

## 弾性膜と粘弾性体の力学の基礎 — 循環・呼吸の力学への第一歩 —

大 場 謙 吉\*

### Elementary Mechanics for Elastic Membrane and Visco-elastic Solid — First Step to Mechanics of Circulation and Respiration —

Kenkichi OHBA

#### 1. はじめに

ヒトの循環器系、呼吸器系、泌尿器系、消化器系では様々な形で弾性膜、弾性管、弾性袋、弾性殻と血液、空気、尿、泥状懸濁物などの流れとの間で相互作用が生じている。ヒトの体内での生命維持活動そのものであるこれらの相互作用は、力学的観点から見ると、弾性力学と流体力学の両方が関係する連成現象としてまとめられて考えることができる。

筆者は既に、このような観点に立って、動脈中の脈波の伝播現象を表わす数学モデルと動脈の最低血圧発生機序を表わす“Windkessel”モデルを主な内容とする解説記事を執筆した<sup>(1)</sup>。この10年前の解説<sup>(1)</sup>は流体力学と材料力学の基礎的素養を持つ読者を想定したものであったが、循環、呼吸の力学的側面に関心を持つ学生は生体医工学系、機械系だけでなく、電気系、化学系、生物系から看護系、福祉系、薬学系、栄養学系に至るまで非常に幅が広いことが分かってきた。

よって、本解説の目的は循環、呼吸を力学的に取り扱うための初歩の基礎とも言うべき事項を取り上げて、分かり易く説明することである。ヒトの身体を取り扱う学問の持つ専門分野横断的、複合的性質を反映して、初歩の基礎と言えども、関連する様々な学問分野の教科書に各々バラバラに記載されている原理や基礎的事項をもれなく寄せ集めて編集し、体系的に理解することが必要である。本解説はその助けになるようなごく易しい入門書となることを願って書かれたものである。

#### 2. フック弾性体、ニュートン流体、ラプラスの法則

ヒトの循環器系、呼吸器系、消化器系、泌尿器系を構成している臓器、組織は、動脈・静脈血管、心臓、心臓弁の弁葉、気管支、細気管支、肺胞、声帯の声門、食道、胃、小腸、大腸、膀胱、尿管など、複雑な多層構造の粘弾性膜構造体であるが、最も単純な力学モデルではこれら全てをたった1種類の弾性体モデル、すなわち「フック弾性体 (Hookean elastic solid)」によって近似的に表現する。

一方、血液、空気、尿なども最も単純な力学モデルでは1種類の流体モデル、すなわち「ニュートン流体 (Newtonian viscous fluid)」によって近似的に表現する。

弾性体、流体などの材料の力学的性質は構成方程式 (constitutive equation) によって定められる。構成方程式とはその材料についての応力 (stress) とひずみ (strain) の関係式のことである。

#### 2.1 フック弾性体

フック弾性体とは“応力とひずみが比例する。”という「フック (Hooke) の法則」に従う材料のことである。

垂直応力と垂直ひずみの関係は

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1)$$

ここに、 $E$ : ヤング率 (Young's modulus) [Pa]、 $\sigma$ : 垂直応力 [Pa]、 $\varepsilon$ : 垂直ひずみ [-] である。

せん断応力とせん断ひずみの関係は

$$\tau = G \gamma \quad (2)$$

ここに、 $G$ : 剛性率 [Pa]、 $\tau$ : せん断(ずり)応力 [Pa]、 $\gamma$ : せん断(ずり)ひずみ [-] である。

圧力と体積ひずみの関係は

$$dp = K \frac{d\rho}{\rho} \quad (3)$$

ここに、 $K$ ：体積弾性率 [Pa]、 $p$ ：圧力 [Pa]、 $\rho$ ：密度 [kg/m<sup>3</sup>] である。

フックの法則(1)~(3)には時間が含まれていないので、応力の変化に対するひずみの変化は瞬時に起こる。

## 2.2 ニュートン流体

ニュートン流体とは“せん断応力とせん断ひずみ速度が比例する。”という「ニュートン (Newton) の粘性法則」に従う粘性流体のことである。

$$\tau = \mu \frac{dy}{dt} \quad (4)$$

ここに、 $\mu$ ：粘度 [Pa·s]、 $dy/dt$ ：せん断ひずみ速度 (ずり速度) [s<sup>-1</sup>] である。

## 2.3 ラプラスの法則

ゴム風船のような薄肉弾性球殻 (球形風船) と薄肉弾性円筒 (円筒形風船) を考える。風船の内圧を  $p_i$  [Pa]、周囲の圧力を  $p_e$  [Pa]、風船の膜張力 (膜面内の垂直応力を膜厚方向に積分したものを)  $T$  [N/m]、風船の半径を  $r$  とすると、 $p_i$ 、 $p_e$ 、 $T$  による風船の半径方向の力の釣り合いより

球形風船の場合、

$$p_i - p_e = \frac{2T}{r} \quad (5)$$

円筒形風船の場合、

$$p_i - p_e = \frac{T}{r} \quad (6)$$

が導かれる。式(5)、(6)を「ラプラス (Laplace) の法則」または「ラプラスの式」と呼ぶ\*<sup>1)</sup>。

式(5)、(6)の導出は紙面の都合で割愛するが、筆者らの流体力学の教科書<sup>(2)</sup> でいねいに導かれているので参照して頂きたい。教科書<sup>(2)</sup> では、歴史的にラプラスが最初に導いたときと同様に表面張力が働く場合を扱っているが、表面張力をもっと一般的に膜張力  $T$  で置き換えても全く同じ議論が成り立つ。

式(5)、(6)より、同じ内外圧力差  $p_i - p_e$  がかかっても大きな半径の風船では膜張力が大きく、半径が小さいと膜張力が小さいことが分かる。

\* 歴史的には「ラプラスの法則」はヤング (Thomas Young) がラプラスより約1年早く発見した (1804年) が、様々な事情により今日ではラプラスの名が冠されている。ちなみに、式(1)の縦弾性係数  $E$  はヤングが最初に導入したので、「ヤング率」と呼ばれている。

## 2.4 二次元応力状態

生体内の弾性膜、例えば、心臓弁の弁葉、肺胞、赤血球内部のヘモグロビン溶液を包んでいる脂質二重膜などの変形を力学的に取り扱うとき、膜が非常に薄いので曲げ剛性を無視できることが多い。この時の膜モデルとして等方性材料でできた薄肉弾性膜が使われる。その変形を扱う場合に必要な二次元応力状態 (平面応力状態) の基礎式を以下に示す。

応力の  $x$ 、 $y$  方向成分を各々  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、ひずみの  $x$ 、 $y$  方向成分を各々  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、ポアソン (Poisson) 比を  $\nu$ 、ずり応力を  $\tau$ 、ずりひずみを  $\gamma$  とすると、フックの法則より平面応力状態における応力とひずみの関係は

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (8)$$

$$\tau = G \gamma \quad (9)$$

となる。

## 3. 球形ゴム風船 (薄肉弾性球殻) の理論

球形のゴム風船 (薄肉弾性球殻) を膨らませた場合を考える。ゴム風船内部の圧力を  $p_i$ 、外部の圧力を  $p_e$ 、ゴム風船の半径と膜厚を各々  $r$ 、 $t$ 、膜に働く引張り応力を  $\sigma$  とすると、ラプラスの法則、式(5)より

$$p_i - p_e = \frac{2\sigma t}{r} \quad (10)$$

が成り立つ。

球座標における天頂角  $\theta$  方向および方位角  $\phi$  方向の応力とひずみを各々  $\sigma_\theta$ 、 $\varepsilon_\theta$  および  $\sigma_\phi$ 、 $\varepsilon_\phi$  とすると、平面応力状態における応力とひずみの関係、式(7)、(8)を用いると、

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_\phi) \quad (11)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_\theta) \quad (12)$$

が成り立つ。

いま、応力とひずみの等方性を仮定すると

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \varepsilon \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \sigma \quad (14)$$

となる。

式(13)、(14)を式(11)、(12)に代入すると、

$$\sigma = \frac{E}{1 - \nu} \varepsilon \quad (15)$$

が得られる。

いま、球形ゴム風船の初期半径 (膨らませる前の半径) を  $r_0$  とすると、半径  $r$  まで膨らんだ時の膜のひず

み  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = \frac{(2\pi r - 2\pi r_0)}{2\pi r_0} = \frac{(r - r_0)}{r_0} \quad (16)$$

となる。

したがって、式(15)、(16)より

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \frac{r - r_0}{r_0} \quad (17)$$

次に、ゴム風船がふくらんで半径が大きく、膜厚が薄くなる場合、ゴム膜自体の体積は一定と考えられるため（非圧縮性材料の仮定）、 $t_0$ を初期ゴム膜厚とすると、

$$4\pi r^2 t = 4\pi r_0^2 t_0 \quad (18)$$

が成り立つ。

式(18)より

$$t = \frac{r_0^2 t_0}{r^2} \quad (19)$$

となる。

式(17)、(19)を式(10)に代入すると、

$$p_i - p_e = \frac{2Er_0 t_0}{1-\nu} \frac{r - r_0}{r^3} \quad (20)$$

が得られる。これが球形のゴム風船に対する内外圧力差  $p_i - p_e$  と風船半径  $r$  との関係である。

図1に  $p_i - p_e$  と  $r$  の関係を示す。外圧  $p_e$  は一定ゆえ、内圧  $p_i$  について考えればよい。図1より、風船がふくらみ始めると共に内圧が急激に増加し、初期半径の1.5倍でピークに達するが、半径が  $1.5r_0$  を超えると逆に半径の増加と共に内圧は緩やかに下がり始める。ただし、図1の曲線は最も単純なモデルから得られた式(20)を描いたものであり、実測曲線はモデルで考慮しなかったゴムの結晶化などの効果によってピークの位置と値が少し変わり、かつピーク後の減少から  $r$  をさらに増すと増加に転じる。

この特徴的な内圧 - 半径の関係は既にいくつかの分野で利用されている。例えば、心臓外科の分野では、心臓移植しか救命手段が無いと言われる拡張型心筋症という重い心臓疾患に有効な唯一の手術として「バチスタ (Batista) 手術」がある。

バチスタ手術では、拡張して心室半径が大きくなった左心室の側壁心筋を、例えば円周長の4分の1の長さだけ子午線に沿って心尖部付近から大動脈弁部近傍まで切除し、残りを縫い合わせて左心室半径を4分の3に縮小する。すると不思議なことにそれだけで心臓が血液を送り出し始める。何故そうなるかは、ラプラスの式(5)または(6)を見れば分かる。心筋が生み出し得る最大張力  $T$  が与えられた場合、式の右辺の分母  $r$  を小さくすれば、左辺の内圧  $p_i$  を上げることができ、よって血管系の上下流の圧力差を大きくすることがで

き、心臓が送り出す血流量を増やすことができるわけである。

式(20)と図1で示される内圧 - 半径の関係を確かめる非常に簡単な実験がある。同じ風船を2個用意し、その2つを異なる大きさまでふくらませてつなぐ。すなわち、初期半径が異なる2つの風船を導通させた時に各風船の大きさがどのように変わるかを観察するわけである。流体は圧力の高い方から低い方へ流れるので、2種類の結果が予想される。1つ目は、大きい風船は小さくなり、小さい風船は大きくなって、双方の大きさが等しくなって平衡する。2つ目は、大きい風船はますます大きく、小さい風船はますます小さくなって行き、大きさの差が拡大した状態で平衡する。式(20)より初期半径の与え方によって上記のどちらの結果も出せることが予測でき、筆者自身が実験で確認済みである。

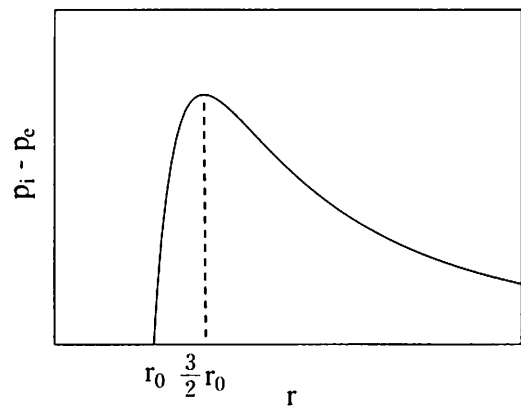


図1 球形ゴム風船の半径と内外圧力差の関係

#### 4. ケルビン粘弾性体

フック弾性体は外力がかかると瞬時に変形するが、現実の生体組織は、例えば自分の掌を指で押したとき元の形に戻るのに1秒くらい時間がかかることから分かるように、弾性だけでなく粘性も持っている。したがって、生体組織の力学モデルは弾性と粘性を持つ材料モデルでなければならない。このような材料を「粘弾性固体 (visco-elastic solid)」または「粘弾性体」と呼ぶ。

粘弾性体の基本的な力学モデルとしてマックスウェル (Maxwell) モデル、フォークト (Voigt) モデル、ケルビン (Kelvin) モデルがある。本解説では、これら3つの基本モデルの中で最も一般的に粘弾性を近似しており、標準線形固体とも呼ばれているケルビンモデルを取り上げ、Y.C. Fungの教科書<sup>(3)</sup>に沿って解説して行くことにする。

#### 4.1 ケルビン粘弾性体の構成方程式

ケルビンモデルは図2に示されるように、2つの線形バネと1つのダッシュポットから構成される。

バネは材料の弾性を表わし、外力  $F$  とバネの変形量  $u$  の関係はフックの法則より、

$$F = ku \quad (21)$$

によって与えられる。ここに、 $k$  はバネ定数である。

一方、ダッシュポットは材料の粘性を表わし、外力  $F$  とダッシュポットの変形量  $u$  の関係はニュートンの粘性法則より

$$F = \mu \frac{du}{dt} \quad (22)$$

によって与えられる。ここに、 $\mu$  はダッシュポットの粘性係数である。

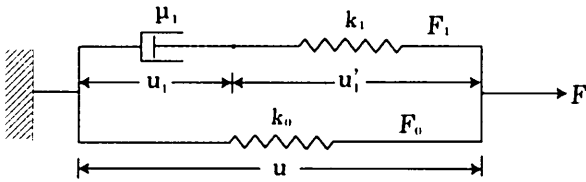


図2 粘弾性体のケルビンモデル (標準線形固体)

図2より

$$u = u_1 + u_1' \quad (23)$$

$$F = F_0 + F_1 \quad (24)$$

$$F_0 = k_0 u \quad (25)$$

$$F_1 = \mu_1 \frac{du_1}{dt} = k_1 u_1' \quad (26)$$

式(24)に式(23)、(25)、(26)を代入すると、

$$F = k_0 u + k_1 u_1' = (k_0 + k_1)u - k_1 u_1 \quad (27)$$

式(27)を  $t$  で微分して、

$$\frac{dF}{dt} = (k_0 + k_1) \frac{du}{dt} - k_1 \frac{du_1}{dt} \quad (28)$$

式(27)、(28)より、

$$F + \frac{\mu_1}{k_1} \frac{dF}{dt} =$$

$$(k_0 + k_1)u - k_1 u_1 + \frac{\mu_1}{k_1} (k_0 + k_1) \frac{du}{dt} - \mu_1 \frac{du_1}{dt}$$

式(23)、(26)を用いて上式を整理すると、

$$F + \frac{\mu_1}{k_1} \frac{dF}{dt} = k_0 u + \mu_1 \left(1 + \frac{k_0}{k_1}\right) \frac{du}{dt} \quad (29)$$

を得る。

$$\frac{\mu_1}{k_1} = \tau_\epsilon \quad (30)$$

$$\mu_1 \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1}\right) = \tau_\sigma \quad (31)$$

$$k_0 = E_R \quad (32)$$

と置くと、式(29)は

$$F + \tau_\epsilon \frac{dF}{dt} = E_R \left(u + \tau_\sigma \frac{du}{dt}\right) \quad (33)$$

となる。式(29)または式(33)がケルビン粘弾性体の構成方程式である。

#### 4.2 単調和動振へのケルビン粘弾性体の応答

式(33)を用いれば外力がかかったときのケルビン粘弾性体の変形の挙動を予測できる。ここでは、外力が振動する場合の変形の挙動を予測してみよう。振動外力に対する応答特性から生体組織の粘弾性の性質を定量的に測る手法は広く用いられている。

角周波数  $\omega$  で単調和振動する外力  $F$  がケルビン粘弾性体に印加されると変形量  $u$  も  $\omega$  で振動する。すなわち、

$$F = F_0 \sin \omega t, \quad u = U \sin \omega t \quad (34)$$

と書ける。ここで、振動現象を扱う場合に便利な複素数を用いることにする。オイラーの式

$$\exp[i\omega t] = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (35)$$

より、 $F$  と  $u$  は各々

$$F = F_0 \exp[i\omega t], \quad u = U \exp[i\omega t] \quad (36)$$

と書ける。

$$\frac{dF}{dt} = i\omega F, \quad \frac{du}{dt} = i\omega u \quad (37)$$

であるから、式(36)、(37)を式(33)に代入すると、

$$(1 + i\omega \tau_\epsilon)F = E_R(1 + i\omega \tau_\sigma)u \quad (38)$$

ここで、複素弾性率  $G(i\omega)$  を導入すると、

$$F = G(i\omega)u \quad (39)$$

と書けるので、式(38)より、

$$G(i\omega) = \frac{1 + i\omega \tau_\sigma}{1 + i\omega \tau_\epsilon} E_R \quad (40)$$

となる。 $G$  を実部  $\text{Re}$  と虚部  $\text{Im}$  に分けると、

$$\text{Re} = \frac{1 + \tau_\sigma \tau_\epsilon \omega^2}{1 + \tau_\epsilon^2 \omega^2} E_R \quad (41)$$

$$\text{Im} = \frac{(\tau_\sigma - \tau_\epsilon) \omega}{1 + \tau_\epsilon^2 \omega^2} E_R \quad (42)$$

となる。いま、

$$G(i\omega) = |G| \exp[i\delta] \quad (43)$$

と書いたとき、 $|G|$  を複素弾性率の振幅 (amplitude)、 $\delta$  を位相のずれ (phase shift) と呼ぶ。

$$|G| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \quad (44)$$

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \quad (45)$$

であるから、式(41)、(42)を式(44)、(45)に代入すると、

$$|G| = E_R \sqrt{\frac{1 + \tau_\sigma \omega^2}{1 + \tau_\epsilon \omega^2}} \quad (46)$$

$$\tan \delta = \frac{(\tau_\sigma - \tau_\epsilon) \omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\epsilon \omega^2} \quad (47)$$

を得る。

式(46)、(47)の $|G|$ と $\tan \delta$ を $\omega$ の関数としてグラフに描くと、図3のようになる。

式(46)より低周波振動 ( $\omega$ 小) の外力に対しては $|G| \rightarrow E_R (= k_0)$ となる。これは、図2でダッシュポットがゆるゆるになり、力を受け持たないので、バネ $k_0$ だけで外力を受け持つことを示し、図3の左端の $|G|$ の値と対応している。

一方、式(46)より高周波振動 ( $\omega$ 大) の外力に対しては $|G| \rightarrow E_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} (= k_0 + k_1)$ となる。これは、図2でダッシュポットが非常に硬くなって力を受け持つので、2本のバネ $k_0$ と $k_1$ で外力を受け持つことを示し、図3の右端の $|G|$ の値と対応している。 $\delta$ については中間の周波数 $\omega = 1/\sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon}$ で $\tan \delta$ が最大、すなわち内部摩擦が最大になることが分かる。

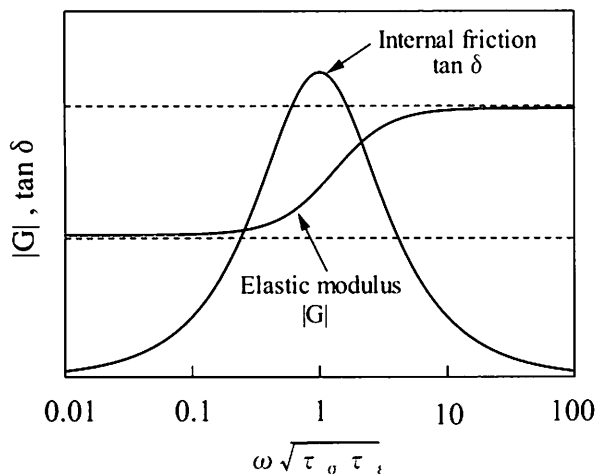


図3 単調和振動外力へのケルビン粘弾性体の応答曲線 (変形振動の振幅と内部摩擦)

## 5. おわりに

ヒトの身体という自然界で最も複雑なシステムを力学的観点から研究し、その機序を解明しようとするバイオメカニクス (Biomechanics) の中で、本解説は循環器系、呼吸器系等で生じている弾性体・流体相互作用を理解するための第一歩として弾性膜と粘弾性体の力学の初歩的知見を紹介し、解説した。

筆者の知る限り、このような医工の学際融合領域において日本語で分かりやすく書かれた本は現状では皆

無と言ってよい。したがって、本解説がこの新しい分野をこれから目指そうとする意欲に燃えた人たちににとっての入門書の役割を少しでも果たしてくれることが筆者の願いである。

## 参考文献

- (1) 大場謙吉：血流の数学モデル入門、工学と技術(関西大学工学会誌)、Vol.12 No.2(2000)、pp.41-45、
- (2) 大場謙吉・板東潔：「流体の力学－現象とモデル化－」、コロナ社 (2006)、p.6、p.19
- (3) Y.C. Fung：Biomechanics、Springer-Verlag (1981)、p.41