa}} \tilde{r}_0 \Delta\tilde{r} \right) \\ \tilde{\theta}_{S0} &= \tilde{\theta}_0 - \frac{\tilde{r}_0}{\Delta\tilde{r}} \Delta\tilde{\theta} + \frac{\tilde{\epsilon}}{6\tilde{\kappa}} (3\tilde{r}_0^2 + \Delta\tilde{r}^2) \end{aligned}$$

*3 直接的に地球内部の様子を知るために、人類が掘削によって到達した距離はせいぜい地下10[km]程度で、地球の半径の1/640程度にすぎない。

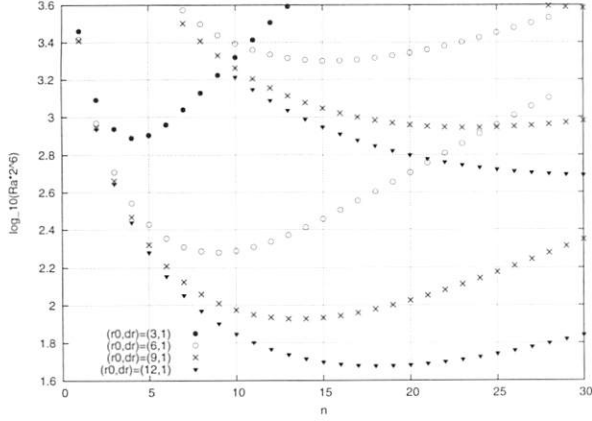


Fig. 2 $(Pr, \Delta \tilde{r}) = (1, 1)$ における線形安定性解析。波数 n と Ra の増加に対して正の σ の値が現れる境界を示している。

速度場、圧力場、温度場を自明解とそこからのずれ (摂動成分) に分解する。

$$(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{\theta}) = (\mathbf{0} + \hat{u}, \tilde{p}_s + \hat{p}, \tilde{\theta}_s + \hat{\theta})$$

摂動に関する (有次元の) 支配方程式は次のようなものとなる。

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \hat{u} &= 0 \\ \partial_t \hat{u} + (\hat{u} \cdot \tilde{\nabla}) \hat{u} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \tilde{\nabla} \hat{p} + \tilde{\alpha} \tilde{g}(\tilde{r}) \hat{\theta} e_r + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{\nabla}^2 \hat{u} \\ \partial_t \hat{\theta} + \hat{u} \cdot \tilde{\nabla} \hat{\theta} &= -\hat{u} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\theta}_s + \tilde{\kappa} \tilde{\nabla}^2 \hat{\theta} + \tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

以下では、仮定として

$$\tilde{g}(\tilde{r}) = \tilde{g}_0 \tilde{r}^n$$

が満たされる場合に話を限定しよう。

続いて、摂動の支配方程式の無次元化を行う。無次元化された速度場、圧力場、温度場を (u, p, θ) とおく。以下で、 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ は適当な定数とする。

$$\begin{aligned} (\tilde{r}, \tilde{t}) &= (\tilde{A}r, \tilde{B}t) \quad \rightarrow \quad (\tilde{\nabla}, \partial_{\tilde{t}}) = \left(\frac{1}{\tilde{A}} \nabla, \frac{1}{\tilde{B}} \partial_t \right) \\ (\hat{u}, \hat{p}, \hat{\theta}, \tilde{\theta}_s) &= \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \mathbf{u}, \frac{\tilde{\rho}_0 \tilde{A}^2}{\tilde{B}^2} p, \tilde{C} \theta, \tilde{C} \theta_s \right) \\ \tilde{g}(\tilde{r}) &= (\tilde{g}_0 \tilde{A}^n) r^n \end{aligned}$$

すると、摂動の支配方程式は次のように無次元化される^{*1}。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{Ni}{Re^2 Pr} r^n \theta e_r + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \theta_s + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta \end{aligned}$$

摂動の境界条件は、 $\tilde{r} = \tilde{r}_0 \mp \Delta \tilde{r}$ において、

$$\theta = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

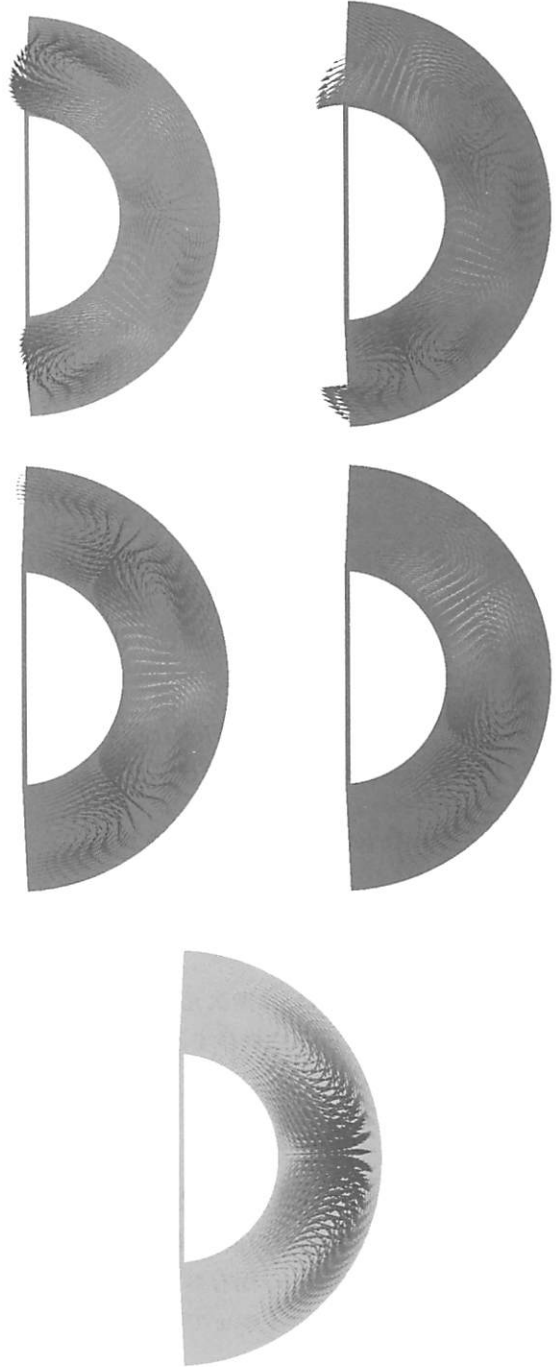


Fig. 3 $(Ra, Pr, \eta) = (12.2, 1, 0.5)$ の時、静止状態から現れる不安定固有モード。子午線方向の球の断面における速度場 \mathbf{u} の様子。(左上) $(n, m) = (4, 0)$, (右上) $(n, m) = (4, 1)$, (左中) $(n, m) = (4, 2)$, (右中) $(n, m) = (4, 3)$, (下) $(n, m) = (4, 4)$ 。

*1 通常 $RePr$ はペクレ数 Pe と称される。

ここで無次元パラメータを次のように定義した。

$$Re = \frac{\tilde{\rho}_0 \tilde{A}^2}{\tilde{\mu} \tilde{B}}, \quad Ni = \frac{\tilde{\rho}_0 \tilde{\alpha} \tilde{\gamma}_0 \tilde{A}^{n+3} \tilde{C}}{\tilde{\mu} \tilde{\kappa}}, \quad Pr = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}_0 \tilde{\kappa}}$$

また Θ_s は、

$$\Theta_s = \Theta_{S2} r^2 + \frac{\Theta_{S1}}{r} + \Theta_{S0}$$

で表される。ただし、

$$\begin{aligned} \Theta_{S2} &= -\frac{\tilde{\epsilon}}{6\tilde{\kappa}} \frac{\tilde{A}^2}{\tilde{C}}, \\ \Theta_{S1} &= \frac{1}{\tilde{A}\tilde{C}} \left(\frac{\tilde{r}_0^2 - \Delta\tilde{r}^2}{\Delta\tilde{r}} \right) \left(\Delta\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\epsilon}}{3\tilde{\kappa}} \tilde{r}_0 \Delta\tilde{r} \right), \\ \Theta_{S0} &= \frac{1}{\tilde{C}} \left(\tilde{\theta}_0 - \frac{\tilde{r}_0}{\Delta\tilde{r}} \Delta\tilde{\theta} + \frac{\tilde{\epsilon}}{6\tilde{\kappa}} (3\tilde{r}_0^2 + \Delta\tilde{r}^2) \right). \end{aligned}$$

Θ_s は無次元化された支配方程式の第3式に $\nabla\Theta_s$ の形で入ってきているだけなので、 $\Theta_{S0} = 0$ とおいても u や θ には影響を及ぼさない。

以下では、 $n = 1$ の場合について、Liら⁽⁴⁾ に従い、単位長さ、単位時間、単位温度 ($\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$) を定める。 $\tilde{A} = \Delta\tilde{r}$ にとり、 $Re = 1$ を満たすように、 \tilde{B} を決める。更に、 $-2\Theta_{S2} Pr = 1$ を満たすように \tilde{C} を決める。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + Ra \Theta e_r + \nabla^2 \mathbf{u} \\ Pr(\partial_t \Theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta) &= ru_r + \nabla^2 \Theta \end{aligned}$$

通常、レイリー数 Ra は次の様に定義される。

$$Ra := \frac{Ni}{Pr} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\beta} \Delta\tilde{r}^6}{\left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}_0}\right) \tilde{\kappa}}$$

以上より、流れの振る舞いは無次元パラメータ Pr と Ra の2つのパラメータのみに依存することが明らかになった。

3. 計算結果

摂動成分の振幅が十分微小な量だと仮定すると、 u, p, θ を解く問題は、線形の固有値問題に置き換えることができる。固有値を σ 、固有ベクトルを (u, p, θ) の各関数を成分とするベクトル \mathbf{x} で表せたとすると、

$$\sigma A \mathbf{x} = B \mathbf{x}.$$

行列 A, B は Ra, Pr, η に依存する行列であり、これを満たすようなゼロではないベクトル \mathbf{x} に対して、いかなる場合も固有値 σ の実部が負であれば、静止状態は安定である。ここで、 $\eta = \frac{\tilde{r}_0 - \Delta\tilde{r}}{\tilde{r}_0 + \Delta\tilde{r}}$ と定義して

いる。図2. では、 $(Pr, \Delta\tilde{r}) = (1, 1)$ に固定して、4とおりの Δr_0 の場合に対して、 Ra の増加に対して

正の σ の値が現れる境界を示している。

たとえば、 $(Pr, \eta) = (1, 0.5)$ に固定して調べると、 $Ra = 12.2$ 付近で σ が負から正に転じる固有モードがあるのだが、興味深いことに、この時発生しうる対流(固有モード)は一つではなく複数存在する。線形代数では、このことを固有値の縮退と呼ぶ。求解に際して、場は球面調和関数 $Y_n^m(\theta, \phi)$ を用いて表されものとし、この場合、 $n = 4$ に分類される5つの独立なモードが最も低いレイリー数で不安定化する(うち4つは共役なモードの対からなる)。不安定化するモードの速度場を図3. に列挙する。

これらのうち、どのような対流のモードが実現されるかは、初期条件によって決まる。また、ここに挙げた計算で Ra は地球のそれに比べ非常に小さい。 Ra が更に増加すると、これらの対流のモードも不安定になり、多様な対流のモードに分化すると考えられる(もしくは時間的な変動をもつ乱流状態へと遷移していくと予想される)が、2重の球の境界間にまたがるスケールをもつ低波数の流体運動は Ra が低い時に得られる場の様子と大局的には差は現れない。

内核は外核内の鉄の温度が冷え地球深部に沈下した部分が蓄積して時間とともに徐々に成長していると考えられている*5。地震波トモグラフィー観測による地球内部の解析からは、内核が西半球と東半球でわずかに異なることが示唆されていて、外核において発生している大規模な対流のモードとも何らかの関連があると考えてよからう。

4. まとめ

本研究では、臨界レイリー数付近における同心2重球殻間の熱対流現象について、概観した。レイリー数やプラントル数に依存せず、定性的には球殻の半径の比によって、対流の不安定固有モードが決まり、それらは一般に縮退していることが多い。

地球内部は層状の構造からなり、その中には液体状態である外核や、地殻プレートを動かす流動性の固体領域(下部マントル)があることは、20世紀に入って、地震波トモグラフィーの観測技術の向上とともに明らかになってきた⁽⁶⁾。1900年代初頭にウェーゲナーが発表した大陸移動説は、その後50年の時を経てプレートテクトニクスと名前を変えてようやく認められるに至り、今や初等教育の教科書にさえ載っている常識と化しているが、たった100年前はまだ非常識であった。このように考えると、地球内部の物理学は、今後100

*5 外核がすべて冷えきってしまうと地磁気は消滅するのだろうか? そうなると現在生命に適している地表面の環境は地獄に転じうる。

年で常識が非常識に、また非常識が常識に変わる可能性が十分にあり、未だ未知の領域が残されている物理学のフロンティアであると言えよう。

参考文献

- (1) 川勝 均：グローバル地震学（パリティ 1月号, 2003)
- (2) Fowler: The Solid Earth (Cambridge University Press, 2005)
- (3) S. Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Clarendon Press, Oxford, 1961)
- (4) L. Li, P. Zhang, X. Liao, and K. Zhang: Multiplicity of nonlinear thermal convection in a spherical shell (Phys Rev E 71, 016301, 2005)
- (5) K. Kimura, S. Takehiro, and M. Yamada: Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell (Phys. Fluids 23, 074101 2011)
- (6) S. G. Brush, C. S. Gillmor: 20世紀の物理学 “地球物理” (pp.715-788, 1999)