

## 多目的 PSO へ一般化包絡分析法の適用

尹 禮 分\*

### Multi-objective Particle Swarm Optimization by using Generalized Data Envelopment Analysis

Yeboon YUN

#### 1 序 論

工学設計のような実問題は、意思決定者の要求の多様化に伴って多目的最適化問題として定式化されることが多い。しかし、多目的最適化問題ではすべての目的関数を同時に最適化する解が必ずしも存在せずそのためパレート最適解 (Pareto optimal solution)<sup>[1]</sup> を求め、意思決定者はその中から自分の選好にあう解を選ぶことになる。従って、多目的最適化では意思決定者の候補になるパレート最適解を見つけることと、その中から最終的な1つの解を選び出すことが本質かつ重要な目的である。近年、遺伝的アルゴリズムや particle swarm optimization (PSO) などのようなメタヒューリスティック (meta-heuristic) 方法による多目的最適化に関する研究<sup>[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13]</sup> が盛んに行われている。多点探索という特徴をもち、一度の探索で複数個のパレート最適解を見つけることができるので、パレート最適解の生成 (特に目的関数の数が2、3個の場合) に有用であることはすでに検証されている。しかし、探索過程において目的空間上でのパレート最適解をなるべく広く分布させること (解の多様性) と、真のパレートフロンティアになるべく早く近づかせること (収束性) が重要な課題であり、そのために様々な工夫やメカニズム (例えば、シェアリング、混雑度の計算、アーカイブ保存、端切り手法、適応度の計算法など) が導入されている。

本稿では PSO による探索過程において解の多様性の維持と収束性を改善するために、一般化包絡分析法

(generalized data envelopment analysis, GDEA)<sup>[14]</sup> を用いたパレート最適解の生成法を紹介する。

#### 2 Particle Swarm Optimization

Kennedy と Eberhat<sup>[7]</sup> により提案された PSO は、鳥や魚の群れが目的地に向かって移動するときの (社会的な) 行動パターンをシミュレーション化することで、解の探索を行う最適化手法の1つである。PSO では、鳥や魚の群れを swarm といい、各個体を particle というが、各 particle はそれぞれ位置 (position) と速度 (velocity) をもつのが特徴である。

PSO によるアルゴリズムは、ある particle に対し、自分の過去の経験を考慮しながら周囲の particle に関する情報に基づき、探索空間における位置を更新するだけである。現時刻  $t$  回目の探索において、particle  $b_i$  の位置ベクトルを  $x_i^t$  とし、速度ベクトルを  $v_i^t$  とすると、次位置  $x_i^{t+1}$  は現位置  $x_i^t$  に新たな速度  $v_i^{t+1}$  を加えることで更新される：

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= x_i^t + v_i^{t+1} \\ v_i^{t+1} &= wv_i + c_1r_1(x_{pb} - x_i^t) + c_2r_2(x_{gb} - x_i^t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、慣性項と呼ばれるパラメータ  $w$  は現速度が次速度の更新に与える影響を制御する。第2項と第3項の  $c_1$ 、 $c_2$  は、ある particle の位置情報を取り入れるパラメータであり、その情報をどのくらい参考にするかを定めるパラメータである。また、パラメータ  $r_1$ 、 $r_2$  は  $[0, 1]$  の一様乱数であり、探索過程において不確定要素を考慮するためである。

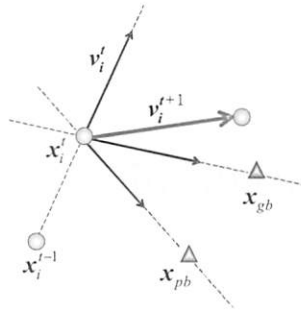


図1 PSOにおける位置更新の概念図

速度は、ある particle  $p_i$  が現在の位置から状態がよくなる可能性のある（目的関数の値が改善できる）場所へ進むための方向を示し、その方向はこれまでの経歴（第1項）と参考にする位置情報（第2項と第3項）によって決められる（図1はPSOによる位置更新の概念図である）。単目的最適化問題の場合は、参考の位置情報  $x_{pb}$  と  $x_{gb}$  は、それぞれ自己最良位置(personal best)と全 swarm の中の最良位置(group best)で与えることが多い。

PSOを多目的最適化問題へ適用する場合は、“最良(最適)”な位置情報が一概に決められないことから、参考にする particle の位置情報の選定は重要な問題であり、さらに解の多様性とも密接な関連がある。本稿では式(1)におけるパラメータ設定法とともに、解の多様性と収束性に対するメカニズムをPSOに取り入れるため、一般化包絡分析法を用いた多目的PSOについて述べる。

### 3 GDEAによる多目的PSO

多目的最適化問題(MOP)を以下のように定式化する：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \quad (\text{MOP}) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, l\} \end{aligned}$$

ただし、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  は設計変数であり、 $X$  は設計空間における実行可能集合である。

ここで、多目的最適化問題(MOP)に対する解の概念の1つであるパレート最適解(Pareto optimal solution)<sup>[11]</sup>を下記のように定義する：

**定義3.1.** 問題(MOP)における  $\hat{x} \in X$  に対し、

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq f_i(\hat{x}) \text{ for all } i = 1, \dots, m, \\ f_j(x) &\neq f_j(\hat{x}) \text{ for some } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

を満たす  $x \in X$  が存在しないとき、 $\hat{x}$  をパレート最適解という。目的関数空間におけるパレート最適解をパレート最適値(Pareto optimal value)といい、その集合をパレートフロンティア(Pareto frontier)と

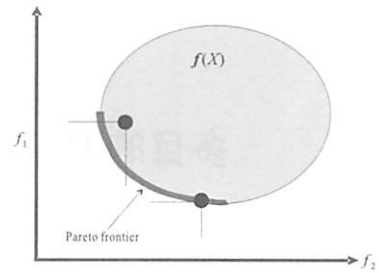


図2 Pareto フロンティア

いう(図2)。

### 多目的PSOの現状

PSOや遺伝的アルゴリズムのようなメタヒューリスティック方法によってパレートフロンティアを生成する際には以下のような特性を考慮しなければならない：

- 解の多様性（目的空間上になるべく広く分布している解の生成）
- 解の収束性（真のパレートフロンティアになるべく近くにある解の生成）

PSOを用いて精度よく、かつなるべく早くパレート最適解を得るためには、式(1)における慣性項パラメータ  $w$  の設定と参考位置情報  $x_{pb}$ 、 $x_{gb}$  の選択が重要であり、これまで種々の多目的PSO法<sup>[2, 4, 6, 9, 10, 12, 13]</sup>が提案されている。しかし、既存の方法では解の多様性を維持するために混雑度距離の計算やクラスタリング、目的関数空間上での領域分割などの操作を行ったり、遺伝的アルゴリズムの考え方(突然変異など)を援用したり、PSOアルゴリズムの本来のシンプルさをなくしているものも少なくない。

### 一般化包絡分析法(GDEA)

包絡分析法(data envelopment analysis, DEA)は、共通した投入を表す入力項目と産出を表す出力項目をもつ事業体の生産活動に対する経営効率性を相対的に評価するために提案された手法の1つである。各事業体の特性や特徴を考慮しながら効率性の評価と改善案の提案(もし非効率であれば)が包絡分析を行う主な目的で、これまで種々のDEAモデルが提案されてきた。しかし、既存の包絡分析法はある特定の価値判断のもとで効率性を算出するため、実問題ではその価値判断に対応できない場合が存在する。そこで、意思決定者の多様な価値観を取り入れながら様々な角度から効率性が測定できる一般化データ包絡分析法(GDEA)<sup>[14]</sup>が提案された。

以下にGDEAを用いた多目的PSOにおけるパラメー

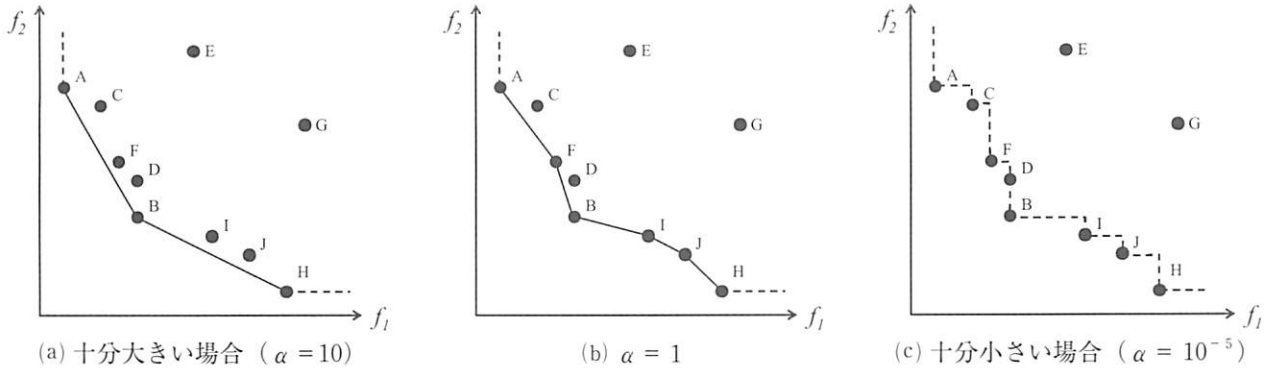


図3 Several cases for GDEA efficient frontier

タ設定法について説明する。

現時刻  $t$  回目の探索<sup>1)</sup>において、各 particle  $p_o, o = 1, \dots, N$  ( $N$ : particle の総数) に対し、次のように定式化される問題 (GDEA) を解く：

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda, s} \quad & \theta - \varepsilon \mathbf{1}^T s && \text{(GDEA)} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha (-F_o + F) + D \lambda - \theta \mathbf{1} + s = 0, \\ & \mathbf{1}^T \lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0, s \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

ただし、

- $F = [f(x_1) \cdots f(x_N)]$ ,
- $F_o = [f(x_o) \cdots f(x_o)]$ ,
- $D$  : 行列  $-F_o + F$  で各列の最大成分以外の成分をすべて 0 に置き換えたもの、
- $\mathbf{1}$  : 全成分が 1 のベクトル、
- $\alpha$  : 正のパラメータ、
- $\varepsilon$  : 十分小さい正の定数。例えば  $10^{-7}$ 。

#### 効率値 $\theta$ の活用

GDEA における  $\theta^*$  の意味は、与えられたデータ集合に基づいて生成された GDEA 効率的フロンティア (これについて詳しくは後述のパラメータ  $\alpha$  の活用で説明する) からどれだけ離れているかを表す指標であり、GDEA による効率性の判定基準になる。つまり、 $\theta^* = 0$  のときは GDEA 効率的であり、 $\theta^* < 0$  のときは GDEA 非効率的であると定義され、 $\theta^*$  の大きさは非効率性の相対的な度合いを表す (GDEA 効率的フロンティアから遠くなれば、 $\theta^*$  の値も小さくなる)。例えば、図 3(a) の例に対する GDEA の評価結果を表 1 に示す。表の結果からわかるように、particle  $p_C$  の効率値  $\theta^*_C = -65.75$  は particle  $p_D$  の効率値  $\theta^*_D = -6.96$  より小さく、従って  $p_C$  の方が  $p_D$  よりも GDEA 効率的フロンティア (図 3(a) の実線) から離れている。

多目的 PSO において解の収束性をよくするために、効率値  $\theta^*$  に応じて式 (1) における慣性項  $w$  を設定す

る。GDEA 効率的な particle に対しては、自分がこれまで移動してきた方向が間違っていないと考えられる。逆に GDEA 非効率的で、 $\theta^*$  の絶対値が大きいものはさらに改善できる可能性があると判断され、現速度の向きや大きさを変えた方がよいと考えられる。従って、GDEA 効率的な particle の場合は 1 になり、もっとも GDEA 非効率的な particle の場合は 0 になるように、 $\theta^*$  の値を標準化し、その値を各 particle の慣性項パラメータ  $w$  の値として設定する。

#### パラメータ $\alpha$ の活用

上記で述べたように GDEA における  $\theta^*$  は効率的フロンティアからの離れ度合いを表す指標であるが、その GDEA 効率的フロンティア自体を決めるのがパラメータ  $\alpha$  の役割である。図 3 にパラメータ  $\alpha$  のいくつかの値に対する GDEA 効率的フロンティアの例を示す。ここで実線が GDEA 効率的フロンティアを表し、破線は弱効率的フロンティアである。例えば  $\alpha$  が十分大きいとき、図 3(a) からわかるように、GDEA 効率的フロンティアはデータ全体を包み込むような凸包の形になる。また、十分小さい  $\alpha$  による GDEA 効率的フロンティアは、図 3(c) のように、パレート最適性を満たしているデータを線分で結んだ形状で、非凸で複雑な形になる。

GDEA による方法では探索回数が大きくなるにつれて  $\alpha$  が小さくなるように設定する。その結果、初期の段階では GDEA 効率的フロンティアから離れている particle (図 3 の  $p_E$  や  $p_G$ ) を早く移動させ、徐々に  $\alpha$  を小さくすることで、非凸の部分のパレート最適解を含み、かつ多くのパレート最適解が生成できる効果をもたらす。

#### 参照集合に関する情報を与える $\lambda$ の活用

GDEA による評価で、particle  $p_o$  ( $o = 1, \dots, N$ ) がもし非効率的であれば  $I_o = \{i \mid \lambda_i^* > 0, i = 1, \dots, N\}$

表1 GDEA による評価結果

	$(f_1, f_2)$	$\theta^*$	$\lambda = (\lambda_A, \dots, \lambda_J)$
A	(1, 12)	0	$\lambda_A = 1$
B	(5, 5)	0	$\lambda_B = 1$
C	(3, 11)	-8.48	$\lambda_A = 0.73, \lambda_B = 0.27$
D	(5, 7)	-6.96	$\lambda_A = 0.17, \lambda_B = 0.83$
E	(8, 14)	-53.09	$\lambda_A = 0.54, \lambda_B = 0.46$
F	(4, 8)	-3.62	$\lambda_A = 0.36, \lambda_B = 0.64$
G	(14, 10)	-65.75	$\lambda_B = 0.69, \lambda_H = 0.31$
H	(13, 1)	0	$\lambda_H = 1$
I	(9, 4)	-5.73	$\lambda_B = 0.59, \lambda_H = 0.41$
J	(11, 3)	-5.77	$\lambda_B = 0.34, \lambda_H = 0.66$

を参照（優位）集合<sup>2)</sup> というが、particle  $p_j, j \in I_o$  はすべて GDEA 効率的であり、 $I_o$  は Particle  $p_o$  に対し（GDEA 効率性の観点から近傍の）優れている particle を表す指標として考えられる。

そこで多目的 PSO における解の多様性を維持するために、 $\lambda^*$  を用いて式(1)における第2項と第3項の参考位置情報<sup>3)</sup> に関する部分を以下のように設定する：

$$\sum_{j \in I_o} \lambda_j^* r_j (x_j - x_o), o = 1, \dots, N \quad (2)$$

ただし、パラメータ  $r_j$  は式(1)と同様な  $[0, 1]$  の一様乱数である。

例えば、表1（図3(a)の例に対する結果）に示されているように、GDEA非効率的なparticle  $p_o, o = C, D, E, F$  に対する優位集合は  $I_o = \{A, B\}$  であり、particle  $p_A$  と  $p_B$  の位置  $x_A, x_B$  を参考位置にする。同様に  $p_o, o = G, I, J$  に対しての優位集合は  $I_o = \{B, H\}$  であり、particle  $p_B$  と  $p_H$  の位置  $x_B, x_H$  を参考位置にする。図3(a)の particle  $p_C$  の場合、表1から  $\lambda_A^* = 0.73, \lambda_B^* = 0.27$  であり、従って式(2)は  $0.73r_1(x_A - x_C) + 0.27r_2(x_B - x_C)$  になる。その結果、各 particle は近傍にある GDEA 効率的な particle の場所（C, D, E, F は線分 AB の付近に、G, I, J は線分 BH の付近）を目指して移動する。このように、参照集合の情報を与える  $\lambda^*$  を用いることで、particle は自然にクラスタリング化される効果があり、解の多様性が維持しやすくなる。

本稿で述べた参考位置情報の設定法に関する特徴を下記にまとめる：

- a) 参考位置を2個以上設定できる。すなわち、周囲の情報をなるべくたくさん取り入れることができる。
- b) particle 間の距離を使用しない。その結果、目的関数空間における particle の分布に影響を受けにくい。

c) 参考位置情報の候補となる particle（GDEA 効率的なもの）を探索回数に応じて設定する。つまり、集団の収束状況を考慮しながら参考位置の設定ができる。

これらのことによって、解の多様性が維持しやすくなり、収束性も改善できる。

#### 4 結論

本稿では、particle swarm optimization (PSO) を多目的最適化問題へ適用する際に生じる2つの問題点である解の多様性維持と収束性をよくするために一般化包絡分析法を用いた多目的 PSO アルゴリズムについて述べた。今後の課題は、多目的 PSO における他手法<sup>[2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13]</sup> との比較検証を行い、類似性や相違点などの関連性についてより詳しく考察することである。

#### 註

- 1) 以後、探索回数を表す上付きの  $t$  は略す。
- 2) GDEA 効率的である Particle  $p_o$  に対しては  $I_o = \{o\}$  になる。
- 3) 本提案手法では、「 $x_{pb}, x_{gb}$ 」をそれぞれ「自己最良位置、全 swarm の中ででの最良位置」のように区別せず、単に参考の位置を表す記号として使う。

#### 参考文献

- [1] C. A. C. Coello, D. A. Van Veldhuizen and G.B. Lamont: Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems; Kluwer Academic Publishers (2001)
- [2] C. A. C. Coello, G. T. Pulido, and M. S. Lechuga : Handling Multiple Objectives with Particle Swarm Optimization ; IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 8, No. 3, pp. 256, 279 (2004)
- [3] K. Deb : Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms ; John Wiley & Sons, LTD. (2001)
- [4] J. E. Fieldsend and S. Singh: A Multi-Objective Algorithm based upon Particle Swarm Optimization, an Efficient Data Structure and Turbulence; Proceedings of 2002 U.K. Workshop on Computational Intelligence, pp. 37,44 (2002)
- [5] D. E. Goldberg : Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning; Addison Wesley (1989)

- [ 6 ] X. Hu and R. Eberhart : Multiobjective Optimization using Dynamic Neighborhood Particle Swarm Optimization : Proceedings of Congress Evolutionary Computation (CEC'02), Vol. 2, pp. 1677. 1681 (2002)
- [ 7 ] J. Kennedy and R. C. Eberhart: Swarm Intelligence; Morgan Kaufmann Publishers (2001)
- [ 8 ] 北山哲士、荒川雅生、山崎光悦 : 非劣解の多様性を考慮した多目的Particle Swarm Optimization : 日本機械学会論文集, Vol. 74, No. 742, pp. 1575. 1583 (2008)
- [ 9 ] S. Mostaghim and J. Teich : Strategies for Finding Good Local Guides in Multi-Objective Particle Swarm Optimization (MOPSO) : Proceedings of 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium, pp. 26. 33 (2003)
- [10] N. Padhye, J. Branke and S. Mostaghim: Empirical Comparison of MOPSO Methods; Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC'09), pp. 2516.2523 (2009)
- [11] V. Pareto: Manuale di Economia Politica, Societa Editrice Libreria, Milano; Translated into English by A. S.Schwier, Manual of Political Economy, Macmilan (1906)
- [12] K. E. Parsopoulos and M. N. Vrahatis : Particle Swarm Optimization Method in Multiobjective Problems; Proceedings of 2002 ACM Symposium on Applied Computing (SAC'2002), pp. 603.607 (2002)
- [13] M. Reyes-Sierra and C. A. C. Coello : Multiple Objective Particle Swarm Optimizers:A Survey of the State-of-Art : International Journal of Computational Intelligence Research, Vol. 2, No. 3, pp. 287. 308 (2006)
- [14] Y. B. Yun, H. Nakayama and T. Tanino : A Generalized Model for Data Envelopment Analysis; European Journal of Operational Research, Vol. 157, No. 1, pp. 87.105 (2004)