関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
Vol.15 (2008)

トピックス

組合せ論的可換代数への層や導来圏の応用

柳 川 浩 二*

Application of sheaves and derived categories to combinatorial commutative algebra

Kohji YANAGAWA

1. 序

本誌の読者の多くは工学系の方と思うが、筆者は数学の研究者なので、馴染みの無い・取っ付き難い話をさせて頂くこととなる。せめて、この「序」だけは、読み物風に書きたいと思うので、ここだけでも目を通して頂ければ幸いである。

さて、純粋数学は、大きく代数学、幾何学、解析学に分かれる。このうち、筆者の専門は代数である。一言に代数学と言っても巨大な学問で（従って、筆者が理解しているのはその極々一部)、歴史的には「n 次方程式を解く」「整数の問題を考える」という素朴な所から出発したものと思われるが、現代では極めて高度に発展し、整数論・代数幾何学・表現論等と言った諸分野に分かれている。これらが相互に深く関連するのは勿論、解析学や幾何学、あるいは数理物理学とも時に決定的に関わる。

筆者の専門は、代数学の中でも**可換環論**（**可換代数**とも呼ばれる）で、特に、**組合せ論的可換代数**が興味の中心である。現代数学で言う「組合せ論」は、方向性として、高校で学ぶ「場合の数・確率」のずっと先にあるもので、深い結果も含む。(なお、現代の「確率論」は、無限個の事象を相手にする為、積分を大いに用い、解析学の一分野。）筆者は、ここ7・8年間は、組合せ論的可換代数を層や導来圏の理論を応用して研究している。層も導来圏も、1950・60年代に登場した、現代数学の著名な道具であるが、この分野に応用したのは、ほぼ筆者のオリジナルである。

本稿では、筆者の近年の研究成果の一部について概説し、それに絡めて、関連分野の基礎や最近の話題についても紹介する。とは言え、現代の代数学は、その記述法からして極度に専門的で（一般人が読むと、数学の論文だとさえ気付かないかも知れない)、筆者の能力では、非専門家向けに説明することは不可能である。次節以降は同業者向けと割り切って書かせて頂く。そこで、せめて、当該分野の入門書・教科書を紹介しておきたい。なお、次節以降で引用する文献（論文も多い）に関しては、本稿の末尾に文献表を作ったので、そこにも載せた本に関しては、その参照番号を使う。

［4］日比孝之「可換代数と組合せ論 」シュプリンガー・ジャパン

組合せ論的可換代数を扱った書籍の中では、洋書を含めても、最も取っ付き易いものの一つ。抽象的な理論が、具体的で素朴な問題に応用される様子が、分かり易く書かれており、この分野の面白さを十分に味わえる。ただし、大学院レベルの知識は仮定されていないので、大きな定理の証明は省略されている。この分野の深さを知るには、以下に挙げるような、より専門的な本に当たる必要がある。

［9］R. Stanley, “Combinatorics and commutative algebra, 2nd ed.” Birkhäuser.

著者はMITの教授で、組合せ論の大家。組合せ論的可換代数という分野の創設者の一人と言ってよい。「魔方陣」（正方形に n^2 個の升目が並んでいて、各升目に入った数字を、縦・横・斜どの方向に足しても同

原稿受付　平成20年9月18日
*システム理工学部 数学科 准教授

じ値になるもの）等、親しみ易い題材を取り入れながらも、内容は本格的。

［6］E. Miller and B. Sturmfels, "Combinatorial Commutative Algebra", Springer.

気鋭の著者による新しい本で、Springer 社の "Graduate Texts in Mathematics" シリーズの中の一冊。後半では、かなり高度な内容を扱う。

組合せ論的可換代数と隣接する分野に、**計算可換代数**がある。これは、文字通り計算機数学の一部とも言え、その意味では応用数学にも属する。何と言っても**グレブナー基底**がキーワードで、これに関する理論と言っても過言ではない。

グレブナー基底とは、多項式の代数的操作を計算機で行う為の手法であり、数学者向けに少し厳密に言うと、多項式環のイデアルの生成系のうち一定の条件を満たすもののことである。これに類するアイデアは、古くから幾つかの論文に散発的に現れていたようだが(例えば、広中の特異点解消の論文)、B. Buchberger が、構成アルゴリズムを発見したことにより、それ自体が重要な研究対象となった。

グレブナー基底は、整数計画法や統計学等、幅広い分野に応用が見つかっており、解説書も少なからず出版されているが、その内から二冊紹介させて頂く。

●D. Cox, D. O'Shea, J. Little 著、落合啓之 他訳「グレブナ基底と代数多様体入門 イデアル・多様体・アルゴリズム」(上・下2巻) シュプリンガー・ジャパン、2000年。

数学科学部生向けに書かれたグレブナー基底の教科書として定評のある本。現代数学の中で最も有力な分野の一つである代数幾何学の入門書を兼ねている。

●G-M. Greuel and G. Pfister, "A Singular Introduction to Commutative Algebra (2nd ed.)", Springer, 2007.

代数幾何学の研究用の計算機システムとして充実した内容を誇る *Singular* の開発陣が書いた本。付録で CD-ROM も付いており、計算機に詳しい方で、これから代数学を勉強してみようという人には、良いのではないか。

2．準備（Stanley-Reisner 環、BGG 対応）

本節からは、(専門や興味が代数学寄りの）数学者・数学科の大学院生を読者に想定して書く。層・導来圏の教科書として、［2］を挙げておく。

n を自然数とし、$[n]:=\{1, 2, \dots, n\}$ を n 個の元からなる集合とする。$[n]$ の部分集合全体の集合を $[n]$ の**冪集合**と言い、$2^{[n]}$ と記すのであった（$[n]$ 自身と空集合 $\emptyset$ を含めると、$[n]$ の部分集合は全部で 2^n 個あることに注意)。$2^{[n]}$ の部分集合 Δ（つまり、Δ は $[n]$ の部分集合の幾つかを元とする集合）が**単体的複体**であるとは、条件 "$G\subset F\in\Delta\Rightarrow G\in\Delta$" を満たすことである。単体的複体は、「図形」の単体分割を念頭に置いた概念であり、対応する位相空間が存在する。これは Δ の**幾何学的実現**と呼ばれ、$|\Delta|$ と記される。

k を体とし、$S:=k[x_1, \dots, x_n]$ を多項式環とする。単体的複体 $\Delta\subset 2^{[n]}$ に対し、S の単項式イデアル

$$I_\Delta=(\prod_{i\in F} x_i \mid F\subset[n], F\notin\Delta)$$

による剰余環 S/I_Δ を、(k 係数の）Δ の **Stanley-Reisner 環**と言い、$k[\Delta]$ と記す。可換環としてはいたって素朴であるが、単体的複体の組合せ論的考察に大変有効で、組合せ論的可換代数の主要な研究対象の一つである（［4, 6, 9］参照)。

多項式環 $S=k[x_1, \dots, x_n]$ を、各 x_i の次数を 1 として、次数付環とみなす。有限生成次数付 S- 加群のなす圏を $\mathrm{gr}S$ と記す。$E=\bigwedge\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ を、n 次元 k ベクトル空間 $\langle y_1, \dots, y_n\rangle$ の外積代数とする。E も、各 y_i の次数を 1 として、次数付環とみなせるが、有限生成次数付 E- 加群のなす圏を $\mathrm{gr}E$ と記す（E は非可換環であるが、次数付加群については左右の区別がない)。$\mathrm{gr}S$ と $\mathrm{gr}E$ は、ともにアーベル圏だが、その性質は対照的である。$\mathrm{gr}S$ は、射影的対象を十分に持つが入射的対象は持たない。また、全ての対象は射影次元 n 以下である。一方、$\mathrm{gr}E$ においては、射影的対象も入射的対象も十分に存在し、各対象の射影次元は 0 でなければ無限大である。しかし、有界導来圏を考えると次が成立する。

定理 1 (Bernstein-Gel'fand-Gel'fand). 関手 $\mathcal{G}:D^b(\mathrm{gr}S)\to D^b(\mathrm{gr}E)$ と $\mathcal{F}:D^b(\mathrm{gr}E)\to D^b(\mathrm{gr}S)$ が存在し、三角圏としての圏同値 $D^b(\mathrm{gr}S)\cong D^b(\mathrm{gr}E)$ を与える。

上記の圏同値は、発見者の頭文字をとって **BGG 対応**と呼ばれる。3人とも旧ソビエトの著名な数学者で、原論文は1978年に出版されている。

3．squarefree 加群とその導来圏

$\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して、S の単項式 $\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ を $x^{\mathbf{a}}$ と記す。$S_{\mathbf{a}}=kx^{\mathbf{a}}$ とおくと、$S=\bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} S_{\mathbf{a}}$ であり、$S_{\mathbf{a}}\cdot S_{\mathbf{b}}=S_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ なので、S は $\mathbb{N}^n$- 次数付環となる。

S- 加群 M が、$\mathbb{Z}^n$- 次数付とは、k ベクトル空間として $M=\bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n}M_{\mathbf{a}}$ と分解でき、任意の $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n$ と $\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n$ に対し、$S_{\mathbf{b}}\cdot M_{\mathbf{a}}\subset M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ を満たすことである。$M_{\mathbf{a}}$ を、M の **a- 次斉次成分**と言う。$^*\mathrm{gr}S$ を有限生成 $\mathbb{Z}^n$- 次数付 S- 加群の圏とする。単項式で生成された S のイデアル I や、それによる剰余環 S/I（特に、Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$）は、$^*\mathrm{gr}S$ の対象である。外積代数 $E=\bigwedge\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ も同様に $\mathbb{N}^n$- 次数付環とみなし、$^*\mathrm{gr}E$ を同様の圏とする。

命題 2．BGG 対応は $\mathbb{Z}^n$- 次数付加群の文脈でも成立する。つまり、関手 $^*\mathcal{G}:D^b(^*\mathrm{gr}S)\to D^b(^*\mathrm{gr}E)$ と $^*\mathcal{F}:D^b(^*\mathrm{gr}E)\to D^b(^*\mathrm{gr}S)$ が存在し（構成は、もとの BGG 対応と同様）、三角圏としての圏同値 $D^b(^*\mathrm{gr}S)\cong D^b(^*\mathrm{gr}E)$ を与える。

$\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$ の成分 a_i が全て 0 か 1 のとき、$\mathbf{a}$ と $\{i\mid a_i=1\}\subset[n]:=\{1,\dots,n\}$ を同一視する。この記号法の下、$F\subset[n]$ に対して、生成元が F 次である階数 1 の S 自由加群を、$S(-F)$ であらわす。以下の概念は、筆者が導入した。

定義 3（[10]）．$M\in{}^*\mathrm{gr}S$ が squarefree とは、以下の表示を持つことである。

$$\bigoplus_{F\subset[n]}S(-F)^{m_F}\to\bigoplus_{F\subset[n]}S(-F)^{n_F}\to M\to 0$$
$$(\exists m_F,\ \exists n_F\in\mathbb{N})$$

Stanley-Reisner 環自身や、その理論に自然にあらわれる加群の多くは、squarefree であり、Stanley-Reisner 環の理論に非常に有効である。squarefree 加群からなる $^*\mathrm{gr}S$ の充満部分圏を $\mathrm{Sq}S$ と記す。$\mathrm{Sq}S$ は射影的対象と入射的対象を十分に持つアーベル圏である。また、$D^b(\mathrm{Sq}S)$ は $D^b(^*\mathrm{gr}S)$ の充満部分圏とみなせる。

組合せ論的可換代数では、E の単項式イデアルも、しばしば考える。単体的複体 $\Delta\subset 2^{[n]}$ に対して、E の単項式イデアル

$$J_\Delta=(\prod_{i\in F}y_i\mid F\subset[n],\ F\notin\Delta)$$

による剰余環 E/J_Δ を、$k\langle\Delta\rangle$ と記す。要は、Stanley-Reisner 環の「外積代数版」である。筆者の [10] が出た後、Römer は、E 上の squarefree 加群を定義した。

定義 4（Römer [8]）．$N\in{}^*\mathrm{gr}E$ が squarefree であるとは、$N=\bigoplus_{F\subset[n]}N_F$ を満たすことである。（ここで、上記の記号法で、F を $\mathbb{N}^n$ の0-1ベクトルと見ており、N_F は N の対応する斉次成分。）

$k\langle\Delta\rangle$ 等が squarefree E- 加群の例である。E 上の squarefree 加群のなす圏を $\mathrm{Sq}E$ と記す。$M\in\mathrm{Sq}S$ の「本質的な情報」は、$\bigoplus_{F\subset[n]}M_F$ の部分に集中しているので、関手 $\mathcal{S}:\mathrm{Sq}E\to\mathrm{Sq}S$ と $\mathcal{E}:\mathrm{Sq}S\to\mathrm{Sq}E$ で、圏同値 $\mathrm{Sq}S\cong\mathrm{Sq}E$ を与えるものが、容易に構成できる。例えば、$\mathcal{S}(K\langle\Delta\rangle)=k[\Delta]$ である。また、$\mathrm{Sq}S$ の場合と同様、$D^b(\mathrm{Sq}E)$ は $D^b(^*\mathrm{gr}E)$ の充満部分圏とみなせる。

$\Delta\subset 2^{[n]}$ を単体的複体とする。

$$\Delta^\vee:=\{F\mid F\subset[n],\ [n]-F\notin\Delta\}$$

とおくと、これは再び単体的複体となり、$(\Delta^\vee)^\vee=\Delta$ を満たす。$\Delta^\vee$ は、Δ の Alexander 双対と呼ばれ、組合せ論的可換代数の有効な手法である（[6] 参照)。

一方、$\mathrm{Hom}_E(-,E)$ は、$^*\mathrm{gr}E$ から自身への完全な反変関手を与える。また、squarefree 加群を squarefree 加群に写すので、$\mathrm{Sq}E$ から自身への反変関手ともみなせる。従って、$\mathcal{S}\circ\mathrm{Hom}_E(-,E)\circ\mathcal{E}$ は、$\mathrm{Sq}S$ から自身への完全な反変関手となる。これを、Alexander 双対性関手と呼び、$\mathbf{A}$ と記す。この名前が示すように、$\mathbf{A}(k[\Delta])=I_{\Delta^\vee}$ である。また、$\mathbf{A}\circ\mathbf{A}=\mathrm{Id}$ なので、$\mathbf{A}(I_\Delta)=k[\Delta^\vee]$ である。関手 $\mathbf{A}$ は完全なので、$D^b(\mathrm{Sq}S)$ から自身への反変関手に自然に拡張される。

$^*\mathrm{gr}S$ 内の余鎖複体 $\omega_S^\bullet:\cdots\to 0\to S(-[n])\to 0\to\cdots$（ただし、$\omega_S^{-n}=S(-[n])$）を考える。$\omega_S^\bullet$ は、S の $\mathbb{Z}^n$- 次数付な正規化された双対化複体（と導来圏で同型）で、$\mathbf{D}(-):=\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_S(-,\omega_S^\bullet)$ は $D^b(^*\mathrm{gr}S)$ から自身への反変関手で $\mathbf{D}\circ\mathbf{D}=\mathrm{Id}$ を満たす。$M^\bullet\in D^b(\mathrm{Sq}S)$ ならば $\mathbf{D}(M^\bullet)\in D^b(\mathrm{Sq}S)$ なので、$\mathbf{D}$ は $D^b(\mathrm{Sq}S)$ から自身への反変関手で（$\mathbf{D}\circ\mathbf{D}=\mathrm{Id}$ を満たすもの）とみなせる。以下、余鎖複体 $M^\bullet$ と整数 j に対して、$M^\bullet[j]$ は $M^\bullet$ の j 回分の「次数ずらし (translation)」を表す。つまり、整数 i に対し、$(M^\bullet[j])^i=M^{i+j}$ とする。$M^\bullet$ を $M^\bullet[j]$ に写す関手を $\mathbf{T}^j$ と記す。

定理 5（[12]）．$D^b(\mathrm{Sq}S)$ から自身への関手として、以下が成立。

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\cong\mathbf{T}^{-2n}.$$

例 6．F を d 個の元からなる $[n]$ の部分集合とし、F^c をその補集合 $[n]-F$ とする。また、$k[F]:=S/(x_i|i\notin F)\cong k[x_i|i\in F]$ とおき、ω_F を $k[F]$ の標準加群とする。具体的には、ω_F は（次数を忘れた単なる）S-加群としては $k[F]$ と同型で、その生成元を F 次としたものである。このとき、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\,(S(-F))\\
&=\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\,(S(-F^c)[[n]])\\
&=\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\,(k[F][-n])\\
&=\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A}\,(\omega_F[n+d])\\
&=\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\,(\omega_{F^c}[-n-d])\\
&=\mathbf{A}\,(k[F^c][2n])\\
&=S(-F)[-2n].
\end{aligned}$$

定理 7（[12]）．命題 2 の記号で、$M^\bullet\in D^b(\mathrm{Sq}S)\Rightarrow {}^*\mathcal{G}(M^\bullet)\in D^b(\mathrm{Sq}E)$、かつ、$N^\bullet\in D^b(\mathrm{Sq}E)\Rightarrow {}^*\mathcal{F}\,(N^\bullet)\in D^b(\mathrm{Sq}S)$ であり、${}^*\mathcal{G}$ と ${}^*\mathcal{F}$ の制限は、$D^b(\mathrm{Sq}S)\cong D^b(\mathrm{Sq}E)$ を与える。この状況で、次の自然同型が存在。

$$(3.1)\quad {}^*\mathcal{G}\cong\mathcal{E}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{A},\quad {}^*\mathcal{F}\cong\mathbf{A}\circ\mathbf{D}\circ\mathcal{S}.$$

BGG 対応は導来圏の圏同値を与える定理なので、${}^*\mathcal{F}$ と ${}^*\mathcal{G}$ の定義には、加群の次数やホモロジー次数の「ずらし」の自由度が有る。上の定理は、「(3.1) の同型が成り立つように ${}^*\mathcal{F}$ と ${}^*\mathcal{G}$ 次数を設定できる」と言う意味。

［3，7］では、定理 5 と定理 7 を具体的な問題に応用している。

4．半順序集合の接合環と SQUAREFREE 加群

冪集合 $2^{[n]}$ を包含関係で半順序集合と見て、その k 上の接合環（incidence algebra）を Λ とする。つまり、Λ は、$\{e_{F,G}\,|\,[n]\supset F\supset G\}$ を基底とする k ベクトル空間で、積を $e_{F,G}\cdot e_{F',G'}=\delta_{G,F'}\cdot e_{F,G'}$（ここで $\delta_{G,F'}$ はクロネッカーのデルタ）で定めて k-代数としたものである。$e_{F,F}$ を e_F と置くと、$e_F\cdot e_G=\delta_{F,G}\cdot e_F$ かつ $1=\sum_{F\subset[n]}e_F$ である。有限生成左 Λ-加群のなす圏を $\mathrm{mod}\Lambda$ と記す。$M\in\mathrm{mod}\Lambda$ は、k ベクトル空間として $M=\bigoplus_{F\subset[n]}e_FM$ となるが、圏同値 $\mathrm{mod}\Lambda\cong\mathrm{Sq}S$ を与える関手 $\Phi:\mathrm{mod}\Lambda\to\mathrm{Sq}S$ で、各 F について $\Phi(M)_F=e_FM$ となるものが存在する。

$\mathrm{Hom}_k(\Lambda,k)$ は自然に両側 Λ-加群となるが、これを $D(\Lambda)$ と記す。（記号が紛らわしいが、$D(\Lambda)$ は、むしろ Alexander 双対性 $\mathbf{A}$ と直接関係する。）さて、上で述べた圏同値 $\mathrm{mod}\Lambda\cong\mathrm{Sq}S$ の下、

$$\mathbf{T}^{-n}\circ(D(\Lambda)\otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda}-):D^b(\mathrm{mod}\Lambda)\to D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$$

が、$\mathbf{A}\circ\mathbf{D}:D^b(\mathrm{Sq}S)\to D^b(\mathrm{Sq}S)$ に対応する。ここで、$\mathbf{T}^{-n}$ は余鎖複体の次数の $-n$ 個ずらしをあらわす。定理 5 は、$D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$ から自身への関手として、

$$(4.1)\quad (D(\Lambda)\otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda}-)^3\cong\mathbf{T}^n$$

であると主張している。［12］では、あくまで $D^b(\mathrm{Sq}S)$ 内で定理 5 を証明しているが、実は以下に述べるように、対応する等式（4.1）を直接示すのも難しくない。

さて、本節のここからの内容は、最近のプレプリント［1］の筆者流の解釈であり、また、筆者自身の現在進行中の研究のアイデアの紹介である。

$D(\Lambda)\otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda}-$ は Λ の **Serre 関手**でもあるので、等式（4.1）は、$D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$ が**分数的 Calabi-Yau 圏**（今の場合、$\frac{n}{3}$ Calabi-Yau 圏、以下“$\frac{n}{3}$ C-Y”等と略記）と主張している。実は、m 個の元からなる全順序集合の接合環を Λ_m と記すと、Λ_m の（有限生成左加群の）導来圏は、$\frac{m-1}{m+1}$ C-Y 圏であることが知られている。また一般に、有限次元 k-代数 A,B の導来圏が、それぞれ r C-Y, r' C-Y（r,r' は有理数）ならば、$A\otimes_kB$ の導来圏は $(r+r')$C-Y となることが容易に確認できる。$2^{[n]}$ の接合環 Λ は、Λ_2 を n 個テンソルしたものである。Λ_2 が $\frac{1}{3}(=\frac{2-1}{2+1})$C-Y であったから、$\Lambda$ は $n\times\frac{1}{3}$ C-Y になり、(4.1) が得られる寸法である。

Miller は、squarefree 加群を一般化して、次の概念を定義した。以下、$\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^n$ に対し、「$\mathbf{b}\geq\mathbf{c}\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $i\in[n]$ について $b_i\geq c_i$」で $\mathbb{Z}^n$ に（半）順序を入れる。また、$S(-\mathbf{b})$ は、$\mathbb{Z}^n$-次数付の階数 1 の自由 S-加群で生成元の次数が $\mathbf{b}$ のものをあらわす。$\mathbf{0}:=(0,0,\dots,0)\in\mathbb{N}^n$ と置く。

定義 8（Miller［5］）．$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$ とする。$M\in{}^*\mathrm{gr}S$ が、**(positively) a-determined** とは、以下の表示を持つことである。

$$\bigoplus_{\mathbf{a}\geq\mathbf{b}\geq\mathbf{0}}S(-\mathbf{b})^{m_{\mathbf{b}}}\to\bigoplus_{\mathbf{a}\geq\mathbf{c}\geq\mathbf{0}}S(-\mathbf{c})^{n_{\mathbf{c}}}\to M\to 0.$$

$\mathbf{a}=(1,1,\dots,1)$ のとき、$\mathbf{a}$-determined であることと squarefree であることは同値である。$\mathbf{a}$-determined なもののなす ${}^*\mathrm{gr}S$ の充満部分圏を、${}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S$ と記す。${}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S$ も、$\mathrm{Sq}S$ 同様、射影的対象と入射的対象を十分に持つアーベル圏で、導来圏 $D^b({}^*\mathrm{ge}_{\mathbf{a}}S)$ は、局所双対性 $\mathbf{D}$, Alexander 双対性 $\mathbf{A}$ の二つを持つ（ただし、$\mathbf{D}$ については、通常とは加群の次数をずらし、$\mathbf{D}(-)=\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_S(-,S(-\mathbf{a})[n])$

で定める)。

上と同様、m 個の元からなる全順序集合の接合環を Λ_m と記す。

$$\Lambda_{\mathbf{a}}:=\Lambda_{a_1+1}\otimes_k\Lambda_{a_2+1}\otimes_k\cdots\otimes_k\Lambda_{a_n+1}$$

とおくと、$\mathrm{mod}\,\Lambda_{\mathbf{a}}\cong{}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S$ となる。さらに、この圏同値の下、$\mathbf{A}\circ\mathbf{D}:D^b({}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S)\to D^b({}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S)$ は、$\mathbf{T}^{-n}\circ(D(\Lambda_{\mathbf{a}})\otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda_{\mathbf{a}}}-):D^b(\mathrm{mod}\Lambda_{\mathbf{a}})\to D^b(\mathrm{mod}\Lambda_{\mathbf{a}})$ に対応する筈である。また、上で述べたことから、$D^b(\mathrm{mod}\Lambda_{\mathbf{a}})$ は $\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{a_i+2}$ C-Y である。よって、

予想 9. $a_1+2,\dots,a_n+2$ の最小公倍数を $a+2$ と置いたとき、$D^b({}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S)$ から自身への関手 $(\mathbf{A}\circ\mathbf{D})^{a+2}$ は恒等関手と(次数のずれを除いて)自然同型であろう。

$a_1=a_2=\dots=a_n$ の場合は、既に[1]によって証明されている。定理5は、これの $a=1$ の場合にあたる。

定理10 (Brun-Fløystad [1]). $\mathbf{a}=(a,a,\dots,a)$ のとき、$D^b({}^*\mathrm{gr}_{\mathbf{a}}S)$ から自身への関手として、$(\mathbf{A}\circ\mathbf{D})^{a+2}\cong\mathbf{T}^{-2n}$.

5. squarefree 加群に付随する層

B を(冪集合 $2^{[n]}$ の幾何学的実現としての)$n-1$ 単体とする。言うまでもなく、B は$n-1$次元の球と同相であり、$B=\bigcup_{F\subset[n]}|F|$ と分割される。ここで、F が d 個の元を持つとき、$|F|$ は d 単体の「内部」とした(つまり、$|F|$ は $d-1$ 次元の開球と同相で、$F\neq G$ ならば $|F|\cap|G|=\emptyset$ となる)。$M\in\mathrm{Sq}S$ に対し、B 上の層 M^+ を以下のように定める。まず、

$$\mathrm{Sp\acute{e}}(M):=\coprod_{F\subset[n]}|F|\times M_F$$

とおき、$\pi:\mathrm{Sp\acute{e}}(M)\to B$ を射影、つまり、$(p,m)\in|F|\times M_F\subset\mathrm{Sp\acute{e}}(M)$ を $p\in|F|\subset B$ に写す写像とする。開集合 $U\subset B$ とし、写像 $s:U\to\mathrm{Sp\acute{e}}(M)$ に関する次の二条件を考える。

(*) $\pi\circ s=\mathrm{Id}_U$. さらに、任意の $p,q\in U$ で $p\in|F|,q\in|G|,F\subset G$ なるものに対し、$s_q=x^{G-F}\cdot s_p$ を満たす。ここで、$s_p\in M_F$ と $s_q\in M_G$ は、$s(p)=(p,s_p)$, $s(q)=(q,s_q)$ を満たすものとした。

(**) 開被覆 $U=\bigcup_{i\in I}U_i$ であって、任意の $i\in I$ に対して、s の U_i への制限が上の条件(*)を満たすものが存在。

このとき、開集合 U に対し、

$M^+(U):=\{s\,|$ 写像 $s:U\to$ Spé (M) は条件(**)を満たす$\}$

とおくと、M^+ は B 上の層となる。$F\subset[n]$ に対し、$U_F:=\bigcup_{G\supset F}|G|$ は B の開部分集合であるが、$F\neq\emptyset$ ならば、$M^+(U_F)=M_F$ である。

$\mathbb{Z}^n$-次数付 S-加群 M に対し、その次数付 Matlis 双対を $M^\vee$ と記す。$M^\vee$ も $\mathbb{Z}^n$-次数付 S-加群であるが、$\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n$ に対し、$(M^\vee)_{\mathbf{a}}$ は $M_{-\mathbf{a}}$ の双対ベクトル空間となる。$\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$ を S の極大イデアルとする。M が $\mathbb{Z}^n$-次数付 S-加群ならば局所コホモロジー $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ もそうである。さらに $M\in{}^*\mathrm{gr}S$ ならば、$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ の双対 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)^\vee$ は、$\mathrm{Ext}_S^{n-i}(M,S(-[n]))$ $(\cong H^{-i}(\mathbf{D}(M))\in\mathrm{gr}S)$ と同型となる。$M\in\mathrm{Sq}S$ のとき、$\mathrm{Ext}_S^{n-i}(M,S(-[n]))$ は squarefree なので、各 $F\subset[n]$ に対する $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{-F}$ を知ることは、$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 全体を知ることと同じである。

定理11 ([11]). $M\in\mathrm{Sq}S$ とする。

(1) 次が成立。

$$H^i(B,M^+)\cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)_0\quad(\forall i\geq1)$$
$$0\to H^0_{\mathfrak{m}}(M)_0\to M_0\to H^0(B,M^+)\to H^1_{\mathfrak{m}}(M)_0\to0\quad(\text{完全}).$$

ここで、$H^i(B,M^+)$ は層のコホモロジーである。

(2) $\emptyset\neq F\subset[n]$ に対して、

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{-F}\cong H^{i+1}_c(U_F,M^+|_{U_F})\quad(\forall i\geq0)$$

が成立する。ここで、$H^i_c(U_F,M^+|_{U_F})$ はコンパクト台の層のコホモロジーである。

Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ に付随する層 $k[\Delta]^+$ は、$|\Delta|$ 上の k 定数層 $\underline{k}_{|\Delta|}$(厳密には、これの B への拡張)である。一方、層のコホモロジー $H^i(|\Delta|,\underline{k}_{|\Delta|})$ は,(k 係数の)通常のコホモロジー $H^i(|\Delta|;k)$ と同型である。よって、次が成立する。

系12 (Hochster). 任意の $i\geq1$ に対し、$H^i(|\Delta|;k)\cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])_0$ が成立。また、$H^0(|\Delta|;k)\cong H^1_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])_0\oplus k$。さらに、任意の $i\geq0$ と任意の $\emptyset\neq F\subset[n]$ に対し、$H^i_c(|\Delta|\cap U_F;k)\cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(k[\Delta])_{-F}$ が成立。

Hochster のオリジナルの記述([9]参照)には、コンパクト台コホモロジーは現れず、見た目は全く異なるが、もちろん同じ結果を与える。

$F\subset[n]$ に対し、F に属する元の個数を $\#F$ と記す。幾何学的実現 $|\Delta|$ の次元は、$\max\{\#F-1\,|\,F\in\Delta\}$ で与えられる。以下、$|\Delta|$ の次元を d とする。このとき、$k[\Delta]$ の Krull 次元は $d+1$ となる。各 F に対し、

$k[F] := S/(x_i \mid i \notin F)$ と置く。$F \in \Delta$ ならば、$k[F]$ は $k[\Delta]$ の剰余環である。余鎖複体 $\omega^\bullet_{k[\Delta]}$ を以下の様に定める。

$$\omega^\bullet_{k[\Delta]}: \cdots \to 0 \to \bigoplus_{\substack{F \in \Delta \\ \# F = d+1}} k[F] \to \bigoplus_{\substack{F \in \Delta \\ \# F = d}} k[F] \to \cdots$$
$$\to \bigoplus_{\substack{F \in \Delta \\ \# F = 1}} k[F] \to k \to 0 \to \cdots$$

右端近くの k は、$k[\emptyset]$ のことと思えば自然であろう。この k のコホモロジー次数が 0 となるように、余鎖複体の次数を入れる。また、$i \in F$ に対し、$k[F - \{i\}]$ は $k[F]$ の剰余環なので、自然な全射 $k[F] \to k[F - \{i\}]$ があるが、これらに符号±を付けながら直和を取った $k[F] \to \bigoplus_{i \in F} k[F - \{i\}]$ から $\omega^\bullet_{k[\Delta]}$ の微分写像が得られる。

$\omega^\bullet_{k[\Delta]}$ の各成分は squarefree なので、B 上の（本質的には、$|\Delta|$ 上の）層の複体 $(\omega^\bullet_{k[\Delta]})^+$ が得られる。次が成立。

補題13（[11]）. $\omega^\bullet_{k[\Delta]}$ は、$k[\Delta]$ の正規化された双対化複体（と導来圏で同型）である。層の複体 $(\omega^\bullet_{k[\Delta]})^+[-1]$ は、位相空間 $|\Delta|$ の k 係数の Verdier 双対化複体 $\mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}$ の B への拡張（と導来圏で同型）である。

よって、$|\Delta|$ が多様体（境界付でもよい）のとき、$H^{-d-1}(\omega^\bullet_{k[\Delta]})^+$ は、$|\Delta|$ の k 係数の向き付け層（Poincaré 双対性で使われる層）となる。よって、$|\Delta|$ が向き付け可能な多様体ならば、$H^{-d-1}(\omega^\bullet_{k[\Delta]}) \cong k[\Delta]$ となる。

次の結果を、本稿の締め括りとしよう。これは、標語的に言えば「$k[\Delta]$ 上の squarefree 加群の（可換環論の意味での）局所双対性は、位相空間 $|\Delta|$ 上の層の Poincaré-Verdier 双対性に対応する」と主張している。

定理14. $M^\bullet \in D^b(\mathrm{Sq}S)$ とし、各 $H^i(M^\bullet)$ が $k[\Delta]$-加群とする（このとき、各 M^i を $k[\Delta]$-加群に取り直せる）。$|\Delta|$ 上の層の圏の導来圏で次の同型が存在する。

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{k[\Delta]}(M^\bullet, \omega^\bullet_{k[\Delta]}[-1])^+|_{|\Delta|}$$
$$\cong \mathbf{R}\,\mathcal{H}om((M^\bullet)^+|_{|\Delta|}, \mathcal{D}^\bullet_{|\Delta|}).$$

References

[1] M. Brun and G. Fløystad, The Auslander-Reiten translate on monomial quotient rings, preprint (arXiv:0802.2772).

[2] A. Dimca, Sheaves in topology, Springer, 2004.

[3] G. Fløystad, Cohen-Macaulay cell complexes, in "Algebraic and geometric combinatorics", pp.205-220, Contemp. Math., 423, Amer. Math. Soc., 2006.

[4] 日比孝之、可換代数と組合せ論（シュプリンガー現代数学シリーズ）、シュプリンガー・ジャパン、1995.

[5] E. Miller, The Alexander duality functors and local duality with monomial support, J. Algebra. **231** (2000), 180-234.

[6] E. Miller and B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, Springer, 2005.

[7] R. Okazaki and K. Yanagawa, Linearity defects of face rings, J. Algebra **314** (2007), 362-382.

[8] T. Römer, Generalized Alexander duality and applications, Osaka J. Math. **38** (2001), 469-485.

[9] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, 2nd ed. Birkhäuser, 1996.

[10] K. Yanagawa, Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules, *J. Algebra* 225 (2000), 630-645.

[11] K. Yanagawa, Stanley-Reisner rings, sheaves, and Poincaré-Verdier duality, *Mathematical Research Letters* 10 (2003) 635-650.

[12] K. Yanagawa, Derived category of squarefree modules and local cohomology with monomial ideal support, *J. Math. Soc. Japan* 56 (2004) 289-308.