

軸対称流れに対して円柱座標で表した ナビエ・ストークス方程式の求め方

板 東 潔*

Derivation of Navier-Stokes Equation of Axisymmetric Flow for Cylindrical Coordinate System

Kiyoshi BANDO

1. はじめに

工業的によく使われる円管の内部流れや軸対称構造物周りの流れを解析する場合、円柱座標で表した流れの方程式が使われることが多い。そこで、流れの運動方程式であるナビエ・ストークス方程式を円柱座標で表すには、一般に次の方法が用いられる。直角座標で表したナビエ・ストークス方程式に対し、座標変換を行うことにより円柱座標に対する方程式を求める。あるいは、ベクトル形式で表したナビエ・ストークス方程式に直交曲線座標を用いて成分表示し、この方程式に直交曲線座標の一つである円柱座標を適用する。しかし、これらの方法は力学的イメージがつかみにくい欠点がある。そこで、ここでは軸対称流れを対象とし、運動量の保存則を出発点として円柱座標に対するナビエ・ストークス方程式を導出する方法を示す。

2. 導出法

2-1 連続の式

軸対称な流れ場内に円柱座標 (x, r, θ) をとり、流速の x, r 方向成分をそれぞれ u, v とする。ここでは流れに中心軸周りの旋回はないものとする。したがって、流速の θ 方向成分はゼロとなる。

いま、流体を非圧縮と仮定する。このとき、連続の式を円柱座標で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

または

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (2)$$

となる⁽¹⁾。

2-2 運動量の保存則

次に、流れ場の中に図1のような検査体積をとり、運動量の保存則を適用する。つまり

$$\begin{aligned} & (\text{検査体積内の運動量の単位時間当たりの増加量}) \\ & = (\text{単位時間当たりに検査体積に流入する運動量}) \\ & - (\text{単位時間当たりに検査体積から流出する運動量}) \\ & + (\text{検査体積が周囲から受ける力の合計}) \end{aligned}$$

を考える。

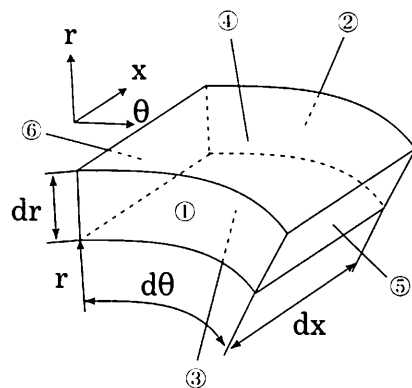


図1 検査体積

x, r 方向運動量をそれぞれ M_x, M_r とし、検査体積に作用する x, r 方向の力をそれぞれ F_x, F_r とすると、 x 方向と r 方向に適用した運動量保存則はそれぞれ次式(3), (4)となる。

$$\dot{M}_x = M_x^{in} - M_x^{out} + F_x \quad (3)$$

$$\dot{M}_r = M_r^{in} - M_r^{out} + F_r \quad (4)$$

原稿受付 平成22年9月14日

*システム理工学部 機械工学科 教授

ただし、 $\dot{}$ は時間に関する微分、上付き添字 *in, out* はそれぞれ単位時間当たりの流入量および流出量を示す。

式(3)の左辺は図1の検査体積について次のようになる。

$$\dot{M}_x = \frac{1}{dt} \left[\left\{ \rho u r dr d\theta dx + \frac{\partial(\rho u r dr d\theta dx)}{\partial t} dt \right\} - \rho u r dr d\theta dx \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u r dr d\theta dx) \quad (5)$$

一方、非圧縮性流体を仮定しているため ρ は一定であり、また $r dr d\theta dx$ は検査体積の体積であるため

$$dV = r dr d\theta dx \quad (6)$$

とおくと、式(5)は次式となる。

$$\dot{M}_x = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (7)$$

x 軸に垂直な検査体積の流入面①の面積は $r dr d\theta$ であり、ここを通過する質量流量 $m_{\text{①}}$ は

$$m_{\text{①}} = \rho u r dr d\theta \quad (8)$$

である。また、 r 軸に垂直な検査体積の流入面③の面積は $r d\theta dx$ であり、ここを通過する質量流量 $m_{\text{③}}$ は

$$m_{\text{③}} = \rho v r d\theta dx \quad (9)$$

である。なお、旋回のない流れを仮定しているため、面⑤、⑥からの流体の流入および流出はない。したがって、式(3)の右辺第1項、すなわち単位時間当たりに流入する x 方向運動量は次式となる。

$$M_x^{\text{in}} = m_{\text{①}} u + m_{\text{③}} u = (\rho u r dr d\theta) u + (\rho v r d\theta dx) u = \rho u^2 r dr d\theta + \rho u v r d\theta dx \quad (10)$$

面②、④から流出する単位時間当たりの x 方向運動量は、式(10)より次の通りとなる。

$$\begin{aligned} M_x^{\text{out}} &= \rho u^2 r dr d\theta + \frac{\partial(\rho u^2 r dr d\theta)}{\partial x} dx \\ &+ \rho u v r d\theta dx + \frac{\partial(\rho u v r d\theta dx)}{\partial r} dr \\ &= \rho u^2 r dr d\theta + \rho \frac{\partial(u^2)}{\partial x} r dr d\theta dx \\ &+ \rho u v r d\theta dx + \rho \frac{\partial(uv r)}{\partial r} dr d\theta dx \\ &= \rho u^2 r dr d\theta + \rho \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dV \\ &+ \rho u v r d\theta dx + \rho \frac{\partial(uv r)}{r \partial r} dV \end{aligned} \quad (11)$$

式(7)、(10)、(11)を式(3)に代入すると次式が得られる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV + \rho \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dV + \rho \frac{\partial(uv r)}{r \partial r} dV = F_x \quad (12)$$

両辺を dV で割ると次式となる。

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv r)}{r \partial r} \right\} = \frac{F_x}{dV} \quad (13)$$

上式を变形して

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{r \partial r} \right) + v \frac{\partial u}{\partial r} \right\} = \frac{F_x}{dV} \quad (14)$$

とし、さらに上式に連続の式(1)を適用すると次式となる。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{F_x}{dV} \quad (15)$$

次に(4)を考える。式(4)の左辺は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{M}_r &= \frac{1}{dt} \left[\left\{ \rho v r dr d\theta dx + \frac{\partial(\rho v r dr d\theta dx)}{\partial t} dt \right\} - \rho v r dr d\theta dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v r dr d\theta dx) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v dV) \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (16)$$

式(4)の右辺第1項、すなわち単位時間当たりに流入する r 方向運動量は、式(8)、(9)を用いると次式となる。

$$M_r^{\text{in}} = m_{\text{⑤}} v + m_{\text{⑥}} v = (\rho u r dr d\theta) v + (\rho v r d\theta dx) v = \rho u v r dr d\theta + \rho v^2 r d\theta dx \quad (17)$$

面②、④から流出する単位時間当たりの r 方向運動量は、式(17)より次の通りとなる。

$$\begin{aligned} M_r^{\text{out}} &= \rho u v r dr d\theta + \frac{\partial(\rho u v r dr d\theta)}{\partial x} dx \\ &+ \rho v^2 r d\theta dx + \frac{\partial(\rho v^2 r d\theta dx)}{\partial r} dr \\ &= \rho u v r dr d\theta + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} r dr d\theta dx \\ &+ \rho v^2 r d\theta dx + \rho \frac{\partial(v^2 r)}{\partial r} dr d\theta dx \\ &= \rho u v r dr d\theta + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} dV \\ &+ \rho v^2 r d\theta dx + \rho \frac{\partial(v^2 r)}{r \partial r} dV \end{aligned} \quad (18)$$

式(16)~(18)を式(4)に代入すると次式が得られる。

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} dV + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} dV + \rho \frac{\partial(v^2 r)}{r \partial r} dV = F_r \quad (19)$$

両辺を dV で割ると

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 r)}{r \partial r} \right\} = \frac{F_r}{dV} \quad (20)$$

上式を変形すると

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{r \partial r} \right) + v \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = \frac{F_r}{dV} \quad (21)$$

となるが、上式に連続の式(1)を適用すると次式となる。

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{F_r}{dV} \quad (22)$$

次に、式(3),(4)中の力 F_x と F_r を求める。ここでは体積力 (B_x, B_r)、圧力による力 (P_x, P_r)、粘性力 (S_x, S_r) を考える。すなわち

$$F_x = B_x + P_x + S_x \quad (23)$$

$$F_r = B_r + P_r + S_r \quad (24)$$

2-3 体積力

まず体積力について考える。単位質量あたりに作用する x, r 方向の力をそれぞれ X, R とすると、 B_x, B_r はそれぞれ次のようになる。

$$B_x = \rho X dV \quad (25)$$

$$B_r = \rho R dV \quad (26)$$

2-4 圧力による力

圧力による力は図2を参照すると以下の通りとなる。

まず、圧力による x 方向の力 P_x は

$$\begin{aligned} P_x &= \underbrace{prdrd\theta}_{P_A} - \underbrace{\left(prdrd\theta + \frac{\partial(prdrd\theta)}{\partial x} dx \right)}_{P_B} \\ &= -\frac{\partial(prdrd\theta)}{\partial x} dx = -\frac{\partial p}{\partial x} r dr d\theta dx \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (27)$$

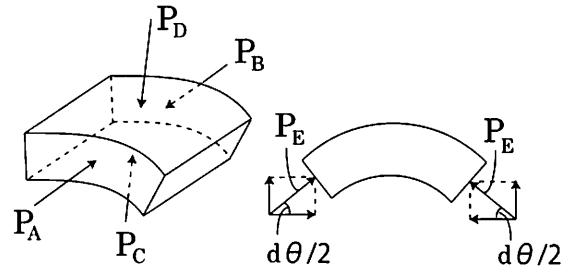


図2 圧力による力

圧力による r 方向の力 P_r の計算では、 r 軸に垂直な面③、④(図1)に作用する力 $P_r^{(1)}$ だけでなく、 θ 軸に垂直な面⑤、⑥(図1)に作用する力の半径方向成分 $P_r^{(2)}$ を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} P_r^{(1)} &= \underbrace{pr d\theta dx}_{P_C} - \underbrace{\left(pr d\theta dx + \frac{\partial(pr d\theta dx)}{\partial r} dr \right)}_{P_D} \\ &= -\frac{\partial(pr d\theta dx)}{\partial r} dr = -\frac{\partial(pr)}{\partial r} r dr d\theta dx \\ &= -\frac{\partial(pr)}{r \partial r} r dr d\theta dx = -\frac{\partial(pr)}{r \partial r} dV \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} dV - \frac{p}{r} dV \end{aligned} \quad (28)$$

$$P_r^{(2)} = 2 \underbrace{p dr dx}_{P_E} \left(\frac{d\theta}{2} \right) = p dr dx d\theta = \frac{p}{r} dV \quad (29)$$

したがって

$$P_r = P_r^{(1)} + P_r^{(2)} = -\frac{\partial p}{\partial r} dV \quad (30)$$

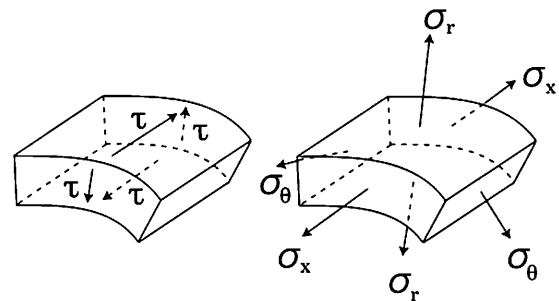


図3 粘性応力

2-5 粘性力

次に、粘性力を求める。軸対称流れの仮定により、図3中に示される応力による力のみを考えればよい。

2-5-1 せん断変形による粘性力 図3の左図では

$x-r$ 面内でのせん断変形が生じるが、この $x-r$ 面内のせん断変形の中で x 軸に垂直な面のみが回転する単位時間当たりの変形を図4に示す。この時に発生するせん断応力を検査体積下面と左面で τ_1 とすると、 x 方向に働く力 $S_x^{(\tau_1)}$ は

$$\begin{aligned} S_x^{(\tau_1)} &= -\tau_1 r d\theta dx + \left\{ \tau_1 r d\theta dx + \frac{\partial(\tau_1 r d\theta dx)}{\partial r} dr \right\} \\ &= \frac{\partial(\tau_1 r d\theta dx)}{\partial r} dr = \frac{\partial(\tau_1 r)}{\partial r} dr d\theta dx = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_1)}{\partial r} dV \end{aligned} \quad (31)$$

r 方向に働く力 $S_r^{(\tau_1)}$ は

$$\begin{aligned} S_r^{(\tau_1)} &= -\tau_1 r dr d\theta + \left\{ \tau_1 r dr d\theta + \frac{\partial(\tau_1 r dr d\theta)}{\partial x} dx \right\} \\ &= \frac{\partial(\tau_1 r dr d\theta)}{\partial x} dx = \frac{\partial\tau_1}{\partial x} r dr d\theta dx = \frac{\partial\tau_1}{\partial x} dV \end{aligned} \quad (32)$$

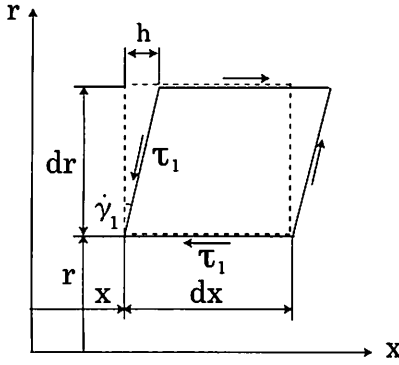


図4 単位時間当たりのせん断変形(1) (変形前:破線、変形後:実線)

一方、面 $r=r$ および $r=r+dr$ における x 方向流速はそれぞれ $u, u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$ であるため、図4中の長さ h は

$$h = \frac{\partial u}{\partial r} dr \quad (33)$$

となる。図中の角度 $\dot{\gamma}_1$ はせん断ひずみ速度を示すが、これは微小であるから次式が成り立つ。

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{h}{dr} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} dr \right) / dr = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (34)$$

したがって、 μ を流体の粘性係数とすると、ニュートンの粘性法則より

$$\tau_1 = \mu \dot{\gamma}_1 \quad (35)$$

となる。式(34)を式(35)に代入すると

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (36)$$

上式を式(31), (32)に代入すると、それぞれ次のようになる。

$$S_x^{(\tau_1)} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dV \quad (37)$$

$$S_r^{(\tau_1)} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) dV \quad (38)$$

次に、 $x-r$ 面内のせん断変形の中で r 軸に垂直な面のみが回転する単位時間当たりの変形を図5に示す。この時発生するせん断応力を検査体積下面と左面で τ_2 とする。角度 $\dot{\gamma}_1$ (図4)、および $\dot{\gamma}_2$ (図5) はともに微小である。したがって、図5で x 方向に働く力は、式(31)と同様に

$$S_x^{(\tau_2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_2)}{\partial r} dV \quad (39)$$

となり、図5で r 方向に働く力は、式(32)と同様に

$$S_r^{(\tau_2)} = \frac{\partial\tau_2}{\partial x} dV \quad (40)$$

となる。

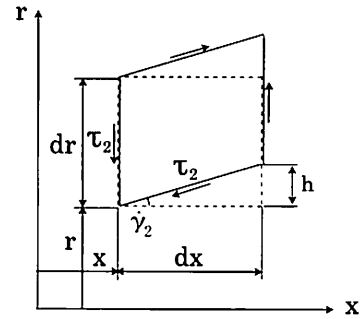


図5 単位時間当たりのせん断変形(2) (変形前:破線、変形後:実線)

一方、面 $x=x$ および $x=x+dx$ における r 方向流速はそれぞれ $v, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ であるため、図5中の長さ h は

$$h = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (41)$$

となる。図中の角度 $\dot{\gamma}_2$ はせん断ひずみ速度を示すが、これは微小であるから次式が成り立つ。

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{h}{dx} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) / dx = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (42)$$

したがって、ニュートンの粘性法則より

$$\tau_2 = \mu \dot{\gamma}_2 \quad (43)$$

となる。式(42)を式(43)に代入すると

$$\tau_2 = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad (44)$$

上式を式(39), (40)に代入すると、それぞれ次のようになる。

$$S_x^{(\tau_2)} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV \quad (45)$$

$$S_r^{(\tau_2)} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dV \quad (46)$$

せん断変形は図4と図5の変形が同時に起こるため、せん断変形による x, r 方向の力はそれぞれ式(37)と(45), および式(38)と(46)を加え合わせるにより得られ、次のようになる。

$$S_x^{(\tau)} = S_x^{(\tau_1)} + S_x^{(\tau_2)} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dV \quad (47)$$

$$S_r^{(\tau)} = S_r^{(\tau_1)} + S_r^{(\tau_2)} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV \quad (48)$$

2-5-2 伸縮変形による粘性力 次に、検査体積が x, r, θ 方向に伸縮変形する場合について粘性力を求める。いずれの場合についても、変形前の検査体積形状は

$$dx = dr = r d\theta \quad (49)$$

とし、検査体積の中心の座標を (x, r, θ) とする。

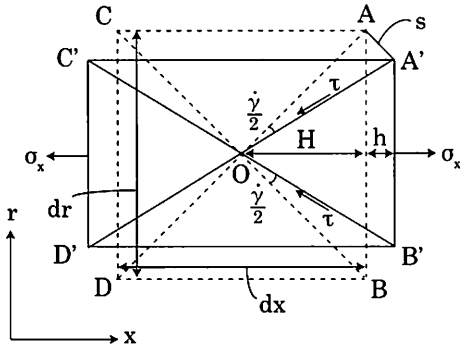


図6 検査体積の単位時間当たりの変形 ($x-r$ 面内、破線：変形前、実線：変形後)

図6は検査体積の x 軸に垂直な面 ($x = x \pm dx/2$) に引張応力 σ_x が作用する場合、検査体積の単位時間当たりの変形の様子を示す。ただし、図は検査体積の中心を通る $x-r$ 面内の形状である。変形前の正方形

ABCD が変形後に長方形 A'B'C'D' になる。点 O の x 方向流速は u 、辺 AB の x 方向流速は $u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}$ であるため、辺 AB の単位時間後の x 方向変位 h は次の通りになる。

$$h = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (50)$$

三角形 OAB は三角形 OA'B' にせん断変形し、角 $\angle AOB$ は角 $\angle A'O'B'$ に変化するため、三角形 OAB のせん断ひずみ速度を $\dot{\gamma}$ とすると、角 $\angle AOA' =$ 角 $\angle BOB' = \dot{\gamma}/2$ となる。辺 OA' と OB' にはせん断応力 τ が発生するが、ニュートンの粘性法則より次式が成り立つ。

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (51)$$

辺 AA' の長さを s とする。角度 $\dot{\gamma}/2$ は微小であるから

$$s = \overline{OA} \frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (52)$$

となるが

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \frac{dx}{2} = \frac{dx}{\sqrt{2}} \quad (53)$$

であるため、上式を式(52)に代入すると次式となる。

$$s = \frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{2}} dx \quad (54)$$

一方、角 $\angle AA'C' = 45^\circ$ であるため、式(50)を使うと

$$s = \sqrt{2}h = \sqrt{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (55)$$

となり、式(54), (55)を等置すると次式が得られる。

$$\dot{\gamma} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (56)$$

次に、三角形 OA'B' について力の釣り合いを考えるが、ひずみは微小であるため、三角形 OA'B' の代わりに三角形 OAB について x 方向の力の釣り合いを考える。このとき、 σ_x は辺 AB 上、 τ は辺 OA, OB 上に作用すると考えてよい。したがって、次式が成り立つ。

$$\sigma_x \overline{AB} = 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \overline{OA} \quad (57)$$

一方

$$\overline{AB} = dr \quad (58)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2}\frac{dx}{2} = \frac{dx}{\sqrt{2}} \quad (59)$$

であるから、これらの式および $dx=dr$ を式(57)に代入すると、次式が得られる。

$$\sigma_x = \tau \quad (60)$$

以上の式(51)、(56)、(60)より次式が得られる。

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (61)$$

図7は検査体積の θ 軸に垂直な面 ($\theta = \theta \pm d\theta/2$) に引張応力 σ_θ が作用する場合、検査体積の単位時間当たりの変形の様子を示す。ただし、図は検査体積の中心を通る $r\theta-x$ 面内の形状であり、 $r=一定$ である。変形前の正方形 ABCD が変形後に長方形 A'B'C'D' になる様子は図6と同様である。ここでは旋回のない軸対称流れを仮定しているため、流速の周方向成分はゼロであるが、検査体積は図7のように周方向 (θ 方向) に伸びる。これは、流速の半径方向成分 v の影響により、検査体積は単位時間に r 方向に v だけ移動し、このとき変形前の周方向長さ $rd\theta$ は $(r+v)d\theta$ となり、周方向の伸びが $vd\theta$ となるからである。したがって、図7中の h は

$$h = \frac{v}{2}d\theta \quad (62)$$

となる。

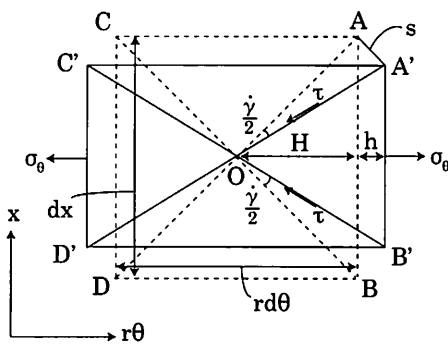


図7 検査体積の単位時間当たりの変形 ($r\theta-x$ 面内、 $r=一定$ 、破線：変形前、実線：変形後)

三角形OABは三角形OA'B'にせん断変形し、ニュートンの粘性法則より次式が成り立つ。

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \quad (63)$$

辺 AA' の長さを s とすると

$$s = \overline{OA} \frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (64)$$

となるが

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2}\frac{rd\theta}{2} = \frac{rd\theta}{\sqrt{2}} \quad (65)$$

であるため、上式を式(64)に代入すると次式となる。

$$s = \frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{2}}rd\theta \quad (66)$$

一方、角 $\angle AA'C' = 45^\circ$ であるため、式(62)を使うと

$$s = \sqrt{2}h = \sqrt{2}\frac{v}{2}d\theta = \frac{v}{\sqrt{2}}d\theta \quad (67)$$

となり、式(66)、(67)を等置すると次式が得られる。

$$\dot{\gamma} = 2\frac{v}{r} \quad (68)$$

次に、三角形 OAB' について力の釣り合いを考えるが、ひずみは微小であるため、三角形 OAB' の代わりに三角形 OAB について θ 方向の力のつり合いを考える。このとき、 σ_θ は辺 AB 上、 τ は辺 OA、OB 上に作用すると考えてよい。したがって、次式が成り立つ。

$$\sigma_\theta \overline{AB} = 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \overline{OA} \quad (69)$$

一方

$$\overline{AB} = dx \quad (70)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2}\frac{rd\theta}{2} = \frac{rd\theta}{\sqrt{2}} \quad (71)$$

であるから、これらの式および $dx=rd\theta$ を式(69)に代入すると、次式が得られる。

$$\sigma_\theta = \tau \quad (72)$$

以上の式(63)、(68)、(72)より次式が得られる。

$$\sigma_\theta = 2\mu \frac{v}{r} \quad (73)$$

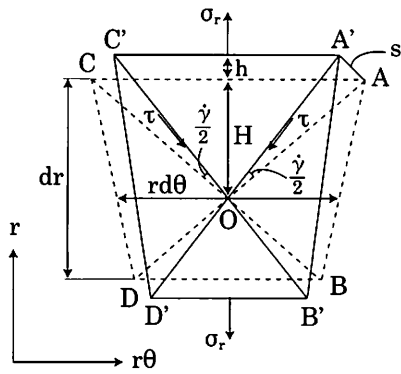


図8 検査体積の単位時間当たりの変形 ($r\theta - r$ 面内、破線：変形前、実線：変形後)

図8は検査体積の r 軸に垂直な面 ($r=r \pm dr/2$) に引張応力 σ_r が作用する場合、検査体積の単位時間当たりの変形の様子を示す。ただし、図は検査体積の中心を通る $r\theta - r$ 面内の形状である。変形前の四角形 ABCD が変形後に四角形 A'B'C'D' になる。点 O の r 方向流速は v 、辺 AC の r 方向流速は $v + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{2}$ であるため、辺 AC の単位時間後の r 方向変位 h は次の通りになる。

$$h = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{2} \quad (74)$$

三角形 OAC は三角形 OA'C' にせん断変形し、角 $\angle AOC$ は角 $\angle A'OC'$ に変化するため、三角形 OAC のせん断ひずみ速度を $\dot{\gamma}$ とすると、角 $\angle AOA' = \text{角} \angle COC' = \dot{\gamma}/2$ となる。辺 OA' と OC' にはせん断応力 τ が発生するが、ニュートンの粘性法則より次式が成り立つ。

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (75)$$

辺 AA' の長さを s とする。角度 $\dot{\gamma}/2$ は微小であるから

$$s = \overline{OA} \frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (76)$$

となるが

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \frac{dr}{2} = \frac{dr}{\sqrt{2}} \quad (77)$$

であるため、上式を式(76)に代入すると次式となる。

$$s = \frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{2}} dr \quad (78)$$

一方、角 $\angle AA'B' = 45^\circ$ であるため、式(74)を使うと

$$s = \sqrt{2}h = \sqrt{2} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial r} dr \quad (79)$$

となり、式(78)、(79)を等置すると次式が得られる。

$$\dot{\gamma} = 2 \frac{\partial v}{\partial r} \quad (80)$$

次に、三角形 OA'C' について力の釣り合いを考えるが、ひずみは微小であるため、三角形 OA'C' の代わりに三角形 OAC について r 方向の力のつり合いを考える。このとき、 σ_r は辺 AC 上、 τ は辺 OA、OC 上に作用すると考えてよい。したがって、次式が成り立つ。

$$\sigma_r \overline{AC} = 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \overline{OA} \quad (81)$$

一方

$$\overline{AC} = \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta \quad (82)$$

となるが、 $drd\theta$ は二次の微小量であり無視できるため

$$\overline{AC} = rd\theta \quad (83)$$

となる。また

$$\overline{OA} = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \frac{dr}{2} = \frac{dr}{\sqrt{2}} \quad (84)$$

であるから、式(83)、(84)および $dr = rd\theta$ を式(81)に代入すると、次式が得られる。

$$\sigma_r = \tau \quad (85)$$

以上の式(75)、(80)、(85)より次式が得られる。

$$\sigma_r = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \quad (86)$$

ここで、式(61)、(73)、(86)をまとめて再記すると次式となる。

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_\theta = 2\mu \frac{v}{r} \\ \sigma_r = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \quad (87)$$

次に、式(87)を用いて検査体積に作用する力を求める。 σ_x による x 方向の力を $S_x^{(\sigma_x)}$ 、 σ_θ による r 方向の力を $S_r^{(\sigma_\theta)}$ 、 σ_r による r 方向の力を $S_r^{(\sigma_r)}$ と表すと、これらはそれぞれ以下の通りになる。

$$S_x^{(\sigma_x)} = -\sigma_x r dr d\theta + \left\{ \sigma_x r dr d\theta + \frac{\partial(\sigma_x r dr d\theta)}{\partial x} dx \right\}$$

$$= \frac{\partial(\sigma_x r dr d\theta)}{\partial x} dx = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} r dr d\theta dx = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dV \quad (88)$$

$$S_r^{(\sigma_\theta)} = -2\sigma_\theta dr dx \frac{d\theta}{2} = -\sigma_\theta dr dx d\theta = -\frac{\sigma_\theta}{r} dV \quad (89)$$

$$S_r^{(\sigma_r)} = -\sigma_r r d\theta dx + \left\{ \sigma_r r d\theta dx + \frac{\partial(\sigma_r r d\theta dx)}{\partial r} dr \right\}$$

$$= \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} dr d\theta dx = \frac{\partial(r\sigma_r)}{r\partial r} dV \quad (90)$$

これらの式に式(87)を代入すると、それぞれ以下の通りとなる。

$$S_x^{(\sigma_x)} = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV \quad (91)$$

$$S_r^{(\sigma_\theta)} = -2\mu \frac{v}{r^2} dV \quad (92)$$

$$S_r^{(\sigma_r)} = 2\mu \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dV \quad (93)$$

2-5-3 せん断変形と伸縮変形を合わせた粘性力
以上より、せん断変形と伸縮変形を合わせた x 方向の粘性力 S_x は、式(47), (91)を加え合わせると

$$S_x = S_x^{(\tau)} + S_x^{(\sigma_x)} =$$

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dV + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV \quad (94)$$

となる。上式を変形すると次のようになる。

$$S_x = \mu \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\} dV$$

$$= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} dV \quad (95)$$

さらに、上式に連続の式(2)を適用すると次式となる。

$$S_x = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} dV \quad (96)$$

さらに変形すると、次式となる。

$$S_x = \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} dV \quad (97)$$

次に、せん断変形と伸縮変形を合わせた r 方向の粘性力 S_r は、式(48), (92), (93)を加え合わせると次のようになる。

$$S_r = S_r^{(\tau)} + S_r^{(\sigma_\theta)} + S_r^{(\sigma_r)}$$

$$= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2\frac{v}{r^2} + 2\frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\} dV$$

$$= \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right\} dV \quad (98)$$

上式に連続の式(2)を適用すると

$$S_r = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right\} dV \quad (99)$$

または、次式となる。

$$S_r = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right\} dV \quad (100)$$

2-6 円柱座標で表したナビエ・ストークス方程式

以上より、 x 方向の力 F_x は式(25), (27), (97)を加え合わせ、 r 方向の力 F_r は式(26), (30), (100)を加え合わせることににより以下のようになる。

$$F_x = \rho X dV - \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$+ \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} dV \quad (101)$$

$$F_r = \rho R dV - \frac{\partial p}{\partial r} dV$$

$$+ \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right\} dV \quad (102)$$

式(101), (102)をそれぞれ式(15), (22)に代入すると、軸対称流れに対して円柱座標で表したナビエ・ストークス方程式が得られ、次の通りになる。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+ \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \quad (03)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \rho R - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+ \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right\} \quad (04)$$

3. おわりに

ここでは、運動量の保存則を基礎として軸対称流れに対するナビエ・ストークス方程式を導いた。その導出過程は多少長くなるが、数学的な難解さを避けるため、初歩的な流体力学的考察のみを用いる導出法を示した。軸対称流れは本来三次元流れであるが、式(03)、(04)から分かるように、 $x-r$ 面内での二次元流れとして扱うことができる。したがって、複雑な三次元流れも軸対称流れとして近似することにより、理論的取り扱いを簡単にすることが可能となる。

文 献

- (1) 大場・板東、流体の力学—現象とモデル化—、2006、コロナ社。