論　文

# ピースに制約を加えた2次元ビン・パッキング問題

正員 榎原 博之† 　正員 中野 秀男† 　正員 中西 義郎†

# Constrained Two-Dimensional Bin Packing Problem

Hiroyuki EBARA†, Hideo NAKANO† *and* Yoshiro NAKANISHI†, *Members*

**あらまし**　2次元ビン・パッキング問題は，NP完全，あるいはそれ以上のクラスに属する扱いにくい問題であるとされているが，ピースの種類が制約されれば，扱いにくさが変わるものと考えられる．本論文では，この問題の扱いにくさがピースの種類によってどのようになるかを系統的に追究しやすくするために，ビンの幅，ピースの幅，高さをすべて整数値とし，かつピースの種類を $w \times h$ の部分矩形に限定し，$w$ および $h$ を逐次増加させて，時間複雑度がピース数 $n$ の多項式時間，とくに $O(n)$ 回のBL（ボトム・レフト）パッキングの厳密解法および極めて良い近似解法の存在する $w$ および $h$ を見い出すことを試みている．そして，少なくともピースの種類が $4\times1$，$1\times4$，$2\times2$ の部分矩形である場合までは，多項式時間で最適解が得られることを，また $3\times2$ の部分矩形である場合は，多項式時間で最悪の場合でもたかだか高さが1しか悪くならない近似解が得られることを明らかにしている．

## 1. まえがき

2次元ビン・パッキング問題[1]とは，

“幅 $W$ で，高さが無限大のオープン・エンドの矩形のビン $B$ と，幅が $w_i$，高さが $h_i$ の $n$ 個の矩形のピース $p_i$（$1 \leqq i \leqq n$）が与えられたとき（ただし，$w_i \leqq W$），すべてのピース $p_i$ を互いに重なることなく，高さが最小となるように詰める問題”

である．なお，$n$ 個のピースは，リスト $L$ の中に添字の順に入っているものとし，またピースの回転を許さないものとする．この問題は，マルチ・プロセッサのジョブ割当てを始め，型紙のレイアウト等，応用分野も広く，その解法についての研究が活発に進められてきており，これまでにいくつかの近似解法が提案されてきている[(3)〜(5)]．

2次元ビン・パッキング問題は，1次元ビン・パッキング問題がNP完全[7]な問題であることから考え，NP完全，あるいはそれ以上のクラスの問題であると考えられており，一般には扱いにくい問題であるが，もしピースの種類が制約されれば，扱いにくさ（intractability）が変わるものと考えられる．本論文は，ピースの種類によって扱いにくさがどのようになるかを明らかにすることを目的にしたものであって，このことを系統的に追究しやすくするために，ビンの幅，ピースの幅，高さをすべて整数値とする．さらにピースの種類を $w \times h$ の部分矩形に限定し，$w$ および $h$ を逐次増加させて，時間複雑度がピース数 $n$ の多項式時間，とくに線形時間となる厳密解法および極めて良い近似解法の存在する $w$ および $h$ を見い出すことを試みている．

**2.**では，ピースの高さを一定にし，幅 $w$ を逐次増加させた場合について考察し，ピースの種類を $4\times1$ の部分矩形に限定した場合は，線形時間で最適解が得られることを明らかにしている．**3.**では，ピースの幅を一定にした場合について考察し，**2.**の厳密解法を利用することによって，ピースの種類を $1\times4$ の部分矩形に限定した場合は，線形時間で最適解が得られることを明らかにしている．**4.**では，ピースの種類を $w\times h$ の部分矩形に限定し，幅 $w$，および高さ $h$ を逐次増加させた場合について考察し，ピースの種類を $2\times2$ の部分矩形に限定した場合は，線形時間で最適解が得られることを明らかにし，ついで，ピースの種類を $3\times2$ の部分矩形に限定した場合は，線形時間で最悪の場合でもたかだか高さが1しか悪くならない近似解が得られることを明らかにしている．

ここで，本論文で使用する特別な用語と記号をまとめて示しておく．

・“BL（ボトム・レフト）パッキング……空き地も考慮して，ピースを詰めることができる最も底

† 大阪大学工学部通信工学科，吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan

に近い位置で，かつその中で最も左の位置にピースを詰めること[3]．また，後述の解法で使用している“BLで詰める”とは，この規則に従いピースを詰めることである．

- “空き地”……周囲をピースまたはビンで囲まれたピースの存在しない領域．なお，右端にできる，上にのみ開いた細長いピースの存在しない領域も空き地と呼ぶこととする．
- “$i \times j$ の矩形”……幅 $i$，高さ $j$ の矩形．
- “$i \times j$ の部分矩形”……$i \times j$，$i \times (j-1)$，$i \times (j-2), \cdots$，$i \times 1$，$(i-1) \times j$，$(i-1) \times (j-1), \cdots$，$1 \times 1$ の矩形の集合．たとえば，$3 \times 2$ の部分矩形とは，$3 \times 2$，$3 \times 1$，$2 \times 2$，$2 \times 1$，$1 \times 2$，$1 \times 1$ の6種類の矩形の集合である．
- “タイト”……空き地がなく，ピースがピッタリと詰っている状態．
- “レベル”……ピースを詰める際に基準となる．ビンの底辺に平行な直線上の，ピースの存在する領域[4]．たとえば，高さ1のピースのみを詰めた場合は，高さ1ごとにレベルができる．
- “フリーのピース”……ビンに詰められていないピース．
- $p_{ij}$ ……幅 $i$，高さ $j$ の矩形のピース．
- $n_{ij}$ ……幅 $i$，高さ $j$ の矩形のピースの個数．
- $p_{i*}$ ……幅 $i$ の矩形のピース．
- $n_{i*}$ ……幅 $i$ の矩形のピースの個数．
- $p_{*j}$ ……高さ $j$ の矩形のピース．
- $n_{*j}$ ……高さ $j$ の矩形のピースの個数．

## 2. ピースの高さが一定である場合

ピースの高さが一定であるという制約を加えると，問題は単に1次元ビン・パッキング問題となる．この問題において，ピースの種類を $w \times 1$ の部分矩形に限定し，$w$ をパラメータとして多項式時間の厳密解法が考えられるかについて考察する．まず，ピースの種類を $4 \times 1$ の部分矩形に限定した場合の厳密解法を提案し，次の定理を導いている．

［定理1］　ピースの種類を $4 \times 1$ の部分矩形に限定する．このとき，ピースをアルゴリズム1で詰めると，必ず最適に詰めることができる．また，このアルゴリズムは $O(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができる．ただし，$W$ はビンの幅であり，$n$ はピース数である．　□

**アルゴリズム1**

メイン・ルーチン

step 1　if $W=4$ then　手続きW4を行なう．
step 2　if $W=5$ then　手続きW5を行なう．
step 3　if $W \geqq 6$ then　begin
　3.1　if $W$ mod $4=0$　then
　　　手続きWm0を行なう．
　3.2　if $W$ mod $4=1$　then
　　　手続きWm1を行なう．
　3.3　if $W$ mod $4=2$　then
　　　手続きWm2を行なう．
　3.4　if $W$ mod $4=3$　then
　　　手続きWm3を行なう．
　3.5　手続きexchangeを行なう．
　3.6　タイトに詰っていないレベルで，
　　　手続きrepackを行なう．
　end
step 4　$p_{11}$ をBLで詰める．

手続きW4

step 1　$p_{41}$ をBLで詰める．
step 2　$p_{21}$ をBLで詰める．
step 3　$p_{31}$ をBLで詰める．

手続きW5

step 1　$p_{31}$ をBLで詰める．
step 2　$p_{21}$ を $p_{31}$ の最高レベルまでBLで詰める．
step 3　$p_{41}$ をBLで詰める．
step 4　残った $p_{21}$ をBLで詰める．

手続きWm0

step 1　$p_{41}$ をBLで詰める．
step 2　$p_{21}$ をBLで詰める．

手続きWm1

step 1　$p_{31}$ を右端に1列に詰める．
step 2　$p_{41}$ を右端の幅5の領域を除いてBLで詰める．
step 3　$p_{31}$ と $p_{41}$ の間にできた幅2の空き地に，$p_{21}$ を詰める．
step 4　もし $p_{21}$ がタイトな $p_{41}$ の最高レベルまで詰めることができなければ，以下の操作をタイトな $p_{41}$ の最高レベルまで，あるいは右端に詰っている $p_{31}$ を上から順に2個取ると，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ（$H_t$）以下になるまで行なう．
- タイトでないレベルの一番右の $p_{41}$ を取り除き，それをstep 2の操作に倣って詰

め，そこに右端に詰っている $p_{31}$ を上から順に2個取って詰める．

step 5　もし $p_{31}$ がタイトな $p_{41}$ の最高レベルまで詰めることができず，$p_{21}$ が $p_{31}$ の最高レベルまで詰めることができるならば，$p_{31}$ の最高レベルまで $p_{21}$ を詰める．

step 6　残った $p_{21}$ をBLで詰める．

手続きWm 2

step 1　$p_{41}$ をBLで詰める．

step 2　右端の幅2の空き地に $p_{21}$ を詰める．

step 3　もし $p_{21}$ がタイトな $p_{41}$ の最高レベルまで詰めることができなければ，次の操作をタイトな $p_{41}$ の最高レベルまで，あるいは $p_{41}$ が足りなくなる（1個以下になる）まで行なう．

・タイトでないレベルの一番右の $p_{41}$ を取り除き，それをBLで詰め，そこにフリーの $p_{31}$ 2個を詰める．

step 4　残った $p_{21}$ をBLで詰める．

手続きWm 3

step 1　$p_{31}$ を右端に1列に詰める．

step 2　$p_{41}$ をBLで詰める．

step 3　$p_{21}$ をBLで詰める．

手続き exchange

step 0　この手続きにおいて交換される $p_{31}$ は，$W$ が偶数のときはフリーの $p_{31}$ であり，$W$ が奇数のときは右端に1列に詰められた $p_{31}$ である．このピースを $p_{ex}$ とする．$W$ が偶数のときは，交換することができるフリーの $p_{31}$ がなくなる（2個未満あるいは4個未満になる）まで，以下の操作を行なう．また，$W$ が奇数のときは，交換するために右端の一番上の $p_{31}$ を取り除くことによって，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ（$H_t$）未満になるならば，交換することは行なわず，この手続きは終了する．

step 1　同じレベルにある $p_{21}$ 3個を $p_{ex}$ 2個と交換し，交換された $p_{21}$ 3個をBLで詰める．この操作を行なえば，step 1へ．

step 2　同じレベルにある $p_{21}$ と $p_{41}$ を $p_{ex}$ 2個と交換する．もし同じレベルに $p_{21}$ がなければ，前もってそのレベルの別の $p_{41}$ と他の同じレベルにある $p_{21}$ 2個を交換しておく．交換された $p_{41}$ は，もしあれば，同じレベルにある $p_{21}$ 2個と交換し，その後 $p_{21}$ 3個をBLで詰める．もし同じレベルに $p_{21}$ 2個がなければ，$p_{41}$，$p_{21}$ をその順にBLで詰める．この操作を行なえば，step 1へ．

step 3　同じレベルにある $p_{41}$ 3個を $p_{ex}$ 4個と交換し，交換された $p_{41}$ 3個をBLで詰める．この操作を行なれば，step 1へ．

手続き repack

step 1　残った $p_{31}$ が3個以下の場合．

・$p_{41}$，$p_{21}$，$p_{31}$ の順にBLで詰める．

step 2　残った $p_{31}$ が4個以上の場合．

2.1　$p_{21}$ がなく，$p_{41}$ が2個の場合．

・$p_{41}$ 2個をBLで詰める．

・$p_{41}$ と同じレベルに $p_{31}$ を詰める．

・もし右端に幅2の空き地ができるならば，そのレベルの $p_{41}$ 1個を取り除き，そこに $p_{31}$ 2個を詰め，$p_{41}$ をその上のレベルにBLで詰める．

・残りの $p_{31}$ をBLで詰める．

2.2　その他の場合．

・$p_{41}$，$p_{31}$，$p_{21}$ の順にBLで詰める．

このアルゴリズムがピースを最適に詰めることを示すためには，ピースができる限りタイトに詰められていることを示さなければならない．もしピースが一番上のレベルを除いてタイトに詰っているならば，このパッキングは最適である．もし一番上のレベル以外にタイトでない複数個のレベルがある場合でも，何回かの交換を行なってもパッキングの高さをこれ以上低くすることができないことを示せば最適である．これを示すためには，一番上のレベル以外にタイトでないレベルがあるすべての場合を1つずつ検討する必要がある．

また，このアルゴリズムでは，$p_{11}$ は最後に空き地も考慮して，BLで詰めることにしている．なぜならば，$p_{11}$ は最小単位のピースであり，このピースより小さい空き地はなく，どんな形，どんな大きさの空き地にも $p_{11}$ は必ずピッタリと詰めることができるからである．よって，最適性を考える場合，$p_{11}$ はないものとして考えてもよい．

定理1の証明は非常に長くなるので，この証明においては，最も複雑である，$W \geq 6$ で，$W \bmod 4 = 1$（手続きWm 1）の場合についてのみ証明し，残りは省略する[9]．その他の場合はより簡単であり，同様の

考え方に基づいて証明できる．

（略証） この場合は，$W$が奇数であるので，タイトに詰めるためには各レベルに$p_{31}$が必要である．そのためには，step 1で$p_{31}$を右端に1列に詰める．$p_{31}$の左には幅$W'$（$W'$ mod 4＝2）のビンがあることになる．step2で$p_{41}$を詰め，step3でその右にできた幅2の空き地に$p_{21}$を詰める．もし，$p_{31}$がタイトな$p_{41}$の最高レベル以上まで詰っており，$p_{21}$がタイトな$p_{41}$の最高レベルまで詰めることができるならば，手続きWm 1を行なった後は，幅$W'$の一番上のレベルを除いてタイトである．

ここで，もし$p_{21}$がタイトな$p_{41}$の最高レベルまで詰めることができなければ（step4），一番右の$p_{41}$1個を取り除き，幅6の空き地を作り，そこに$p_{31}$を2個詰めることによってタイトとなるようにする（図1）．この操作をタイトな$p_{41}$の最高レベルまで，あるいは，右端に詰っている$p_{31}$を上から順に2個取ると，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ（$H_t$）以下になるまで行なう．この操作を行なう毎に，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ（$H_t$）が1つ上がる．もし$p_{31}$もタイトに詰っている最高レベルの高さ以下になるならば，タイトに詰めることはできないので，上の複数個のレベルがタイトでないまま手続きWm 1を終了する．ここで，タイトに詰っていないレベルの$p_{31}$はたかだか2個である．なぜならば，$p_{21}$はないので，$p_{41}$と$p_{31}$のみで1つのレベルをタイトにするためには，$W$ mod 4＝1の場合，$p_{31}$が少なくとも3個必要だからである．次に，手続きexchange（メイン・ルーチンのstep3.5）を行なう．この場合には，$p_{31}$は2個しかないので，交換はたかだか1回しか起こらない．次に，手続きrepack（メイン・ルーチンのstep 3.6）を行なう．$p_{31}$は2個以下であるので，step 1で$p_{41}$，$p_{31}$の順にBLで詰める（$p_{21}$はない）．この場合は，右端に空き地ができるが，$p_{41}$と$p_{31}$ 2個以下とではタイトに詰めることができないので最適である（図2）．もし$p_{31}$が十分あり，$p_{41}$を1個取り除くことによってできた幅6の空き地に$p_{31}$をタイトな$p_{41}$の最高レベルまで詰めることができるならば，手続きWm 1を行なった後は，一番上のレベルを除いてタイトである．

次に，もし$p_{31}$がタイトな$p_{41}$の最高レベルまで詰めることができず，$p_{21}$が$p_{31}$の最高レベルまで詰めることができるならば（step5），$p_{31}$の最高レベルまで$p_{21}$を詰める．step 6で残った$p_{21}$をBLで詰めて手続きWm 1は終了する．ただし，右端に空き地が残る（図3）ので手続きrepackで詰め直す．$p_{31}$はないので手続きexchangeは行なわれない．次に，手続きrepackで上のタイトでないレベルに詰っている$p_{41}$，$p_{21}$がその順でBLで詰められる．これは右端に幅1

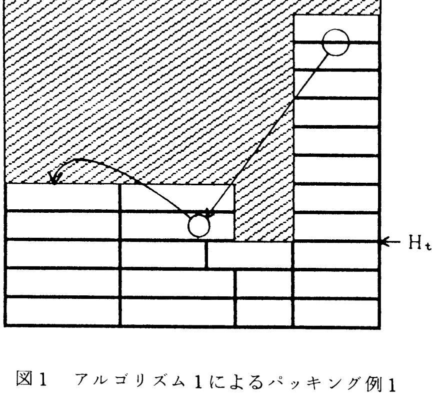



図1 アルゴリズム1によるパッキング例1
Fig.1 Packing 1 of algorithm 1.

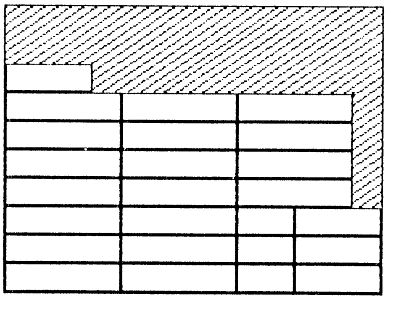


図2 アルゴリズム1によるパッキング例2
Fig.2 Packing 2 of algorithm 1.

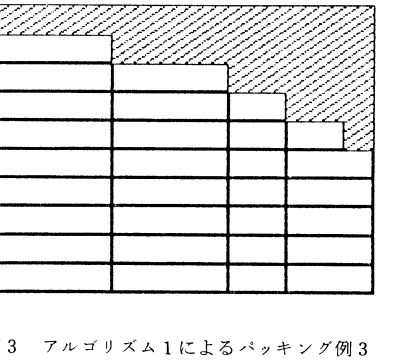


図3 アルゴリズム1によるパッキング例3
Fig.3 Packing 3 of algorithm 1.

の空き地ができるが，$p_{31}$ がないので最適なパッキングである（図4）.

最後に，step 6 で残った $p_{21}$ をBLで詰めるときに，$p_{31}$ が少なく $p_{31}$ の上に $p_{21}$ が詰められる場合がある．この場合も右端に幅1の空き地ができるが，$p_{31}$ がないので手続き repack で最適に詰めることができる．

幅 $W'$ の一番上のレベルを除いてタイトである状態で手続きWm1を終了した場合は，手続き exchangeを行なう．$p_{31}$ を $p_{21}$，$p_{41}$ と交換する方法は，$p_{31}$ 2個と $p_{21}$ 3個，$p_{31}$ 2個と $p_{21}$ $p_{41}$，$p_{31}$ 4個と $p_{41}$ 3個の3通りのみが考えられる．手続き exchange では，できる限り，かつタイトを崩さずに，この3通りの交換を行ない，また $p_{41}$ が $p_{21}$ 2個と交換できる場合は，その交換を行なった後BLで詰める．ただし，step3 で $p_{41}$ を $p_{21}$ と交換しないのはできないからである．なぜならば，もし交換できるならば step2 を行なっているはずだからである．よって，手続き exchange 終了後は，幅 $W'$ の一番上のレベルを除いてタイトであり，$p_{31}$ ができる限り $p_{21}$，$p_{41}$ と交換されている．

ここで，$p_{21}$，$p_{41}$ が十分あり，$p_{31}$ が手続き exchangeでできる限り交換されるならば，$p_{31}$ は3個以下である．3個以下の場合は，手続き repack で一番上のタイトでない（唯一の）レベルの続きに $p_{31}$ をBLで詰めれば最適となる．なぜならば，$p_{31}$が1個以下の場合は，明らかに最適に詰めることができる．また，$p_{31}$ が2個あるいは3個ある場合は，$p_{31}$ 2個と $p_{41}$，幅2の空き地とを交換することができるが，$W \geqq 9$ のときは，$p_{31}$ 3個をBLで詰めてもたかだかタイトでないレベルまでしか詰められず，この交換を行なわなくても最適となる．

次に，手続き repack で $p_{31}$ が4個以上ある場合を考える．この場合が起こるのは，もはやこれ以上 $p_{31}$ を

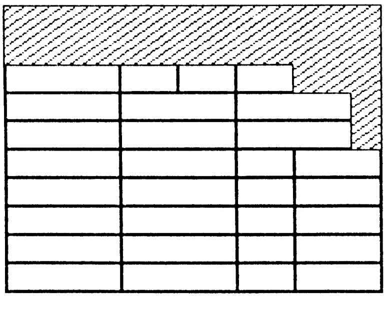


図4 アルゴリズム1によるパッキング例4
Fig.4 Packing 4 of algorithm 1.

$p_{21}$，$p_{41}$ と交換できない場合であるから，タイトでないレベルには $p_{41}$ がなくて $p_{21}$ が2個以下，あるいは $p_{21}$ がなくて $p_{41}$ が2個以下の場合のみである．ここで問題となるのは $p_{21}$ がなくて $p_{41}$ が2個の場合である．この場合には $p_{41}$ を2個先に詰めてしまうと，右端に幅2の空き地ができ反例となることがある．そこでこのように右端に幅2の空き地ができた場合は，$p_{41}$ を1個取り除き幅6の空き地を作り，そこに $p_{31}$ を2個詰めれば，そのレベルはタイトとなる．この上に $p_{41}$ をBLで詰め，残りの $p_{31}$ をBLで詰めると明らかに最適となる．次に，$p_{41}$ がなくて $p_{21}$ が2個以下の場合は，$p_{41}$，$p_{31}$，$p_{21}$ の順にBLで詰めれば，明らかに最適となる．また，$p_{21}$ がなくて $p_{41}$ が1個以下の場合も，$p_{41}$，$p_{31}$，$p_{21}$ の順にBLで詰めれば，空き地ができることもあるが最適となる．

よって，$W \geqq 6$ で，$W \bmod 4 = 1$ の場合は最適に詰めることができる．

最後に，このアルゴリズムが $O(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができることを示す．まず，$W=4$，$W=5$ の場合は詰め直すことを行なわないので，$n$ 回のBLパッキングで行なうことができる．$W \geqq 6$ の場合は，まず，手続きWm1，手続きWm2で，$p_{41}$ を詰め直すことがあるが，$p_{31}$ 2個と $p_{41}$ を交換するので，この回数は $1/2 \cdot n_{31}$ 回以下である．また，手続き exchange で $p_{21}$，$p_{41}$ を詰め直すことがあるが，これはたかだか $p_{41}$ と $p_{21}$ 2個との交換，$p_{41}$，$p_{21}$ と $p_{31}$ 2個との交換，そして $p_{41}$ と $p_{21}$ 2個との交換だけであるから，この回数は $4 \cdot n_{31}$ 回以下である．また，手続き repackではすべてのピースをもう1度だけ詰め直すことがある．なお，ピースを交換する際，交換すべきピースを見つける操作は，各幅のピースが何個，どのレベルにあるかを覚えておくことにより，定数時間でできる．以上のことから，BLパッキングはたかだか（$2 \cdot n + 9/2 \cdot n_{31}$）回以下である．よって，アルゴリズムは $O(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができる． □

定理1から，ピースの大きさを4以下に限定した場合の1次元ビン・パッキング問題は，多項式時間で解けることになる．

## 3. ピースの幅が一定である場合

ピースの幅が一定であるという制約を加えると，問題はスケジューリング問題における最大滞留時間最小問題[6]となる．この問題に関しては次の定理が導ける．

［定理2］　ピースの種類を $h \times 1$ の部分矩形に限定した場合の厳密解法が存在するとする．このとき，この解法を利用して，ピースの種類を $1 \times h$ の部分矩形に限定した場合の最適解を求めるアルゴリズム（アルゴリズム2）が存在する．ただし，$h \times 1$ の部分矩形に対する厳密解法の時間複雑度が $\boldsymbol{O}(f(n))$ であるならば，この厳密解法の時間複雑度は $\boldsymbol{O}(h \cdot f(n))$ となる．なお，$n$ はピース数である．□

**アルゴリズム2**

step 0　このアルゴリズムにおいて $h \times 1$ の部分矩形に対する厳密解法を行なう場合は，$1 \times h$ の部分矩形であるすべてのピースを，幅と高さを交換して $h \times 1$ の部分矩形であるとする．

step 1　ピースの面積の総和をビンの幅で割ると下界が求まる．それを $L$ とする．

step 2　repeat
- $L$ をビンの幅と考えて，$h \times 1$ の部分矩形に対する厳密解法を行なう．
- もし最適解 $H_{\rm opt}$ が実際のビンの幅 $W$ を越えるならば，$L$ を1つ増やす．

until 最適解 $H_{\rm opt}$ が実際のビンの幅 $W$ 以下となる．

（証明）　以上の手続きで求まる解は，$h \times 1$ の部分矩形に対する厳密解法を使って，下界から $L$（実際のビンの高さ）を1つずつ増やしていくので，明らかに最適である（図5）．

また，$1 \times h$ の部分矩形の最適なパッキングの中には，最適解 $H_{\rm opt}$ よりたかだか $h_{\rm tall}$ だけ低い部分を除いてタイトに詰っているものが，少なくとも1つある．

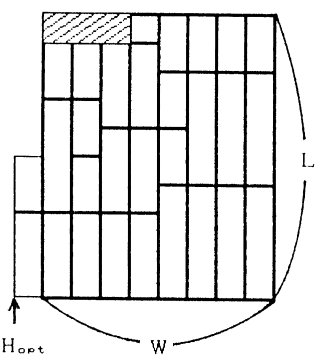



図5　アルゴリズム2によるパッキング例
Fig.5 Packing of algorithm 2.

ただし，$h_{\rm tall}$ は最も高いピースの高さである．したがって，$1 \times h$ の最適解は下界 $+ h_{\rm tall}$ 未満である．ゆえに，step 2の操作は，たかだか $h$ 回しか行なわれない．よって，このアルゴリズムの時間複雑度は $\boldsymbol{O}(h \cdot f(n))$ となる．□

ピースの種類を $4 \times 1$ の部分矩形に限定した場合の厳密解法（アルゴリズム1）が存在するので，この定理から次の系が導かれる．

［系］　ピースの種類を $4 \times 1$ の部分矩形に限定した場合の厳密解法（アルゴリズム1）を利用して，ピースの種類を $1 \times 4$ の部分矩形に限定した場合の最適解を求めるアルゴリズムが存在する．また，このアルゴリズムは $\boldsymbol{O}(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができる．ただし，$n$ はピース数である．□

系から，ジョブの処理時間を4以下に限定した場合の最大滞留時間最小問題は，多項式時間で解けることになる．

## 4. ピースの種類が $w \times h$ の部分矩形である場合

ピースの種類を $w \times h$ の部分矩形に限定し，$w$ および $h$ をパラメータとして多項式時間の解法について考察し，まずピースの種類を $2 \times 2$ の部分矩形に限定した場合に最適解が得られる解法を見い出す．ついで，ピースの種類を $3 \times 2$ の部分矩形に限定した場合について，常に最適解が得られる解法を提案することはできないが，最悪の場合でもたかだか高さが1しか悪くならない近似解法を見い出す．

### 4.1 ピースの種類が $2 \times 2$ の部分矩形である場合

［定理3］　ピースの種類を $2 \times 2$ の部分矩形に限定する．このとき，ピースをアルゴリズム3で詰めると，必ず最適に詰めることができる．また，このアルゴリズムは $\boldsymbol{O}(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができる．ただし，$W$ はビンの幅であり，$n$ はピース数である．□

**アルゴリズム3**

step 1　$p_{22}$ をBLで詰める．もし右端（$W$ が奇数のときは右端の1つ左）まで詰めることができなければ，そのレベルのピースはすべて詰めないでおく．すなわち，$\lfloor n_{22} / \lfloor W/2 \rfloor \rfloor$ 列をBLで詰め，高さは $2 \cdot \lfloor n_{22} / \lfloor W/2 \rfloor \rfloor$ である．

step 2　$p_{21}$ をBLで詰める．もし右端（$W$ が奇数のときは右端の1つ左）まで詰めることができなければ，そのレベルのピースはすべ

て詰めないでおく．また，もし詰めたレベルが奇数の場合は，一番上のレベルのピースはすべて詰めないでおき，高さを偶数にする．すなわち，$2\cdot\lfloor n_{21}/(2\cdot\lfloor W/2\rfloor)\rfloor$ 列詰め，高さは $2\cdot\lfloor n_{21}/(2\cdot\lfloor W/2\rfloor)\rfloor$ である．

step 3　もしビンの幅 $W$ が奇数ならば，$p_{12}$ を右端の幅1の空き地に左のピースの高さまで詰める．

step 4　残った $p_{22}$ をBLで詰める．

step 5　$p_{12}$ をBLで詰める．

step 6　残った $p_{21}$ をBLで詰める．

step 7　$p_{11}$ をBLで詰める．

（証明）　step 1，step 2では，ビンの幅 $W$ が偶数のときはタイトなパッキングである．step 3で $W$ が奇数のとき，$p_{12}$ を右端の幅1の空き地に詰める．左に詰められているピースの高さは偶数であるので，step 3の後 $W$ が奇数の場合もタイトに詰められる．もし $p_{12}$ が足りなければ，この幅1の空き地に $p_{11}$ 以外でピースを詰めることはできないので，最適なパッキングである．

step 4では，1列に満たない（たかだか $\lfloor W/2\rfloor-1$ 個の）$p_{22}$ をBLで詰め，step 5では，その続きに $p_{12}$ をBLで詰める．ここまでは明らかにタイトなパッキングである．次に，（たかだか $2\cdot\lfloor W/2\rfloor-1$ 個の）$p_{21}$ をBLで詰めるのであるが，このとき $W$ が偶数，奇数であるに関わらず，右端に $1\times2$ の空き地ができる可能性がある．しかし，残った $p_{21}$ を詰めたときの高さは，たかだか2であるので（$\because$ $p_{21}$ はたかだか $2\cdot\lfloor W/2\rfloor-1$ 個），$p_{12}$ を1つ減らして空き地をなくしてしまい，$p_{12}$ をその上に詰めるという操作をとる必要はない．ゆえに，この場合も最適なパッキングである．

このアルゴリズムでは，step 1で残った，たかだか $\lfloor W/2\rfloor-1$ 個のピースの詰め直しと，step 2で残った，たかだか $2\cdot\lfloor W/2\rfloor-1$ 個のピースの詰め直しがある（これは，前もって，ピースの数からレベルの数を計算することによって，避けることができる）だけで，それ以外に詰め直しは起こらない．したがって，$O(n)$ 回のBLパッキングで済む．　□

### 4.2 ピースの種類が3×2の部分矩形である場合

［定理4］　ピースの種類を3×2の部分矩形に限定する．このとき，ピースをアルゴリズム4で詰めると，近似度は次のようになる．

$$H_A \leqq H_{\mathrm{opt}}+1$$

また，このアルゴリズムは $O(n)$ 回のBLパッキングで行なうことができる．ここで，$H_A$ は近似解法でのパッキングの高さ，$H_{\mathrm{opt}}$ は最適なパッキングの高さである．ただし，$W$ はビンの幅であり，$n$ はピース数である．　□

**アルゴリズム4**

メイン・ルーチン

step 1　高さ1のピース（$p_{31}$，$p_{21}$）を縦に2つ並べて，高さ2のピースとする．ただし，$n_{31}$，$n_{21}$ が奇数となり，ピースが1つ余る場合は，余ったピースは step 7で詰めるので，そのまま残しておく．

step 2　if $W$＝偶数　then
手続き even を行なう．

step 3　if $W$＝奇数　then
手続き odd を行なう．

step 4　if （$W$ が偶数のとき，$W\geqq6$）or
（$W$ が奇数のとき，$W\geqq9$）then
手続き exchange を行なう．

step 5　タイトに詰っていないレベルで，
手続き repack を行なう．

step 6　$p_{12}$ をBLで詰める．

step 7　残ったピース（たかだか，$p_{31}$ と $p_{21}$ が1つずつ）をBLで詰める．

step 8　$p_{11}$ をBLで詰める．

手続き even

step 1　$p_{22}$ をBLで詰める．

手続き odd

step 1　$p_{32}$ を右端に1列に詰める．

step 2　$p_{22}$ をBLで詰める．

手続き exchange

step 0　この手続きにおいて交換される $p_{32}$ は，$W$ が偶数のときはフリーの $p_{32}$ であり，$W$ が奇数のときは右端に1列に詰められた $p_{32}$ である．このピースを $p_{ex}$ とする．$W$ が偶数のときは，交換することができるフリーの $p_{32}$ がなくなる（2個未満になる）まで，以下の操作を行なう．また，$W$ が奇数のときは，交換するために右端の一番上の $p_{32}$ を取り除くことによって，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ（$H_t$）未満になるならば，交換することを行なわず，この手続きは終了する．

step1　同じレベルの $p_{22}$ 3個を $p_{ex}$ 2個と交換し，交換された $p_{22}$ 3個をBLで詰める．

手続き repack

step1　残った $p_{32}$ が1個以下ある場合は，$p_{22}$，$p_{32}$ の順にBLで詰める．

step2　残った $p_{32}$ が2個以上ある場合は，$p_{32}$，$p_{22}$ の順にBLで詰める．

定理4の証明は長くなるので，この証明においては，$W$＝奇数（手続き odd ）の場合についてのみ証明し，残りは省略する．$W$＝偶数（手続き even）の場合はより簡単であり，同様の考え方に基づいて証明できる．

（略証）　この場合には$W$が奇数であるので，タイトに詰めるためには各レベルに $p_{32}$ が必要である．そのために手続き odd の step1 で $p_{32}$ を右端に1列に詰める．$p_{32}$ の左には，幅$W'$（$W'$：偶数）のビンがあることになる．手続き odd の step2 では，$p_{22}$ を詰める．ここで，$p_{32}$ がタイトな $p_{22}$ の最高レベル以上まで詰っているならば，$p_{22}$を詰めた後は幅$W'$の一番上のレベルを除いてタイトである．

次に，手続き exchange（step4） を行ない，できる限り，かつタイトを崩さずに，$p_{22}$ を $p_{32}$ と交換する．$p_{22}$ と $p_{32}$ とを交換する方法は，$p_{22}$ 3個と $p_{32}$ 2個との交換のみが考えられる．よって，手続き exchange 終了後も，幅$W'$の一番上のレベルを除いてタイトであり，$p_{32}$がで きる限り $p_{22}$ と交換されている．ただし，この操作は交換するために右端の一番上の $p_{32}$ を取り除くことによって，その時点でタイトに詰っている最高レベルの高さ未満になるまで行なう．

ここで，$W \geqq 9$ であり，$p_{22}$ が十分あり $p_{32}$ が手続き exchangeでできる限り交換されているならば，手続き repack で残った $p_{32}$ は1個以下である．$p_{32}$が1個以下ならば，手続き repack で一番上のタイトではないレベルの続きに $p_{32}$ をBLで詰めればよい．この場合は，一般には，一番上の高さ2のレベルを除いてタイトとなるが，上の2つのレベルがタイトとならない場合がある．しかし，この場合でも面積の下限から考えて，この解法によるパッキングの高さは最適解に比べてたかだか1しか悪くならないので近似度は保たれる．その後，step6 で $p_{12}$ がBLで詰められ，step7 で残っている $p_{31}$，$p_{21}$ がBLで詰められる．この場合も，一般に，一番上の高さ2のレベルを除いてタイトである．ただし，step7 で $p_{31}$ を詰めるとき，高さ3のタイトでない部分を作る可能性がある．しかし，この場合も面積の下限から考えて，この解法によるパッキングの高さは最適解に比べてたかだか1つしか悪くならないので近似度は保たれる．

ここで，手続き repack で残った $p_{32}$ が2個以上ある場合を考える．まず，$W < 9$ の場合はたとえすべてのピースの高さが1であると考えても，$p_{3*}$ と $p_{2*}$ の交換ができないので，明らかに近似度は保たれる．次に，もうこれ以上 $p_{32}$ を $p_{22}$ と交換できない場合は，上のタイトでないレベルには $p_{22}$ は2個以下である．この場合も，たとえすべてのピースの高さが1であると考えても，たかだか1回を除いて $p_{3*}$ と $p_{2*}$ の交換はできないので，手続き repack で $p_{32}$，$p_{22}$ を順にBLで詰めればよい．また，$p_{21}$ 2個と $p_{31}$，幅1の空き地との交換がたかだか2回考えられるが，これを行なっても面積の下限から考えて近似度は保たれる．その後，step6 で $p_{12}$ がBLで詰められ，step7で残っている $p_{31}$，$p_{21}$ がBLで詰められるが，これらは他のピースと交換することができないので，前述の場合と同様に近似度は保たれる．

最後に，$p_{32}$ がタイトな $p_{22}$ の最高レベル以上まで詰っていない場合は，手続き odd の step2 で $p_{32}$ の上に $p_{22}$ を詰めることになり，右端に幅1の空き地ができる．しかし，$p_{32}$ はないので空き地をなくすことはできない．この場合，step4 の手続き exchangeは行なわれないで，step5 の手続き repack へ進む．手続き repack でも，$p_{22}$ しかないので前と同じ様に詰められる．step6 で $p_{12}$ がBLでまず右端の幅1の空き地に詰められ，step7 で残っている $p_{31}$，$p_{21}$ がBLで詰められる．この場合，$p_{31}$ と $p_{21}$，幅1の空き地を交換して空き地を減らすことができるが，パッキングの高さは最適解に比べてたかだか1しか悪くならないので近似度は保たれる．

以上のことから，$W$＝奇数の場合にアルゴリズム4で詰めると，近似度は $H_A \leqq H_{\mathrm{opt}}+1$ となる．

また，この解法は，1つのピースをたかだか定数回しか詰め直すことを行なわないので，$O(n)$ 回の BL パッキングで行なうことができる．　□

## 5. むすび

本論文では，ビンの幅，ピースの幅，高さを整数値に制約した2次元ビン・パッキング問題を取り上げ，解法を考察した．この制約のもとで，ピースの種類を $w \times h$ の部分矩形に限定することによって，線形時間で最適解が得られるかどうかについて考察し，少なくともピースの種類が 4×1，1×4，2×2 の部分矩形

である場合までは，線形時間で最適解が得られることを，また3×2の部分矩形である場合は，線形時間で最悪の場合でもたかだか高さが1しか悪くならない近似解が得られることを明らかにした．

## 文　献


(1) M. R. Garey and D. S. Johnson : "Approximation Algorithms for Bin Packing Problems : A Survey", Analysis and Design of Algorithms in Combinatorial Optimization (edited by G. Ausiello and M. Lucertini), Springer-Verlag, pp.147-172.

(2) D. S. Johnson, A. Demers, J. D. Ullman, M. R. Garey and R. L. Graham: "Worst-Case Performance Bounds for Simple One-Dimensional Packing Algorithms", SIAM J. Comput., 3, 4, pp.299-325 (Dec. 1974).

(3) B. S. Baker, E. G. Coffman Jr. and R. L. Rivest : "Orthogonal Packings in Two Dimensions", SIAM J. Comput., 8, 4, pp.846-855 (Nov. 1980).

(4) E. G. Coffman Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson and R. E. Tarjan : "Performance Bounds for Level Oriented Two-Dimensional Packing Algorithms", SIAM J. Comput., 9, 4, pp.808-826 (Nov. 1980).

(5) D. K. D. B. Sleator : "A 2.5 Times Optimal Algorithm for Packing in Two Dimensions", Inf. Proc. Letters, 10, 1, pp.37-40 (1980).

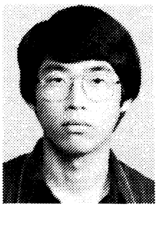
(6) K. R. Baker : "Introduction to Sequencing and Scheduling", John Wiley & Sons. Inc.

(7) M. R. Garey and D. S. Johnson : "Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness", W. H. Freeman and Company.

(8) 榎原，中野，中西："ピースに制約を加えた2次元ビン・パッキング問題"，信学技報，CAS84-82 (1984).

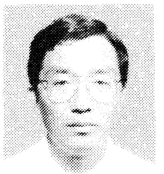
(9) 榎原博之："2次元ビン・パッキング問題に関する研究"，修士論文，大阪大学(1984).


（昭和60年6月26日受付，9月30日再受付）



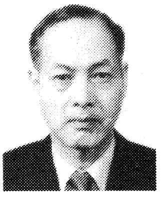
**榎原　博之**

昭57阪大・工・通信卒．昭59同大学院修士課程了．現在，同大学院博士課程在学中．計算幾何学，組合せ最適化問題等の研究に従事．情報処理学会会員．



**中野　秀男**

昭45阪大・工・通信卒．昭50同大学院博士（通信）課程了．同年阪大通信工学科助手となり現在に至る．離散最適化問題の近似解法の評価，ソフトウェア工学等の研究に従事．工博．情報処理学会，IEEE，ACM各会員．



**中西　義郎**

昭27阪大・工・通信卒．昭37阪大助教授．工博．昭47年同教授となり現在に至る．システム工学，ソフトウェア工学に関心を持ち，組合せ最適化問題，システム故障診断，プログラムテスト等の研究に従事．IEEE会員．