

## Cagniard-de Hoop の方法による線状波源の正確解

藤 井 和 成\*

### Exact Solution Obtained by Using of Cagniard-de Hoop's Technique to the Line Source on the Half-Space

Kazunari FUJII

#### 1. はじめに

弾性波に関する理論計算の中には、波源を設定して、それにより発生する波を計算することがしばしばある。そのために波源はフーリエ積分で表し、その被積分関数である単振動型の波源に対する境界条件、物理条件を満たす解を求め、逆フーリエ変換によって任意な形の波源についての波を積分の形で求める。このとき得られる積分が厄介なため正確な解を求めることが難しく、波源から十分距離が離れているといった条件を加味し、近似解を求めるのがやっとなのである。

de Hoop<sup>1),2)</sup> が Cagniard の方法を発展させた巧みな方法は、時間についてはラプラス変換を、位置については両側ラプラス変換（またはフーリエ変換）を実行し、その逆両側ラプラス変換にあたる積分を、積分路のうまい取り方によって、ラプラス変換に帰着してしまうというものである。したがって積分を実行しないで解が求められ、しかも正確解である。パルス型波源（時間に関してステップ関数やデルタ関数）を設定するので波面が直接求められ、P 波、S 波および PS 波（Head Wave）が分離されて出てくる。ここではその解析方法を自由表面上に線状波源がある場合について詳しく説明を行う。

#### 2. 線状波源に対する積分解

線状波源を自由表面上に設定するため、次のように座標軸を取る。半無限弾性体の内部に向かって  $z$  軸をとり、 $z = 0$  の平面を自由表面とする。その表面に  $xy$  軸をとり、 $y$  軸上に一様な圧力が加えられた 2 次元問

題として弾性体内に放射される波を解析的に求める。

波源は

$$\delta(x)H(t)$$

で与える。ここに、 $\delta(x)$  はデルタ関数と呼ばれるもので、 $x = 0$  以外では値をもたない特殊な関数で、式で表せば

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となる。また、実連続関数  $f(x)$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

という性質をもつ。一方、時間変化を表す  $H(t)$  はステップ関数で

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

である。したがって、波源としては、 $x = 0$  ( $y$  軸) の位置で時刻  $t = 0$  になった次の瞬間大きな力が作用し続けるというものである (図 1)。

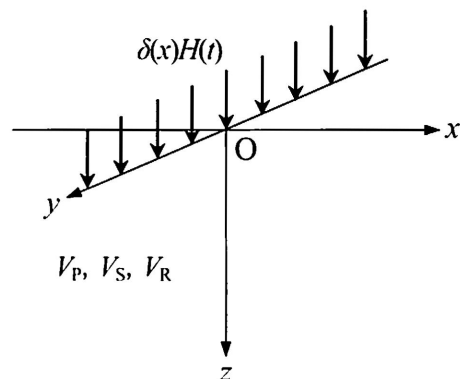


図 1 自由表面上の線状波源

原稿受付 平成22年9月15日

\*システム理工学部 物理・応用物理学 准教授

また、 $f(x)$  の片側、両側ラプラス変換をそれぞれ

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

$$f^*(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-s\zeta x} dx$$

とし、それらの逆変換をそれぞれ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(s)e^{sx} ds$$

$$f(x) = \frac{s}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(\zeta)e^{s\zeta x} d\zeta$$

としておく。ただし、 $s$  は一般に複素数であるが、ここでは  $s > 0$  とする。

波動方程式を  $t$  について片側ラプラス変換、 $x$  については両側ラプラス変換を行い、変換された波動方程式を解いて、 $z$  が無限遠で発散しないポテンシャルは

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^*(s, \zeta) &= A(s, \zeta)e^{-s\nu_p z} \\ \bar{\psi}^*(s, \zeta) &= B(s, \zeta)e^{-s\nu_s z} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $\text{Re} \nu_{p,s} > 0$  でなければならない。 $\text{Re}[\ ]$  は  $[\ ]$  の実数部分を取ることを意味する。ここに

$$\nu_p = \sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}, \quad \nu_s = \sqrt{\beta^2 - \zeta^2}$$

また、 $\alpha = 1/V_p$ ,  $\beta = 1/V_s$  であり、 $V_p$ ,  $V_s$  はそれぞれ P 波、S 波の速さを表す。

自由表面上での境界条件は、先ほどの波源を用いて

$$(P_{zz})_{z=0} = -\delta(x)H(t)$$

$$(P_{zx})_{z=0} = 0$$

である。負は圧力を意味する。これらについても両ラプラス変換を行う。応力とポテンシャルの関係<sup>3)</sup>

$$\bar{P}_{zz}^* = \lambda \nabla \bar{\varphi}^* + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^*}{\partial x \partial z} \right)$$

$$\bar{P}_{zx}^* = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}^*}{\partial z^2} \right)$$

を使って(1)式のポテンシャルを代入し、 $z = 0$  と置いて境界条件を整理すると

$$(\nu_s^2 - \zeta^2)A - 2\zeta\nu_s B = -\frac{1}{\mu s^3}$$

$$2\zeta\nu_p A + (\nu_s^2 - \zeta^2)B = 0$$

が得られる。 $\lambda$ ,  $\mu$  はラメの定数である。 $A, B$  について解いて、ポテンシャルに代入すると

$$\bar{\varphi}^*(s, \zeta) = \frac{1}{\mu} \frac{\zeta^2 - \nu_s^2}{s^3 F(\zeta)} e^{-s\nu_p z}$$

$$\bar{\psi}^*(s, \zeta) = \frac{1}{\mu} \frac{2\zeta\nu_p}{s^3 F(\zeta)} e^{-s\nu_s z}$$

が得られる。ここに  $F(\zeta)$  はレイリーの関数で

$$F(\zeta) = (\nu_s^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2\nu_p\nu_s \quad (2)$$

で与えられる。ポテンシャルと変位速度の関係

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} = s^2 \zeta \bar{\varphi}^* + s^2 \nu_s \bar{\psi}^*$$

$$\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial t} = -s^2 \nu_p \bar{\varphi}^* + s^2 \zeta \bar{\psi}^*$$

から変位速度を求めると(変位ではなく変位速度にしたのは、さらに  $t$  に関する積分を省くためである)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i \mu} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\zeta(\zeta^2 - \nu_s^2)e^{-s\nu_p z} + 2\zeta\nu_p\nu_s e^{-s\nu_s z}}{F(\zeta)} e^{s\zeta x} d\zeta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i \mu} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{(\nu_s^2 - \zeta^2)\nu_p e^{-s\nu_p z} + \zeta^2\nu_p e^{-s\nu_s z}}{F(\zeta)} e^{s\zeta x} d\zeta$$

が得られる。

### 3. 被積分関数の特異点

さて、上の積分を実行するために、たとえば積分

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} e^{-s(\nu_{p,s}z - \zeta x)} d\zeta \quad (4)$$

について考える。この被積分関数には特異点

- \* 極  $F(\zeta) = 0$  の解として  $\zeta = \pm \kappa$
- \* 分岐点  $\nu_{p,s} = 0$  から  $\zeta = \pm \alpha$ ,  $\pm \beta$
- \* 分岐線  $\text{Re} \nu_{p,s} = 0$

が存在する。ここに、 $\kappa = 1/V_R$  であり、 $V_R$  はレイリー波の速さである。 $\zeta$  の複素平面上的極と分岐点は図2のような位置関係にある。

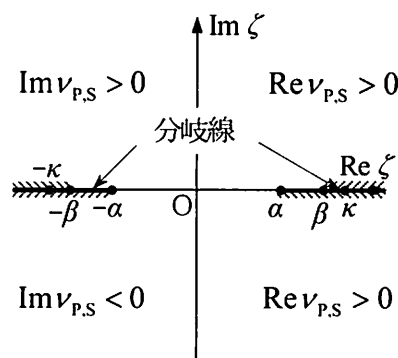


図2  $\zeta$  平面の特異点

分岐線はこの線上では  $v_{p,s}$  のルートの中が純虚数となる線である。たとえば

$$v_p = \sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}$$

について、 $\zeta = a + bi$  と置いて、 $v_p$  が純虚数になるためには

$$\begin{cases} \alpha^2 - a^2 + b^2 < 0 \\ ab = 0 \end{cases}$$

でなければならない。したがって

$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき } b^2 < -\alpha^2 \text{ となり不条理} \\ b = 0 \text{ のとき } a^2 > \beta^2 \end{cases}$$

であるから、分岐線は

$$\text{Im} \zeta = 0 \text{ で } \text{Re} \zeta > \alpha \text{ と } \text{Re} \zeta < -\alpha$$

となり、これは図2の実数軸上の斜線の部分に対応する線分にあたる。 $v_s$  についても同様に

$$\text{Im} \zeta = 0 \text{ で } \text{Re} \zeta > \beta \text{ と } \text{Re} \zeta < -\beta$$

である。

なぜ分岐線として  $\text{Re} v_{p,s} = 0$  を選ぶのかは無限遠で発散しないポテンシャル(1)式を選んだとき  $\text{Re} v_{p,s} > 0$  でなければならことに由来する。この分岐線の選び方によって、 $\zeta$  平面のすべての領域で  $\text{Re} v_{p,s} > 0$  を満たすようになる。たとえば分岐点  $-\alpha$  の周りを一周することを想定してみる。 $\alpha + \zeta = re^{i\theta}$  と置く

$$v_p = \sqrt{re^{i\delta}(\alpha - \zeta)} \cong e^{i\delta/2} \sqrt{2r\alpha}$$

と表すことができる。ここで、 $\delta = \delta + 2\pi$  とおくと、すなわち分岐点のまわりを一周すると

$$e^{i(\delta/2 + \pi)} \sqrt{2r\alpha} = -e^{i\delta/2} \sqrt{2r\alpha}$$

となり、符号が変わってしまう。 $v_p$  が常に一価関数であるためには、分岐点のまわりを回れないように分岐線に沿ってハサミを入れて切っておき、新たに積分路を設定する場合この分岐線を横切らないようにする。そうすることによって分岐点のまわりで  $-\pi < \delta < \pi$  と変化させても、常に  $\text{Re} v_{p,s} > 0$  となる。また、 $-\pi < \delta < \pi$  で  $\text{Im} v_{p,s} < 0$ 、 $0 < \delta < \pi$  で  $\text{Im} v_{p,s} > 0$  となることも分かる(図2)。Im は虚数部分である。

#### 4. Cagniard-de Hoop の方法

以上のような準備をしておいて、(4)式で与えられる積分をラプラス変換に帰着させるため

$$v_p z - \zeta x = t$$

と置き、 $t$  が正の実数値をとるように  $\zeta$  の新たな経路を見つける。 $\zeta$  について解けば

$$\zeta_{\pm} = -\frac{t}{r} \cos \theta \pm i \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{V_p^2}}$$

となる。ここに  $r^2 = x^2 + z^2$ 、 $x = r \cos \theta$ 、 $z = r \sin \theta$  である。この  $\zeta_{\pm}$  において、 $t = r/V_p$  のとき、 $\zeta_{\pm} = -\cos \theta / V_p$  であり、 $t \rightarrow \infty$  では  $\arg \zeta_{\pm} \rightarrow \mp \theta$  となるので、 $t \geq r/V_p$  に対して

$$t = \infty \rightarrow r/V_p \text{ のとき } \zeta_-$$

$$t = r/V_p \rightarrow \infty \text{ のとき } \zeta_+$$

に対応させる。また、 $\zeta_{\pm}$  の積分路は  $0 < \theta < \pi/2$  のとき図3の  $C_1$ 、 $\pi/2 < \theta < \pi$  のとき  $C_2$  となる。

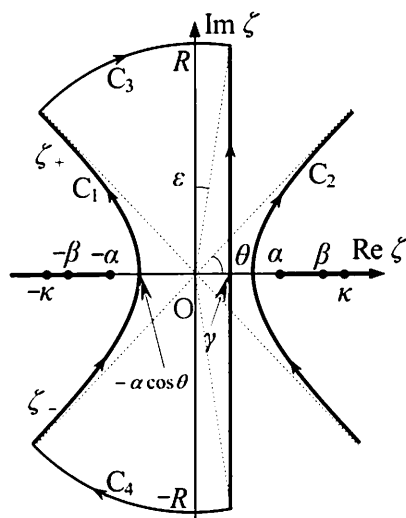


図3 新しい積分路

(i) 指数部に  $v_p$  が含まれる積分

実数軸の  $\gamma$  を通り、虚数軸に平行な元々の積分が新たな積分路を含む図3のような閉曲線にして、コーシーの積分定理を使えば、 $0 < \theta < \pi/2$  のとき

$$\int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} e^{-s(v_p z - \zeta x)} d\zeta = \int_{C_4} + \int_{C_1} + \int_{C_3}$$

と置き変えることができる。 $C_3$ 、 $C_4$  は半径  $R$  の円弧に沿っての積分である。それぞれ積分を実行し、 $R \rightarrow \infty$  とする。

\*  $C_1$  に沿っての積分

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} &= \int_x^{r/V_p} \frac{Q(\zeta_-)}{F(\zeta_-)} e^{-st} \frac{\partial \zeta_-}{\partial t} dt \\ &+ \int_{r/V_p}^x \frac{Q(\zeta_+)}{F(\zeta_+)} e^{-st} \frac{\partial \zeta_+}{\partial t} dt \\ &= 2i \int_{r/V_p}^{\infty} \text{Im} \left[ \frac{Q(\zeta_+)}{F(\zeta_+)} \frac{\partial \zeta_+}{\partial t} \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$= 2i \int_0^\infty H\left(t - \frac{r}{V_p}\right) \operatorname{Im} \left[ \frac{Q(\zeta_+) \partial \zeta_+}{F(\zeta_+) \partial t} \right] e^{-st} dt$$

$$= 2i H\left(t - \frac{r}{V_p}\right) \operatorname{Im} \left[ \frac{Q(\zeta_+) \partial \zeta_+}{F(\zeta_+) \partial t} \right]$$

ここに

$$\frac{\partial \zeta_+}{\partial t} = \frac{i v_p}{\sqrt{t^2 - r^2/V_p^2}}$$

である。

また、 $\pi/2 < \theta < \pi$  のときには  $C_2$  に沿っての積分に変わるが、結果は  $C_1$  と同じになる。

\*  $C_3$ 、 $C_4$  の円弧に沿っての積分

$\zeta = R e^{i\delta}$  と置いて、大きさだけを考慮すると

$$\left| \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} \right| < R, \quad \left| e^{-s(\nu_p z - \zeta)} \right| \leq e^{-s \operatorname{Re}(\nu_p z) + s R x \cos \delta}$$

と書け、 $d\zeta = i R e^{i\delta} d\delta$  であるから

$$\left| \int_{C_3} d\zeta \right| \leq \int_{C_3} |d\zeta|$$

$$\leq \int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi-\theta} R^2 e^{-s \operatorname{Re}(\nu_p z) + s R x \cos \delta} d\delta \rightarrow 0$$

となる。というのは、積分区間の  $\pi/2 < \delta < \pi$  では  $\cos \delta < 0$  であり、 $z$  は常に正である。また、 $C_1$  に関する積分では  $0 < \theta < \pi/2$  であり  $x > 0$  となるため、 $R \rightarrow \infty$  では  $\epsilon \rightarrow 0$  であり、上の積分は 0 に収束する。

同じようにして  $C_4$  に沿っての積分も  $\left| \int_{C_4} \right| \rightarrow 0$

となる。

(ii) 指数部に  $\nu_s$  が含まれる積分

$$\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} e^{-s(\nu_s z - \zeta x)} d\zeta \quad (5)$$

に関しても、同じようにして

$$\nu_s z - \zeta x = t$$

と置くと

$$\zeta_\pm = -\frac{t}{r} \cos \theta \pm i \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{V_s^2}}$$

となるため、 $t \geq r/V_s$  に対して

$$t = \infty \rightarrow r/V_s \text{ のとき } \zeta_-'$$

$$t = r/V_s \rightarrow \infty \text{ のとき } \zeta_+'$$

とすると、 $t = r/V_s$  で  $\zeta_- = -\beta \cos \theta$  となるので積分

路は図4のように分岐線とぶつかることになるので、この線を横切らないようにするため、分岐線に沿った積分が加わる。したがって、(5)式の積分は

(a)  $-\alpha \leq \beta \cos \theta$ 、すなわち  $\theta \geq \cos^{-1}\left(\frac{V_s}{V_p}\right)$  の場合

$$\int_{C_1'} = 2i H\left(t - \frac{r}{V_s}\right) \operatorname{Im} \left[ \frac{Q(\zeta_+') \partial \zeta_+'}{F(\zeta_+') \partial t} \right]$$

(b)  $-\alpha > -\beta \cos \theta$ 、すなわち  $\theta < \cos^{-1}\left(\frac{V_s}{V_p}\right)$  の場合

$$\int_{C_1'} + \int_{-\beta \cos \theta}^{\alpha} + \int_{-\alpha}^{-\beta \cos \theta}$$

にそれぞれ置き換わる。

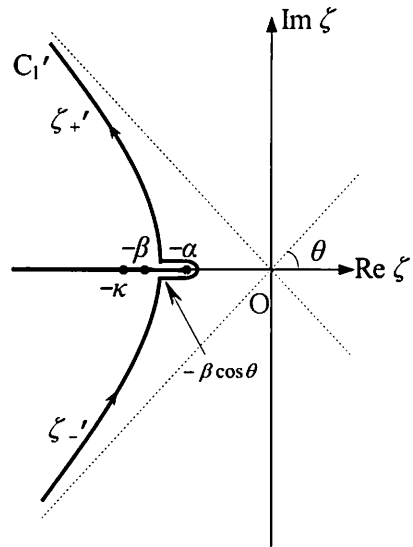


図4 分岐線に沿っての積分路が発生

分岐線に沿っての積分は、 $\nu_p$  が純虚数になり、

$$\nu_p = \pm i \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2} = \pm i \nu_p'$$

とする。図2に従って、分岐線の上側を通るときは+、下側では-となるので、これらを考慮して

$$\int_{-\alpha}^{-\beta \cos \theta} \left\{ \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} \right\}_{\nu_p = i \nu_p'} e^{-s(\nu_s z - \zeta x)} d\zeta$$

$$- \int_{-\alpha}^{-\beta \cos \theta} \left\{ \frac{Q(\zeta)}{F(\zeta)} \right\}_{\nu_p = -i \nu_p'} e^{-s(\nu_s z - \zeta x)} d\zeta$$

$$= -2i \int_{\alpha}^{\beta \cos \theta} \frac{Q'(-\zeta) \operatorname{Re}\{F'(\zeta)\}}{|F'(\zeta)|^2} e^{-s(\nu_s z + \zeta x)} d\zeta$$

と表される。ここに  $Q'(\zeta)$ 、 $F'(\zeta)$  は

$$iQ'(\zeta) = \{Q(\zeta)\}_{v_p=iv_s}$$

$$F'(\zeta) = (v_s^2 - \zeta^2)^2 + 4i\zeta^2 v_p' v_s$$

である。この積分もラプラス変換に帰するため

$$v_s z + \zeta x = t$$

と置くと、

$\zeta = \alpha \rightarrow \beta \cos \theta$  に対して  $t$  は

$$t = \frac{r}{V_p} \left( \sqrt{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 - 1} \sin \theta + \cos \theta \right) \equiv t_H \rightarrow \frac{r}{V_s}$$

と変わる。また  $\zeta$  について解くと

$$\zeta_{\pm}'' = \frac{t}{r} \cos \theta \pm \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{r^2}{V_s^2} - t^2}$$

となるが、 $t = t_H$  のとき  $\zeta = \alpha$  となるためには

$$\zeta_{-}'' = \frac{t}{r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{r^2}{V_s^2} - t^2} \equiv \zeta_0$$

でなければならない。 $t$  で微分すると

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = \frac{v_s}{\sqrt{r^2/V_s^2 - t^2}}$$

となる。(5)式の積分は

$$\begin{aligned} & -2i \int_{t_H}^{r/V_s} \frac{Q'(-\zeta_0) \operatorname{Re}\{F'(\zeta_0)\}}{|F'(\zeta_0)|^2} e^{-st} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} dt \\ &= -2i \cdot g(t) \frac{Q'(-\zeta_0) \operatorname{Re}\{F'(\zeta_0)\}}{|F'(\zeta_0)|^2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} \end{aligned}$$

と書ける。ここに  $g(t)$  は

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t_H < t < r/V_s \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で表される矩形の関数である。したがって、(a)と(b)を一体化すると

$$\begin{aligned} & 2iH\left(t - \frac{r}{V_s}\right) \operatorname{Im} \left[ \frac{Q(\zeta_+') \frac{\partial \zeta_+'}{\partial t}}{F(\zeta_+')} \right] \\ & - 2i \cdot g(t) h(\theta) \frac{Q'(-\zeta_0) \operatorname{Re}\{F'(\zeta_0)\}}{|F'(\zeta_0)|^2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。 $h(\theta)$  は

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \cos^{-1}(V_s/V_p) \\ 0 & \cos^{-1}(V_s/V_p) \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

である。

## 5. 積分結果

最終的に(3)式の変位速度は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{1}{\pi\mu} \left[ \frac{H(t-r/V_p)}{\sqrt{t^2-r^2/V_p}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta_+ (\zeta_+^2 - v_s^2) v_p}{F(\zeta_+)} \right\} \right. \\ & + \frac{2H(t-r/V_s)}{\sqrt{t^2-r^2/V_s}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta_+{}' v_p v_s^2}{F(\zeta_+{}')} \right\} \\ & \left. + \frac{2g(t)h(\theta)}{\sqrt{r^2/V_s-t^2}} \frac{\zeta_0 (v_s^2 - \zeta_0^2) v_p' v_s^2}{|F'(\zeta_0)|^2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{1}{\pi\mu} \left[ \frac{H(t-r/V_p)}{\sqrt{t^2-r^2/V_p}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(v_s^2 - \zeta_+^2) v_p^2}{F(\zeta_+)} \right\} \right. \\ & + \frac{2H(t-r/V_s)}{\sqrt{t^2-r^2/V_s}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta_+{}'{}^2 v_p v_s}{F(\zeta_+{}')} \right\} \\ & \left. - \frac{2g(t)h(\theta)}{\sqrt{r^2/V_s-t^2}} \frac{\zeta_0^2 (v_s^2 - \zeta_0^2) v_p' v_s}{|F'(\zeta_0)|^2} \right] \end{aligned}$$

それぞれ、第1項目がP波、第2項目がS波、最後の項がPS波となる。

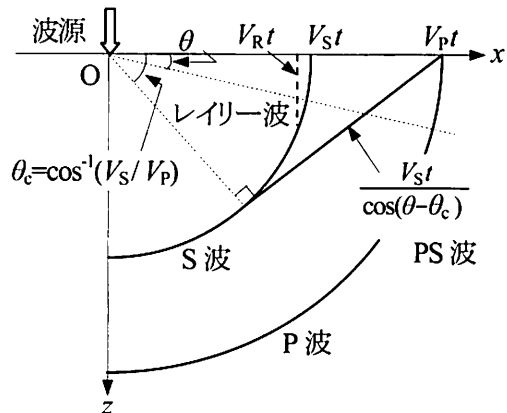


図5 理論的に分離された各波面

PS波は分岐線に沿った積分で表され、時間的に場所的に限られた範囲の波である。別の立場で説明すれば、 $x$ 軸方向に伝わるP波がこの波だけでは境界条件を満たさないため、常にS波を $x$ 軸に対して $\cos^{-1}(V_s/V_p)$ の方向に放射している波である。したがって波面は平面になる。図5がそれぞれの波の波面である。

## 6. 変位速度の波形

(6)式の  $t$  を  $V_p t/r$  で無次元化して、ポアソン比を0.25としたときの波形を計算すると図6のようになる。

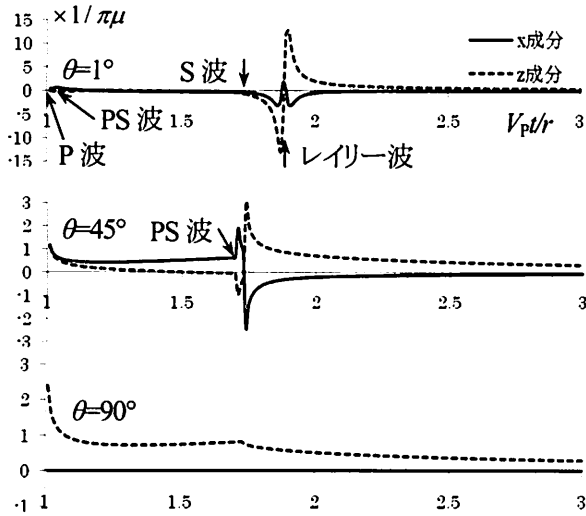


図6  $\theta = 1^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  方向の変位速度の波形

自由表面近くでは、P、S波以外にレイリー波が大きく現れる。レイリー波の速さはレイリーの関数(1)式を解いて得られる。たとえばポアソン比が0.25の場合  $V_R = 0.9194 V_S$  となる。 $\theta = 45^\circ$  の方向では放射方向にP波が動き、その後それと直交するようにPS波とやや遅れて逆方向にP波より大きくS波が動く。90°ではP波のみで、S波はみられない。

## 7. 波源の指向性

得られた変位速度(6)式において、立ち上がり直後の振れの大きさが方向によってどのように変わるかを調べた。(6)式のP波、S波それぞれについて、 $(t-1/V_{PS}) \ll 1$  として式を書き換えるとP波については

$$\frac{\partial u}{\partial t} \propto \frac{\cos \theta \sin \theta (\eta - 2 \cos^2 \theta)}{(\eta - 2 \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{\eta - \cos^2 \theta}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \propto \frac{\sin^2 \theta (\eta - 2 \cos^2 \theta)}{(\eta - 2 \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{\eta - \cos^2 \theta}}$$

S波については

$$\frac{\partial u}{\partial t} \propto \text{Re} \left[ \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{1/\eta - \cos^2 \theta}}{\cos^2 2\theta + 4 \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{1/\eta - \cos^2 \theta}} \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \propto \text{Re} \left[ \frac{2 \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{1/\eta - \cos^2 \theta}}{\cos^2 2\theta + 4 \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{1/\eta - \cos^2 \theta}} \right]$$

が得られる。共に共通する定数や距離による減衰項は除かれている。ここに、 $\eta = (V_p/V_S)^2$  である。 $\theta$  による振れの大きさの依存性は図7のようになる。ポアソン比は0.25の場合である。P波は力の加わった方向に一番大きく揺れ、その直角方向にはほとんど揺れない単純な指向パターンになる。一方S波はほぼ45°方向に最大の揺れをもつ二葉のパターンになる。 $\theta_c = \cos(V_p/V_S)$  で0になるのは、PS波と重なるため、図6の  $\theta = 45^\circ$  の波形からも分かるようにPS波とS波は逆位相になっている。

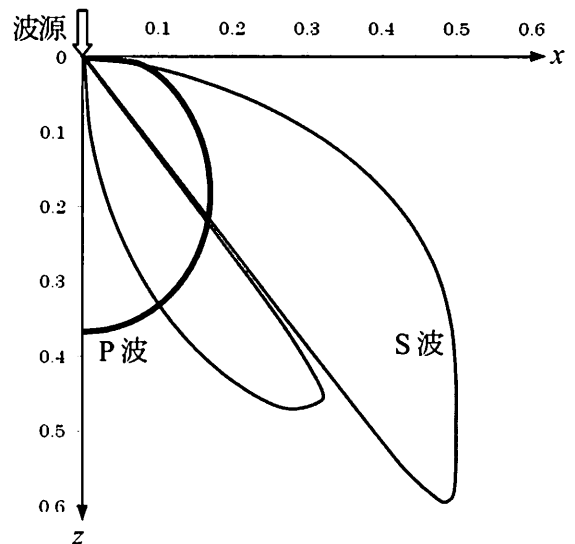


図7 線状波源のP波とS波の指向性

## 8. おわりに

Cagniard-de Hoop の方法、逆両側ラプラス変換をラプラス変換に帰着させ、積分を実行せずに正確解を求める方法を、線状波源から放出される弾性波についての計算に応用し、その過程を詳細に解説した。複素積分、特に無理関数の取り扱いに細かな注意が必要であるが、積分経路をうまくとることによって正確解が簡単に求まってくるので、いろいろな考察の対象に応用できるものと思われる。

### 参考文献

- 1) de Hoop, A.T., A Modification of Cagniard's Method for Solving Seismic Pulse Problems, Appl. Sci. Res., vol.B8, 349, (1960).
- 2) 斎藤正徳、地震波動論、東京大学出版会、(2009).
- 3) Ewing, W.M., W.S. Jardzky and F. Press, Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, (1957).