関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
Vol.15 (2008)

解　説

あいまいな判断を伴う意思決定

中　井　暉　久*

Decision making with fuzzy judgments

Teruhisa NAKAI

1. は じ め に

人間は日々、大小さまざまな意思決定を行っている。例えば、(1)朝出かける際、空模様を見て、傘を持っていくべきかどうかを考える、(2)競争他社の出方を考えて、自社商品の価格をいくらにするかを考える、(3)国の予算配分をどうするかを考える、などがある。(1)は意思決定者が自分一人の場合であり、(2)は意思決定の結果が、自分の決定だけでなく、他者の意思決定にも依存する場合（これをゲーム的状況という）であり、(3)は複数の構成員から成る社会において、各構成員の意見を尊重して、社会としての意思決定をするには、各構成員の意見をどう集約すべきかを考える場合である。

一人意思決定の場合には、多くの場合、決定の結果に対する満足さ（これをその結果の「効用」という）の期待値を最大にする決定を選択するのが最も良いとされる。これが「期待効用原理」[8]と呼ばれる行動基準である。「期待効用原理」についてはさまざまな問題点が指摘されているが、ここでは触れない。

ゲーム的状況における意思決定では、相手がどういう決定をとるかを予想し、それに対応した決定をとらなければならない。その場合、相手もこちらの出方を予想してくるわけだから、互いに相手の裏の裏をかくことを考え、その行きつく先を考えて自分の決定（これをゲーム理論では「戦略」と呼ぶ）を選ぶことになる。この場合の解の一つとして、ナッシュ均衡点が提案されている。[7]それは、各プレイヤー（意思決定者）が自分の期待利得の最大化をめざして互いに均衡する、言い換えれば、自分一人がその状態から逸脱しても決して得はしない、という意味で全員がそこに落ち着く点のことであり、各プレイヤーはそのときの自分のナッシュ均衡戦略をとるべきであるというものである。

社会的意思決定方式の代表的なものに「投票」がある。そのうち、簡単で最も広く用いられているのは「単純多数決投票方式」であって、各投票者が自分の最も好む選択肢を一つ記名し、投票数の大きい順に社会的選好順序をつけるというものであるが、各人の持つ二位以下の選択肢に対する思いが反映されないという過度の情報の簡約化が指摘されている。これに対し二位以下の選択肢をも考慮する方式として、コンドルセ方式[2]がある。これは各選択肢対について、全投票者にどちらを好むかと問い、多数決で対の中での社会的順序をつけ、全選択肢に対するこれらの結果を集約して社会的選好順序をつけるものである。この方式は全投票者の全選択肢に対する選好順序を考慮する点で優れており、さまざまな投票方式を評価する際の基準として採用されることが多い。ただ、対内での社会的順序をすべての対について集約した結果、循環順序が発生して、全選択肢に対する社会的選好順序が決定できない（この現象を「投票のパラドックス」という）ことがしばしば起こる。「投票のパラドックス」を回避する方式として、ボルダ方式[1]（順位評点方式ともいう）がある。各投票者が全選択肢に選好順序をつけ、順序の悪いほうから1点、2点、…を配点する。各選択肢ごとに全投票者から配点された点を合計して、その選択肢の評点とし、評点の大きい順に社会的選好順序をつける、というものである。ボルダ方式は、「投票のパラドックス」を起こさず、コンドルセ方式との

原稿受付　平成20年9月8日
*環境都市工学部 都市システム工学科 教授

一致度も高いという好ましい点がある一方、つぎのような欠点も指摘されている。(1)選択肢集合が変化すると、もとの選択肢間の社会的順序が変化することがある。(2)無関係対象からの独立性が破綻する可能性がある。(3)ある投票者がある意図をもって自分の選好順序を故意に変更して、その意図が成功するという戦略的操作の入り込む可能性がある。

人間の意思決定では、ほとんどの場合、状況把握に関して、不確実性や“あいまいさ”がつきまとう。不確実性に関しては確率論が用いられるが、人間の判断における“あいまいさ”についてはファジィ理論が適用される。本稿では、“あいまいさ”をゲーム的意思決定に取り入れた「ファジィ主観的ゲーム（Fuzzy Subjective Game：FSG）」と、社会的意思決定に取り入れた「ファジィ社会的決定（Fuzzy Social Decision：FSD）方式」を紹介する。次節では本稿で必要とする最小限のファジィに関する解説をする。

2．ファジィ測度とファジィ積分

ファジィ理論で扱う“あいまいさ”には二通りある。

(a)対象とするものの集まりの輪郭が、はっきりしない場合のあいまいさ。

集合論で扱う集合は、対象がその集合に属するか属さないかが判然としている。たとえば「身長175cm以上の人の集まり」というと、ある人がその集合に含まれるか否かははっきりしている。それに対して、「背が高い人の集まり」は、ある人がそれに含まれているかどうか判然としない。このようなものの集まりをファジィ集合という。そして対象 x がファジィ集合 A に属する度合いを $\mu_A(x)$ と書き、関数 $\mu_A(\cdot)$ をファジィ集合 A のメンバーシップ関数という。数学的には、ファジイ集合 A と、メンバーシップ関数 $\mu_A(\cdot)$ は同一視される。

(b)輪郭のはっきりした集合に、ある対象が属するかどうかがはっきりしない場合のあいまいさ。

たとえば、古い建物の年齢を考えて、800年前から500年前までというはっきりした期間にこの建物が建てられたかどうかがあいまいな場合などである。これをあらわすのがファジィ測度である。いま考えている対象の起こりうる可能性の全体を、有限集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とする。

定義1：X の部分集合に、1つの実数を与える集合関数 $g(\cdot)$ が、次の条件を満たすとき、$g(\cdot)$ を X 上のファジィ測度という。

(i) $g(\phi) = 0, g(X) = 1$（ϕ は空集合）

(ii) X の部分集合 A, B に対し

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)\text{（単調性）}$$

$g(\cdot)$ の具体的意味は、ケースによって異なるが、一般的には部分集合間の相互作用（要素の組み合わせによる効果）を表している。ファジィ測度は、一般的には加法性を満たさない。確率測度は、加法性を満たすファジィ測度の一つである。一般的なファジィ測度を決定するには、すべての部分集合に対する $g(\cdot)$ の値を知らねばならない。その不便さを避けるため、一定のルールで $g(\cdot)$ が決まるファジィ測度として、つぎのλ-ファジィ測度がよく用いられる。

定義2：パラメータ $\lambda(> -1)$ に対し、$g_\lambda(\phi) = 0$, $g_\lambda(X) = 1$ および、

(iii) X の部分集合 $A, B(A \cap B = \phi)$ に対し

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)$$

を満たす $g_\lambda(\cdot)$ を、λ-ファジィ測度という。

条件 $\lambda > -1$ は、単調性を満たすための要請である。$\lambda > 0$ は相乗効果のある場合、$\lambda < 0$ は相殺効果のある場合に相当し、$\lambda = 0$ なら、$g_\lambda(\cdot)$ は加法的となる。

つぎにファジィ測度による積分つまりファジィ積分の一つとして、高校で学ぶ積分（リーマン積分）の拡張であるルベーグ積分の、そのまた拡張になっているショケ（Choquet）積分を紹介する。

有限集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ の上の1つのファジィ測度を $g(\cdot)$ とする。また X 上の関数 $h(\cdot)$ がつぎの条件を満たしているとする。

$$h(x_1) \geq h(x_2) \geq \cdots \geq h(x_n)$$

必要に応じて番号を付け替えればよいから、こう仮定しても一般性を失うことはない。いま、$H_i = \{x_1, \cdots, x_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおく。

定義3：関数 $h(\cdot)$ のファジィ測度 $g(\cdot)$ によるショケ積分とは、次式の右辺で定義される値であり、記号で左辺のように書く。

$$(\mathrm{C})\int h dg = \sum_{i=1}^{n} [h(x_i) - h(x_{i+1})] g(H_i)$$

ただし、$h(x_{n+1}) = 0$ とする。

ショケ積分は、階段関数 $h(\cdot)$ と x 軸の間の図形の、ファジィ測度 $g(\cdot)$ による重みつき面積を表している。

3．ファジィ主観的ゲーム

ここでは簡単のため、2人ゲームに限定して説明する。n 人ゲームについても同様に展開可能である。プレイヤーⅠ（Ⅱ）のとりうる行動を、$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ とする。Ⅰ，Ⅱがそれぞれ行動 α_i, β_j を

とったときの、Ⅰ，Ⅱの利得をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする。$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ を、それぞれⅠ，Ⅱの利得行列といい、$G = [A, B]$ を2人非0和ゲームという。プレイヤーⅠが確率ベクトル $x = < x_1, \cdots, x_m >$ に従って、自分の取るべき行動を選択するとき、x をⅠの混合戦略という。x_i はⅠが α_i を選択する確率である。同様にプレイヤーⅡの混合戦略を $y = < y_1, \cdots, y_n >$ とする。y_j はⅡが β_j をとる確率である。プレイヤーⅠ，Ⅱがそれぞれ混合戦略 x, y をとったときの、プレイヤー $i (i = \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ})$ の期待利得を $M_i(x, y)$ とおく。第1節で述べたナッシュ均衡点の定義を示す。

定義4：プレイヤーⅠ，Ⅱの混合戦略の対 (x^*, y^*) がナッシュ均衡点であるとは、

$$M_{\text{I}}(x^*, y^*) = \max_x M_{\text{I}}(x, y^*)$$
$$M_{\text{II}}(x^*, y^*) = \max_y M_{\text{II}}(x^*, y)$$

が成り立つことである。

ナッシュ均衡点はゲームの解の一つではあるが、二つの問題点が指摘されている。第一は複数のナッシュ均衡点を持つゲームが多数あり、その場合各プレイヤーはどの均衡点をめざして戦略を選べばよいか迷うことになり、ナッシュ均衡点が有効な戦略選択の指針となり得ないことである。第二は実際のゲームにおいて、ナッシュ均衡戦略以外の戦略をとる場合が多く観察され、しかもそれらをとる比率もプレイヤーによってまちまちであるという戦略選択の多様性があることである。後者の多様性の説明として、以下に主観的ゲームを紹介する。[5]各プレイヤーはゲームに臨んで、どういう動機で戦略を選ぶのだろうか。普通には、自分の期待利得の最大化をめざすと考えられている。ナッシュ均衡点はそのときの解である。しかし相手との人間関係によっては、他の動機も考えられる。たとえば、相手利得の最小化、相手に勝つ確率の最大化、自分の利得から相手利得を引いた差の最大化、自分と相手の利得の和の最大化（社会全体の幸せを願う）、相手利得の最大化（家族や恋人のため、自己犠牲をしてでも相手の幸せを願う）、などが考えられる。しかし、相手がどういう動機でゲームに臨んでいるかは分からない。ひょっとすると自分の動機すら判然と自覚していないこともあるだろう。

いまプレイヤー P（ⅠまたはⅡ）にとっての主観的ゲーム G^P をつぎのように定義する。プレイヤー P にとって考えられる戦略選択の動機をすべて挙げ $m_1, \cdots, m_l$ とし、$M = \{m_1, \cdots, m_l\}$ とおく。プレイヤーⅠ，Ⅱが行動 α_i, β_j をとったときの動機 m_k に基づくプレイヤーⅠ，Ⅱの利得を、それぞれ f_{ij}^k, g_{ij}^k とし、$f^k = [f_{ij}^k]$, $g^k = [g_{ij}^k]$ とおくと、f^k, g^k は動機 m_k のもとでのⅠ，Ⅱの利得行列であり、原ゲームの利得行列 A, B より構成されるものである。プレイヤー P が考える、Ⅰの動機分布を $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_l\}$、Ⅱの動機分布を $\theta = \{\theta_1, \cdots, \theta_l\}$ とする。例えば θ_k はプレイヤーⅡが動機 m_k に従って戦略選択をしようとしているだろうと、プレイヤー P が考えている確率である。ここで $m \times n$ 行列

$$G_{\text{I}}^P = \left[\sum_{k=1}^{l} \xi_k f_{ij}^k \,|\, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \right]$$
$$G_{\text{II}}^P = \left[\sum_{k=1}^{l} \theta_k g_{ij}^k \,|\, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \right]$$

を考えると、これらはⅠ，Ⅱの動機分布による期待利得を要素とするⅠ，Ⅱの利得行列である。プレイヤー P の主観的ゲームは、$G^P = [G_{\text{I}}^P, G_{\text{II}}^P]$ で表される。ちなみにプレイヤーⅠ，Ⅱがそれぞれ混合戦略 x, y をとるとき、プレイヤー P の考えるⅠ，Ⅱの期待利得はそれぞれ

$$M_{\text{I}}^P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{l} \xi_k f_{ij}^k \right] x_i y_j$$
$$M_{\text{II}}^P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{l} \theta_k g_{ij}^k \right] x_i y_j$$

である。G^P のナッシュ均衡点を、プレイヤー P の主観的ナッシュ均衡点と呼び、そのときのプレイヤー P の戦略を、主観的ナッシュ均衡戦略という。各プレイヤーは自分の主観的ナッシュ均衡戦略をとると考えることにより、戦略選択の多様性が説明される。たとえば有名な囚人のジレンマゲームにおいては、ナッシュ均衡戦略と現実との一致率は64%であるが、主観的ナッシュ均衡戦略と現実との一致率は91.7%になるとの実験結果もあり、主観的ゲームを考えることにより、実態説明力が格段に上がることが知られている。[3]

主観的ゲームにおいては、利得関数の変換を動機分布による期待値として行っているが、このことは価値評価における加法性を認めるあるいは要求することになる。しかし人間の価値評価にはあいまいさが含まれ、必ずしも加法的ではなく、相乗効果や相殺効果のように非加法的な場合も多い。こうした非加法性をファジィ測度として導入する。たとえばプレイヤー P の主観的ゲーム G^P において、プレイヤー P の考えているプレイヤーⅡの動機分布 θ を λ-ファジィ測度に変換してみると、まず定数 $\beta (> 0)$ を用意して、

$$g_\lambda(\{m_k\}) = \beta\theta_k \quad (k = 1, \cdots, l)$$

とし、定義2の式より M のすべての部分集合に対する $g(\cdot)$ の値を求める。定数 β の値は $g_\lambda(M) = 1$ より決定する。パラメータ λ の値は所与としてもよい

が、現実に適合するように決定しようとするなら、M の他の1つの部分集合に対する $g_\lambda(\cdot)$ の値をプレイヤー P に聞く必要がある。つぎに利得関数の変換をファジィ積分で行うことで、ファジィ主観的ゲームを構成する。[4]こうして各プレイヤーは自分のファジィ主観的ナッシュ均衡戦略をとると考えることにより、戦略選択の実態をより一層説明できることになる。

4. ファジィ社会的決定方式

複数の構成員から成る社会において、複数の選択肢が提示されていて、これらに対して社会としての選好順序をつけようとしている。各構成員には、社会における立場に応じた「持ち点」が与えられていて、自分の選考の度合いによって各選択肢に「持ち点」を配分する。配分された点数を集約して、社会的選好順序を決めることを考える。ここでは、つぎの特徴を持つファジィ社会的決定（Fuzzy Social Decision：FSD）方式を紹介する。[6]

⑴選好の評価基準を陽に取り上げ、それを各構成員に自由に設定させる。

⑵各構成員は、自分の選んだ評価基準に、主観的重みづけを行う。

⑶各構成員による各選択肢の総合評価においては、判断のあいまいさを考慮して、主観的重みづけに基づくファジィ測度を用いたファジィ積分によって行う。

⑷社会的決定は、選考の順序ではなく、選好の強弱を集計して行う。

具体的にFSD方式の手順を示すと、大略つぎのように進行する。

手順1：各構成員が、自分の選考決定の判断材料と考える「評価基準」を列挙する。内容・個数とも自由に設定してよい。

手順2：各構成員が、評価基準どうしの一対比較を積み重ねて、評価基準間の主観的重みづけを行う。重みづけの整合性の検証も行う。

手順3：評価基準の重要度をファジィ測度に変換する。λ-ファジィ測度を採用する場合には、パラメータ λ の決定のため、構成員に一部の選択肢部分集合に対する重要度を聞く必要がある。

手順4：各構成員は、自分の各評価基準のもとで、各選択肢に評点をつける。このとき評点の満点は、全評価基準に対し同じとする。

手順5：人間の判断の「あいまいさ」を取り入れるため、手順3で決定したファジィ測度に関する、評点のファジィ積分に基づいて、各選択肢に総合評価値をつける。

手順6：各構成員は、総合評価値に比例して、自分の「持ち点」を各選択肢に配分する。

手順7：選択肢ごとに、全構成員から配分された点数を合計して、その選択肢の得点とする。

手順8：得点の高い選択肢から順に、社会的選好順序をつける。

FSD方式には、いくつかの利点がある。

⑴コンドルセ方式のように、「投票のパラドックス」に陥ることはない。なぜなら総合評価値に比例して配点するから、循環順序は発生しない。

⑵選択肢集合に変化があっても、もとからある選択肢相互間の社会的順序は変わらない。それは総合評価値に基づく絶対評価であって、ボルダ方式のような相対評価ではないからである。

⑶多価値の社会では、討論によって評価基準そのものや、その重みが変化する可能性があるが、それが明瞭に反映される。

⑷FSD方式では、各選択肢に自由に評点をつけることができるから、評価の強弱がそのまま反映される。たとえば、選好順序1位の選択肢に全「持ち点」をつけることもできる。一方、ボルダ方式では、選好順序に従って「持ち点」を配分するから、その配点は必ず等間隔となり、ある選択肢を極端に好んでいても、それを率直に表現することができない。

⑸判断の「あいまいさ」や非加法性を、ファジィ積分により取り入れている。

一方、FSD方式では、投票者にも集計者にも多大の手間をかけることになる。特に投票者には、評価基準の列挙、一対比較、一部の評価基準集合に対する重みの表明、選択肢の個々の評価、などをしてもらわなければならない。

総じてFSD方式は、多少手間ひまかかるが、各構成員の自由な、かつ多少あいまいな判断でも、できるだけ反映させる方式として、利用価値は高いと思われる。

5. おわりに

意思決定には、判断のあいまいさがつきまとう。ここで紹介した「ファジィ主観的ゲーム」や「ファジィ社会的決定方式」は、それぞれの局面における人間の意思決定の様相を、できるだけ実態に促して説明しようとする記述的数理モデルである。

人間の潜在意識を科学する道は前途遼遠であり、途についたところである。興味のある、やりがいのある分野である。

参考文献

[1] J. C. Borda, Mémoire sur les Élections au Scrutin, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1781

[2] M. de Condorcet, Essai sur l'Application de l'Analyse, à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix, Paris, 1785

[3] S. Furuyama and T. Nakai, The construction of subjective games by motive distributions in n-person non-cooperative game, Journal of Information and Optimization Sciences, Vol. 25 (2004), No. 3, 533-541

[4] S. Furuyama and T. Nakai, Fuzzy subjective game considering non-additive feelings of players, Journal of Information and Optimization Sciences, Vol. 27 (2006), No. 1, 69-80

[5] T. Nakai, Subjective games in a non-cooperative game, Journal of Information and Optimization Sciences, Vol. 21 (2000), No. 1, 129-147

[6] T. Nakai, Fuzzy social decision procedure, to appear

[7] J. F. Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics, Vol. 54 (1951), 286-295

[8] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton Univ. Press, 1944