

## 一般放物線の求積に関するカヴァリエリの命題の証明

深田 陽司\*

### 要 旨

本論では、17世紀初頭に活躍したB. カヴァリエリの不可分量の概念を用いて、一般放物線 ( $y = x^n$ で $n$ が任意の自然数の曲線) の下の面積を求める。まず、不可分量の概念と不可分法による楕円と球の求積を述べる。また、不可分量と密接な関係にあるアルキメデスの発見法を述べる。さらに、低次放物線 ( $y = x^n$ で $n$ が1桁の自然数の曲線) の下の求積に関するカヴァリエリの業績を述べる。次に、不可分量の概念を目に見える形で用いて、低次放物線の下での面積を求める。さらに、一般放物線の下での面積を与える定理を、ほぼ同時代の研究者であるB. パスカルが開発した数学的帰納法を用いて証明する。これは、カヴァリエリが推測するだけに終わった命題である。

## Proof of Cavarieli's Proposition on the Quadrature of the General Parabola

Youji FUKADA

### Abstract

In this paper, the quadrature of a general parabola  $y = x^n$  is described, based on the concept of indivisibles developed by B. Cavarieli in the early 17th century. First, the area of an ellipse and the volume of a sphere are calculated using indivisibles. Next, the Archimedean heuristic having relationships with indivisibles is described. Second, Cavarieli's researches on the areas of parabolas having low degrees are investigated, and formulas of these areas are derived faithfully based on the concept of indivisibles. Last, Cavarieli's proposition on the area of a general parabola is proven using the mathematical induction developed by B. Pascal in the contemporary era.

---

\*関西大学総合情報学部

## 1 まえがき

現代では求積には、I. ニュートン (1642-1727) や G. ライプニッツ (1646-1716) の業績である積分を使う。積分には無限や極限が潜んでいるにも拘わらず、意識することなく使える。しかし積分が考案されるまでには、長い間にわたる多くの研究者の貢献が必要であった<sup>[1]-[4]</sup>。

求積法の追求は、ギリシャ時代にさかのぼる。主な貢献者はユークリッド (B.C. 330?-275?) とアルキメデス (B.C. 287?-212) である。紀元前6世紀に始まる論証数学を、ユークリッドは“原論”として公理主義的にまとめた<sup>[5]</sup>。その第12巻では、2つの円の面積は直径の2乗に比例する、2つの球の体積は直径の3乗に比例する、などの命題が証明されている。このように、ユークリッドは比例関係として、面積や体積に間接的に言及している。

一方、アルキメデスは直接的に言及している。つまり、円の面積や球の体積などの公式を導出している。また、対象をさまざまな図形や立体 (放物線や円錐状体など) に拡大している<sup>[6]</sup>。さらに重要な貢献は、これらの命題の結論の見つけ方である。アルキメデスは、提案した命題を背理法で数学的に厳密に証明しているが、背理法を使うには結論が必要なのである。

ところでギリシャ時代は、プラトン (B.C. 427-347) やアリストテレス (B.C. 384-322) の形相主義が支配的であった。形など限定されたものが重要であって、限定されない無限は訳が分からないものとして忌避されていたのである<sup>[6]</sup>。しかし、曲がった境界を持つ物体に対しては、無限や極限の概念が必要になる。ここで、アルキメデスは上に述べたように命題の証明自体は厳密に行い、結論の発見のためにのみ無限や極限の手法を用いたのである<sup>[6], [7]</sup>。

アルキメデスによる結論の発見法は主に2つある。1つは無限分割である。例えば円の場合、中心を頂点とする無数の2等辺三角形に分割し展開すると、円周を底辺とし半径を高さとする三角形に近づく。もう1つは、槌子の原理を利用する。平面図形は幅のない線分の集合とみなし、立体は厚みのない面分の集合とみなして、既知の図形や立体との釣り合いをとる。

その後科学的には停滞時代が続いたが、ルネッサンス以降、J.ケプラー (1571-1630) は、アルキメデスの1つ目の発見法と同じ考えによって、楕円の焦点を頂点とする扇形の面積を算出した。B.カヴァリエリ (1598-1647) は、2つ目の発見法と類似の考えによって、一般放物線 ( $y = x^n$  で  $n$  が任意の自然数の曲線) の下の面積を研究した (ただし、彼らの研究に関するアルキメデスの著書<sup>[7]</sup> は、当時はまだ発見されていなかった)。

本論では、積分への一里塚といえるカヴァリエリが提案した不可分量に焦点をあてる。2章ではまず、不可分量の概念とこの概念による楕円と球の求積を述べ、次に不可分量と密接な関係にあるアルキメデスの発見法を述べる。さらに、低次放物線 ( $y = x^n$  で  $n$  が1桁の自然数) の下の求積に関するカヴァリエリの業績を述べる。3章では、不可分量の概念を目に見える形で用いて、まず低次放物線の下での面積を求める。つぎに、一般放物線の下での面積を与える定理 (カヴァリエリが推測するだけに終わった命題<sup>[1], [2], [6]</sup>) を、当時既知であった事実のみを用いて証明する。

## 2 不可分法による求積

本章では、カヴァリエリが開発した不可分法による求積を述べる。まず、不可分量の概念と求積の根拠であるカヴァリエリの原理を述べる。次に不可分量のルーツともいえる、命題の結論を見つけるアルキメデスの発見法について述べる。最後に、低次放物線のうち直線と放物線の下の面積を、不可分量を用いてカヴァリエリがどのように算出したかを述べる。

### 2.1 不可分量の概念

不可分量は、1635年に出版されたカヴァリエリの著書“*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*”（ある新しい方法で推進された不可分量による連続体の幾何学）<sup>[3]</sup>（本論では以下において、“不可分量の幾何学”と略する）において明示的に導入された概念である<sup>[1]-[4]</sup>。次節で述べるように、アルキメデスはすでに暗黙的にこの概念を使用し、求積に関する数多くの命題の結論を発見していた<sup>[6], [7], [8]</sup>。

不可分量について述べる前に、カヴァリエリが大きな影響を受けた2人の科学者について触れておく。G.ガリレイ（1564-1642）は、アルキメデスの静力学を基に、微小時間における物体の動きを考察して動力学を展開していた。カヴァリエリはガリレイの弟子であり、微分に通じる極限の考えを知り得たはずである。一方ケプラーは、惑星の軌道が楕円であること（第一法則）を発見し、楕円の片方の焦点と楕円周とで構成される偏形扇形の面積を、扇形を多数のくさび形に分割することによって近似計算し、面積速度が一定であること（第二法則）を発見した。ケプラーの仕事は、同じ物理学者であるガリレイを通して、カヴァリエリにも伝えられていたであろう。ケプラーは天文学者として有名であるが、上記扇形の面積の他にぶどう酒樽の容積に関する著作を出版するなど、近代求積法の先駆者でもあった<sup>[1], [4]</sup>。

先行する2人の影響を受けながらカヴァリエリは求積法を追求し、現代ではカヴァリエリの原理として知られている命題を、“不可分量の幾何学”の第7巻に定理1命題1として<sup>[3], [4]</sup>、以下のように述べている。ただし、本書はラテン語で書かれていて筆者には解読不可能なので、文献[3]と[2]の記述を引用している。前者には平面図形に関する記述があり、後者には立体図形に関する記述がある。なおこの原理を、Theorem（定理）またはPostulate（公準とか要請）と呼んでおり<sup>[9]</sup>、証明された定理なのか要請された公準なのかは不明である。

#### カヴァリエリの原理

もし二つの平面図形が等しい高さを持ち、底辺に平行な線によって切りとられ、その切り口が底辺から等しい距離でつねに同じ比にあるならば、平面図形もまたこの比にある<sup>[3]</sup>。

二つの立体が互いに等しい高さをもち、底面に平行で底面から等しい距離にある平面による切断面が常に与えられた比にあるとき、それらの立体の体積もまた同じ比にある<sup>[2]</sup>。

カヴァリエリの原理を、図1を用いて説明する。面積については同図(a)に示すように、高さの等しい2つの図形があり、底辺に平行な切断線によって切り取られた線分の比 $l_1/l_2$ が常に一定の $a$ であるとき、2つの図形の面積比も $a$ であると主張する。体積については同図(b)に示すように、高さの等しい2つの立体があり、底面に平行な切断面によって切り取られた面分の比 $s_1/s_2$ が常に一定の $a$ であるとき、2つの立体の体積比も $a$ であると主張する。本論では、図形(立体)を切断する線(面)の方向を決める底辺(底面)を基準線(基準面)と呼ぶ。

カヴァリエリは、これらの線分や面分をまとめて不可分量と称している。そして、不可分量の線分や面分自体は幅や厚みを持たないが、ユークリッドの線や面と異なり集まれば幅や厚みが生じる、つまり面積や体積は不可分量から成っているとカヴァリエリは考えたのである。現代でいえば、ディラックの $\delta$ 関数と同類といえる。本論では以下において、線分を線素と呼び面分を面素と呼ぶ。線素(面素)は、基準線(基準面)に平行な線(面)によって切り取られた図形(立体)の線分(面分)である。

カヴァリエリの原理によれば、一方の面積や体積が既知であれば他方のそれが容易に求められることになる。このことを2つの具体例によって示す。

まず楕円の面積について述べる<sup>[2]</sup>。図2に示すように、原点 $O$ に中心を置いて楕円(長径が $2a$ で短径が $2b$ )の長径と、円(直径が $2a$ )の直径を $x$ 軸上で一致させる。すると2つの図形が、 $y$ 軸を基準線として、基準線に平行な任意の直線によって切り取られる2つの線分 $CD$ と $AB$ の比が、常に $b/a$ であることは容易に確認できる。すると円の面積は $\pi a^2$ だから(“円の測定”命題1の系として容易に得られる)、楕円の面積はその $b/a$ 倍である $\pi ab$ と決定できる。

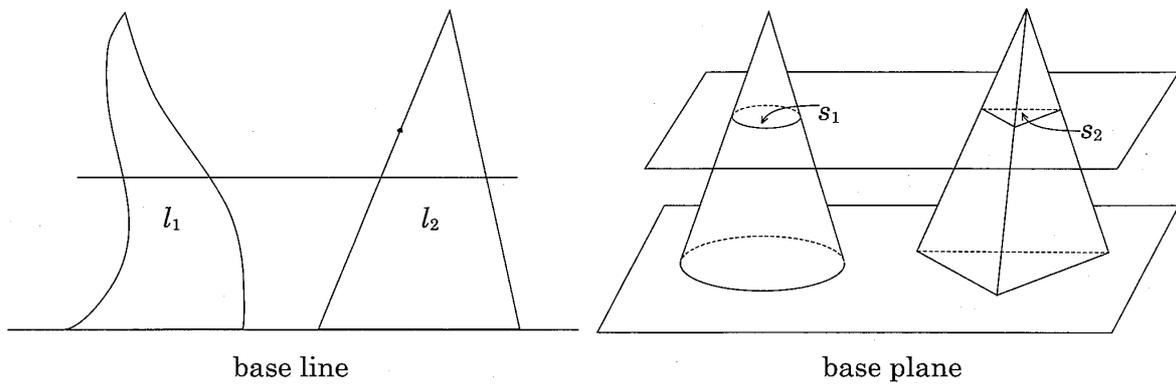
次に球の体積について述べる<sup>[1]</sup>。半径が $r$ の球とその外接円柱を、高さが $r$ の水平面で真半分に切断した立体を考える。さらに、半円柱の底面を底面とし高さが $r$ の直円錐も、半円柱の中に存在しているとする。これらの立体を、球の中心 $O$ を通る垂直面によって切断したときの断面図を図3に示す。底面を基準面として、これら3つの立体を基準面に平行な任意の水平面で切断したときの、断面上の交点をそれぞれ $B$ 、 $C$ および $D$ とする。さらに、中心 $O$ からの垂直線と切断面との交点を $E$ とし、底面の直径の断面上の一端を $A$ とすると、線分 $OA$ は直円錐の母線である。

このとき切断面上の、円柱と球とで挟まれた部分(線分 $BC$ を軸 $OE$ まわりに回転してできるドーナツ状の面素)の面積は、線分 $BE$ と $CO$ が半径 $r$ であり、三角形 $ODE$ が2等辺三角形であることから、ピタゴラスの3平方の定理(“原論”命題I・47)を用いて展開すると、

$$\pi (BE^2 - CE^2) = \pi (BE^2 - (CO^2 - OE^2)) = \pi OE^2 = \pi DE^2.$$

したがって、お椀と円錐の面素の大きさ(面積)が常に同じなので、外接半円柱から半球をくりぬいたお椀の体積は、直円錐の体積と同じである。つまり、半円柱 - 半球 = お椀 = 円錐なので、同じ底面をもち同じ高さの円錐は円柱の $1/3$ (“原論”命題XII・10)だから、

$$\text{半球} = \text{半円柱} - \text{円錐} = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad \text{より} \quad \text{球} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



(a) 線素の比

(b) 面素の比

図1 カヴァリエリの原理

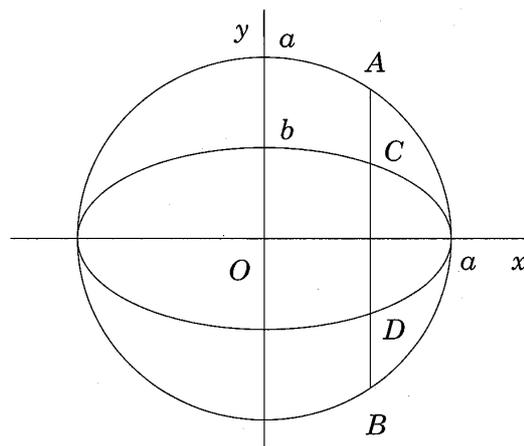


図2 楕円の面積

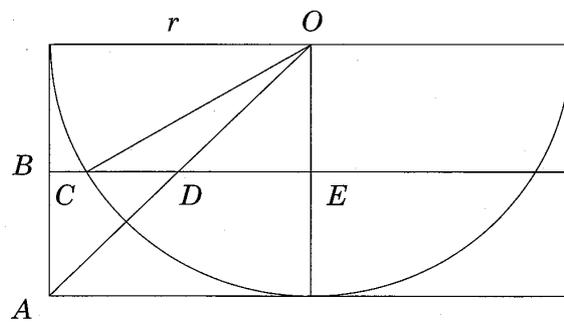


図3 球の体積

## 2.2 アルキメデスの求積法

### 2.2.1 幾何学的方法

アルキメデスは多大な成果を多くの著書に残している。ユークリッドは間接的に2つの図形の比例関係を述べているにすぎないが、アルキメデスは図形の求め方を直接的に言及している<sup>[6]</sup>：すべての円は、その半径と周を2辺とする直角三角形に等しい（“円の測定”命題1）、すべての球の表面積は、その大円の4倍である（“球と円柱について”命題I・33）、すべての球は、その大円を底面とし半径を高さとする円錐の4倍に等しい（同著命題I・34）、などである。

アルキメデスは、これらの命題を背理法で証明している。そのためには、結論が事実として証明に先立って発見されていなければならない。“円の測定”命題1に関しては、いまのところアルキメデスの言及は見当たらないが、“方法”命題2（“球と円柱について”命題I・34とその系を合わせた命題）の証明のあとに、以下のような記述がある<sup>[7]</sup>。

「すべての球は、底面として（球の）大円をもち、高さとして球の半径を持つ円錐の4倍であることが見出されたあとで、すべての球の表面積は、球の大円の4倍であるという考えが導けた。なぜなら、すべての円は、底辺としてその円周（に等しい線分）をもち、高さとして円の半径に等しい線分をもつ三角形に等しいのであり、また、すべての球は、底面としてその球の表面（に等しい平面）をもち、高さとして球の半径に等しい線分をもつ円錐に等しいのであるという想定が成り立つからである。」

この記述から、アルキメデスは図4に示すように、円を多数の扇形に分割し展開した極限の姿として、円周と半径を2辺にもつ直角三角形を発見し、同様に球の中心を頂点とする多数の円錐で球を分割し展開した極限の姿として、球の表面を底面とし半径を高さとする円錐を発見したことが分かる（“球と円柱について”命題I・34を命題I・33を利用して言い換えると、その大円の4倍である球の表面を底面とし、半径を高さとする円錐に等しい）。

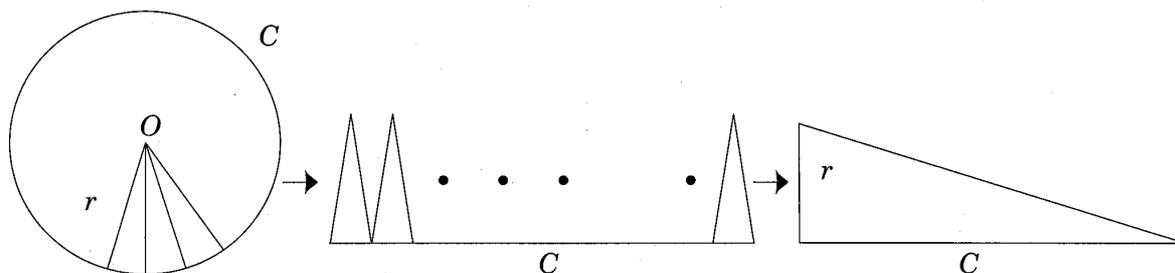


図4 発見法1

ケプラーの求積法は、図4に示した発見法と同じであり、積分に通じる方法である。ただし“方法”は、1906年にイスタンブールで発見された書物なので<sup>[7]</sup>、ケプラーは目にしていない。同書は、他の著書で背理法を用いて証明してきた多くの命題における結論を、どのように発見したかを主に述べた著作である。なお、楕円の面積の公式は、“円錐状体と球状体について”命題4であり、やはり背理法で証明されているが<sup>[7], [10]</sup>、結論の発見法は明らかにされていない。

## 2.2.2 機械学的方法

もう1つの発見法は、槌子の原理を用いた機械学的（力学的）方法である。アルキメデスは、浮力の発見でも知られるように、物理学者でもあった。体積に関しては、球状体や円錐状体など様々な立体に対する機械学的発見法が“方法”に述べられているが<sup>[7]</sup>、面積については、唯一放物線の切片の求積命題（直線と放物線によって囲まれる任意の切片は、この切片と同じ底辺、等しい高さをもつ三角形の $4/3$ である）が、“放物線の求積”で扱われている<sup>[6]</sup>。

“放物線の求積”は24個の命題から成り、当該の命題を2通り（機械学的及び幾何学的）の方法で証明している。しかし機械学的証明は、命題17までの多数の命題から成っており、簡潔に述べることは容易ではない。そこで、アルキメデスの機械学的発見法がどのようなものであるかを容易に理解できる例として、ここでは放物線の下の方面積をとりあげる<sup>[10]</sup>。

図5(a)に示すように、2つの図形を考える。1つは、 $y = x^2$ と $x$ 軸と $x = a$ で囲まれた図形1である。2つ目は、 $y = \pm x/2$ と $x = a$ で囲まれた図形2である。ここでは、線素の質量は長さに比例する、従って図形の質量は面積に比例するとの仮定のもと、図形1の面積を求める。

$x$ 軸上の任意の点 $Q(x, 0)$ における垂直線と、 $y = \pm x/2$ との交点を $A$ および $B$ とし、放物線との交点を $C$ とする。すると、 $AB = x$ であり $CQ = x^2$ だから、原点 $O$ を支点とする槌子を考え、点 $P(-1, 0)$ の位置に線分 $CQ$ が、点 $Q$ の位置に線分 $AB$ が釣り下げられている状態で釣り合う。

ところで図形2は、点 $O$ を頂点とする2等辺三角形であり、重心 $G$ の座標値は $(2a/3, 0)$ である。従って、点 $Q$ の位置に線素 $AB$ が釣り下げられている状態を、 $x = 0 \sim a$ までの全体にわたって考えると、図形2は重心 $G$ の位置に釣り下げられていることになる。一方図形1は、点 $Q$ が任意の位置にあるにも拘わらず、線素は常に点 $P$ の位置に釣り下げられているので、図形1は点 $P$ の位置に釣り下げられた状態で、2つの図形は釣り合っていることになる（図5(b)参照）。ここで図形2の面積は $a^2/2$ だから、図形1の面積 $S_2$ は以下のように容易に算出できる。

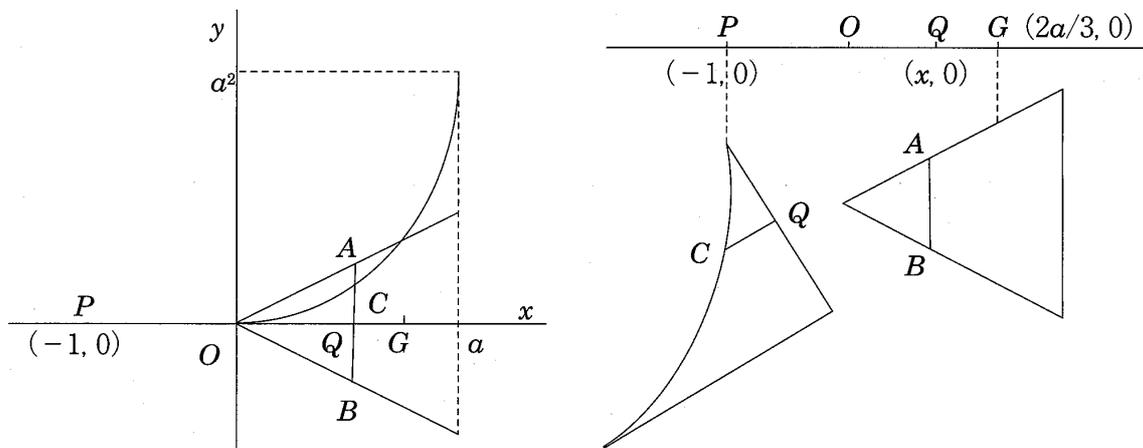
$$S_2 \cdot OP = \frac{1}{2} a^2 \cdot OG \quad \text{より} \quad S_2 = \frac{1}{3} a^3.$$

次に、体積算出の例として回転放物体を取りあげる。アルキメデスは背理法によって、回転放物体の体積が外接円柱の半分であることを証明しているが<sup>[6]</sup>、ここでは、“方法”命題4に記述されている結論の発見法を述べる<sup>[6], [7]</sup>。

回転放物体を $AOB$ とし、外接円柱を $EFBA$ として、回転軸 $OH$ を通る鉛直面による断面図を図6(a)に示す。円 $AB$ の中心を $H$ とし、回転軸 $HO$ の延長上に $OP = OH$ なる点 $P$ をとる。回転軸上の任意の位置 $Q$ において軸に垂直な面で2つの立体を切断し、切断面を $ST$ および $CD$ とする。すると面素 $ST$ と $CD$ はともに円であり、曲線 $AOB$ は放物線だから、

$$SQ^2 : CQ^2 = SQ^2 : AH^2 = OQ : OH \quad \text{より} \quad CQ^2 \cdot OQ = SQ^2 \cdot OH = SQ^2 \cdot OP.$$

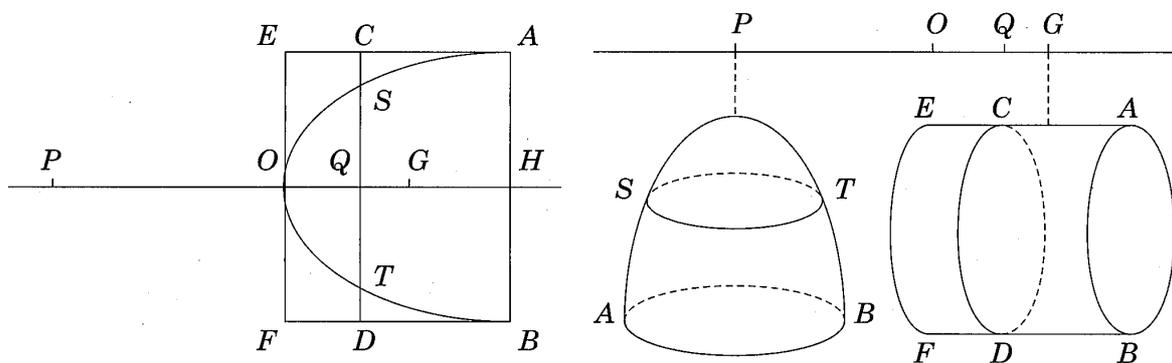
従って、円 $CD$ を点 $Q$ に釣り下げ円 $ST$ を点 $P$ に釣り下げると、釣り合い状態となっている。点 $O$ から $H$ までの全体を考えると、円柱がその重心である $OH$ の中点 $G$ に釣り下がり、回転放物体は点 $P$ に釣り下っている状態で、釣り合っていることになる(図6(b)参照)。すると線分 $OP$ は $OG$ の2倍だから、回転放物体の体積は円柱の半分であることが容易に導ける。



(a) 放物線と三角形

(b) 釣り合い

図5 発見法2 (放物線)



(a) 回転放物体と円柱

(b) 釣り合い

図6 発見法2 (回転放物体)

2.3 カヴァリエリによる低次放物線の下面積

本節では、“不可分量の幾何学” 第2巻にある、曲線 $y = x^n (n = 1, 2)$  の下の求積を述べる<sup>[1]</sup>。ここで本論では、 $n = 1 \sim 9$ の曲線 $y = x^n$ を低次放物線と呼び、 $n$ が任意の自然数のとき一般放物線と呼ぶ。 $n$ が2の場合は、単に放物線とも呼ぶ。なお以下の命題における ( ) の記述は、筆者の解釈による加筆である。

“不可分量の幾何学” 命題19

平行四辺形の線分の全体 (面積) は、三角形の線分全体 (面積) の2倍である。

“不可分量の幾何学” 命題22の系

相似三角形において、面積は対応する辺の3乗に比例する。

“不可分量の幾何学” 命題24

平行四辺形の一辺に平行なすべての線分の面積 (線分の2乗) の合計は、その対角線によってつくられる三角形の同様な線分の面積 (線分の2乗) の合計の3倍である。

まず $n = 1$ の場合 (“不可分量の幾何学” 命題19) の証明を述べる。平行四辺形を対角線によって2つの三角形に分割すると、これらが合同でありその結果面積が等しいことはすでに分かっているが (“原論” 命題I・34)、カヴァリエリは以下のように証明する。

証明)

図7に示すように平行四辺形を $ABCD$ とする。底辺 $BC$ に平行な任意の高さの切断線による $\triangle DBC$ の線素を $EF$ とする。対角線 $BD$ 上に $BH = DE$ なる点 $H$ をとり、 $H$ を通り底辺 $BC$ に平行な直線と辺 $AB$ との交点を $G$ とすると、二角挟辺 (“原論” 命題I・26) より

$$\triangle DEF \equiv \triangle BHG \quad \text{だから} \quad EF = GH.$$

したがって基準線を底辺とするとき、 $\triangle DBC$ の1本の線素に対し、 $\triangle BDA$ の線素が1本対応している。同様に $\triangle BDA$ の切断線を考えると、 $\triangle BDA$ の線素1本に対して $\triangle DBC$ の線素が1本対応している。つまり2つの三角形において、底辺からの高さが等しい線素が1対1対応しており、しかもその長さが等しいから、

$$\sum_D^{BC} EF = \sum_B^{AD} GH.$$

ここで、 $\sum_D^{BC} EF$ は線素 $EF$ を点 $D$ から辺 $BC$ まで足し合わせることを表す。

ゆえに、2つの三角形の面積は等しい。

Q.E.D.

次に $n = 2$ の場合 (命題24) であるが、別表現された命題24'を以下に述べる<sup>[4]</sup>。ただし、その文言だけでは分かりにくいので、図8で使用した記号を、( ) の中に加筆して述べる。

命題24'

平行四辺形(ABCD)が与えられ、その中对角線(BD)が引かれたとする。このとき、平行四辺形のすべての平方( $\sum RV^2$ )は、その平行四辺形の側辺(AB)を共通の基準とした径(RT)の全体で作られる三角形のすべての平方( $\sum RT^2$ )の3倍に等しい。

証明)

平行四辺形ABCDの底辺に平行な任意の線分をRVとし、対角線BDとの交点をTとする。また、上辺ADと底辺BCの中点をそれぞれEとFとし、線分EFと線分RVおよび対角線BDとの交点を、それぞれSおよびMとする。

すると、線分RVが中点Mよりも上にあるとき、 $RT^2 + TV^2 = (RS + ST)^2 + (RS - ST)^2 = 2RS^2 + 2ST^2$ 。線分RVが中点Mよりも下にあるときは、この式における左辺のRTとTVを交換した式になるので、この式は線分RVがどの高さにあっても成り立つ。そこで基準線を底辺とし、平行四辺形の上辺から底辺までの線素に対して上式を集めると、

$$\sum_{AD}^B RT^2 + \sum_D^{BC} TV^2 = 2 \sum_{AE}^{BF} RS^2 + 2 \sum_{ED}^{BF} ST^2 = \frac{1}{2} \sum_{AD}^{BC} RV^2 + 4 \sum_{ED}^M ST^2 \tag{1}$$

ここで、 $\triangle BDA$ と $\triangle DBC$ の線素が1対1に対応しその長さが等しいから、式(1)の左辺における第1項と第2項は等しい。また、 $\triangle MDE \sim \triangle BDA$ であり対応する辺の大きさは半分だから、命題22の系(3章で述べる補助定理2において、 $n=2$ の場合の特定のケース)より、

$$\sum_{ED}^M ST^2 = \frac{1}{8} \sum_{AD}^B RT^2$$

したがって、式(1)は以下のように変形される。

$$\sum_{AD}^B RT^2 = \frac{1}{4} \sum_{AD}^{BC} RV^2 + \frac{1}{4} \sum_{AD}^B RT^2$$

$$\therefore \sum_{AD}^{BC} RV^2 = 3 \sum_{AD}^B RT^2$$

Q.E.D.

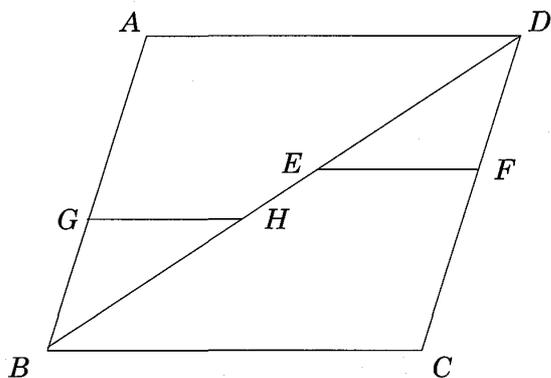


図7 線素の1次集合

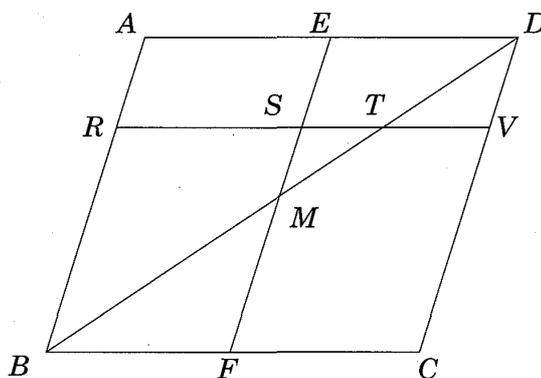


図8 線素の2次集合

### 3 一般放物線の下での求積

放物線の下での求積に関する命題のカヴァリエリによる証明は、2.3で述べたように線素の2乗式の展開であり、簡潔ではあるが必ずしも理解しやすいとはいえない。他の次数の場合も同様の手法を用いている<sup>[1]</sup>。本章では、忠実にカヴァリエリの原理に基づいて、つまりいかなる次数 $n$ においても、扱う線素を $n$ 乗の大きさにすることによって、2.1で述べたように面積がこれら $n$ 乗の大きさの線素の単なる集まりという、目に見える方法で一般放物線の下での面積を求める。まず低次放物線の下での求積命題の証明を与える。次に、カヴァリエリが予測するだけに終わった、一般放物線の下での面積を与える定理を、2つの補助定理と共に証明する。

#### 3.1 低次放物線の下での求積

本節では、低次放物線 $y = x^n (n = 1 \sim 4)$ の下での求積を述べる。以下の証明においては、特に断らない限り、求積は $x = 0 \sim a$ とする。つまり、 $x = 0 \sim a$ の各点における垂直な線素の集合を考える。

##### 3.1.1 $n = 1$ の場合

基本的には2.3で述べた証明と同じであるが、“不可分量の幾何学”命題19を以下のように変更し証明する。

##### 命題3.1

直線 $y = x$ の下での $x = 0 \sim a$ までの面積 $S_1$ は、 $a^2/2$ である。

(証明)

直線 $y = x$ と $x$ 軸と $x = a$ で囲まれる図形1の面積が $S_1$ であり、直線 $y = x$ と $y$ 軸と $y = a$ で囲まれる図形2の面積と等しいことは、以下のように容易に確認できる。

図9に示すように、 $x$ 軸上の任意の点 $A(x, 0)$ における図形1の線素 $AB$ の長さは $x$ である。一方、点 $A$ と1対1に対応する点 $C(a - x, a)$ における図形2の線素 $CD$ の長さは、直線 $y = x$ から $y = a$ までの線素の長さだから、 $a - (a - x) = x$ である(直線の変数 $x$ に点 $C$ の $x$ 座標である $a - x$ を代入すればよい)。従って、2つの図形において対応する線素の長さは等しく、その結果面積も等しい。ゆえに、図形1の面積は一辺が $a$ の正方形の半分であり、

$$S_1 = \frac{1}{2} a^2.$$

Q.E.D.

##### 3.1.2 $n = 2$ の場合

2.3で述べた“不可分量の幾何学”命題24を、現代風表現の以下の命題に変更し、2通りの方法で証明する。

## 命題3.2

放物線  $y = x^2$  の下の  $x = 0 \sim a$  までの面積  $S_2$  は、 $a^3/3$  である。

## 証明1)

命題3.2における  $S_2$  は、放物線  $y = x^2$  (曲線1) と  $x$  軸と  $x = a$  で囲まれる図形1の面積である。このとき、放物線  $y = a^2 - (a-x)^2 = 2ax - x^2$  (曲線2) と  $y$  軸と  $y = a^2$  で囲まれる図形2の面積が  $S_2$  であることは、命題3.1の証明と同様に容易に確認できる。

すると、曲線2から曲線1を引いた曲線3

$$y = 2ax - 2x^2 = -2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2$$

の下の面積は、(図形3を構成する線素の下端を  $x$  軸上におろすと、線素の上端が曲線3になるから) 曲線2と曲線1で囲まれる図形3の面積であり、 $a^3 - 2S_2$  である(図10の左図参照)。

一方、曲線3は  $x = a/2$  に関して対称だから、曲線3を2倍した曲線4

$$y = -4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

の下の面積 ( $x = 0 \sim a/2$ ) を  $T$  とおくと、曲線3の下の面積は  $T$  に等しい。

$$\therefore a^3 - 2S_2 = T. \quad (2)$$

ところで、曲線2と4はそれぞれ、 $x = a - \sqrt{a^2 - y}$  と  $x = (a - \sqrt{a^2 - y})/2$  と表されるから、基準線を  $x$  軸とし図形が  $y = 0 \sim a^2$  までの水平の線素の集まりと考えると、曲線2より左の図形の面積は、曲線4より左の図形の面積の2倍である(図10の右図参照)。ここで、前者は図形2だから面積は  $S_2$  であり、後者は  $x = 0 \sim a/2$  までの長方形から曲線4の下の面積  $T$  を引いた値になるから、

$$S_2 = 2\left(\frac{1}{2}a^3 - T\right) = a^3 - 2T. \quad (3)$$

ゆえに、式(2)と(3)より

$$S_2 = \frac{1}{3}a^3.$$

Q.E.D.

## 証明2)

証明1で定義した曲線3の半分の高さの曲線  $y = ax - x^2 = -(x - a/2)^2 + a^2/4$  (曲線4) と曲線  $y = (x - a/2)^2$  (曲線5) を考える。

曲線4の下の面積は、証明1の途中結果より  $(a^3 - 2S_2)/2$  である(または、 $y = x$  の下の面積  $S_1$  は  $a^2/2$  とすでに得られているから、 $aS_1 - S_2 = a^3/2 - S_2$  と考えてもよい)。次に、曲線5の下の面積を  $T$  とすると、曲線4と曲線5を加えると  $y = a^2/4$  になる、つまり曲線4の下の面積と曲線5の下の面積を加えると、 $y = a^2/4$  の下の長方形の面積  $a^3/4$  になるから、

$$\frac{1}{2}(a^3 - 2S_2) + T = \frac{1}{4}a^3. \quad (4)$$

ところで曲線5は $x = a/2$ に関して対称だから、 $x = a/2 \sim a$ までの曲線5の下の面積は $T/2$ である。また、 $X = x - a/2$ と変数変換すると曲線5は $y = X^2$ とも表せるから（図11参照）、 $y = X^2$ の下の $X = 0 \sim a$ までの面積 $S_2$ と $X = 0 \sim a/2$ までの面積 $T/2$ との比は、次節で述べる補助定理2より、

$$\frac{S_2}{T/2} = \frac{a^3}{(a/2)^3} = 8 \quad \text{だから} \quad T = \frac{1}{4} S_2.$$

この結果を式(4)に代入して解くと、

$$S_2 = \frac{1}{3} a^3.$$

Q.E.D.

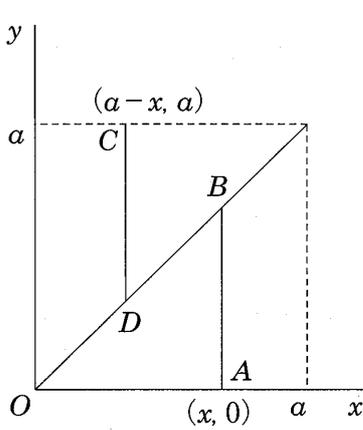


図9  $y = x$ の下の面積

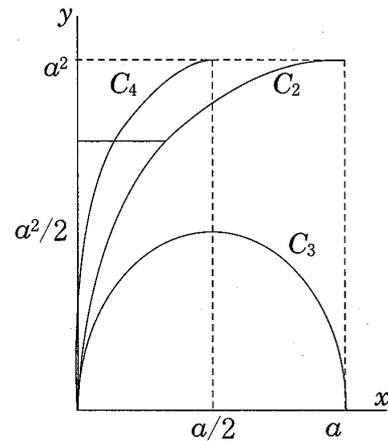
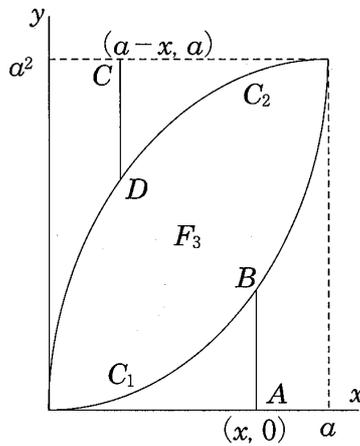


図10  $y = x^2$ の下の面積（証明1）

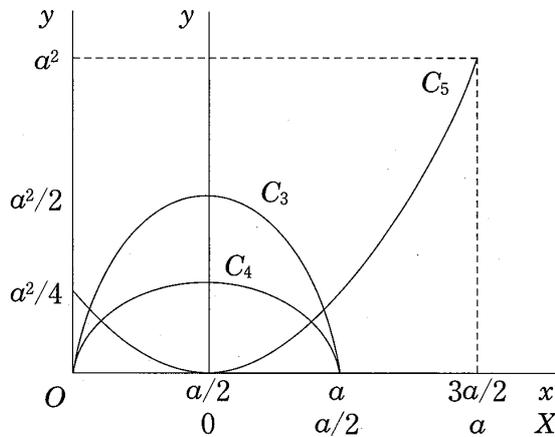


図11  $y = x^2$ の下の面積（証明2）

3.1.3  $n=3$ の場合

## 命題3.3

曲線  $y = x^3$  の下の  $x=0 \sim a$  までの面積  $S_3$  は、 $a^4/4$  である。

## 証明)

曲線 1 と曲線 2 を、それぞれ次の曲線  $y = x^3$  と  $y = a^3 - (a-x)^3 = 3a^2x - 3ax^2 + x^3$  とすると、曲線 1 と  $x$  軸と  $x = a$  で囲まれる図形 1 の面積が  $S_3$  であり、曲線 2 と  $y$  軸と  $y = a^3$  で囲まれる図形 2 の面積は図形 1 の面積  $S_3$  と等しい (命題 3.2 の証明 1 参照)。従って、曲線 2 から曲線 1 を引いた曲線  $y = 3a(ax - x^2)$  (曲線 3) の下の面積は、 $a^4 - 2S_3$  である。

一方、曲線 3 の下の面積は、直線  $y = x$  の下の面積  $S_1$  および放物線  $y = x^2$  の下の面積  $S_2$  が、それぞれ  $a^2/2$  および  $a^3/3$  と得られているから、 $a^4/2$  である (または、曲線  $y = 2(ax - x^2)$  の下の面積は、前項の証明 1 における図形 3 の面積  $a^3 - 2S_2$  であり、 $S_2 = a^3/3$  だから  $a^3/3$  である。よって曲線 3 の下の面積は、 $a^3/3$  の  $3a/2$  倍だから  $a^4/2$  である)。ゆえに、 $a^4 - 2S_3 = a^4/2$  より

$$S_3 = \frac{1}{4} a^4.$$

Q.E.D.

3.1.4  $n=4$ の場合

## 命題3.4

放物線  $y = x^4$  の下の  $x=0 \sim a$  までの面積  $S_4$  は、 $a^5/5$  である。

## 証明)

曲線 1 と曲線 2 を、それぞれ次の曲線  $y = x^4$  と  $y = a^4 - (a-x)^4 = 4a^3x - 6a^2x^2 + 4ax^3 - x^4$  とすると、曲線 1 と  $x$  軸と  $x = a$  で囲まれる図形 1 の面積が  $S_4$  であり、曲線 2 と  $y$  軸と  $y = a^4$  で囲まれる図形 2 の面積が  $S_4$  であることは、命題 3.2 の証明 1 における理由と同じである。

曲線 2 から曲線 1 を引いた、 $y = 4a^3x - 6a^2x^2 + 4ax^3 - 2x^4 = -2(x - a/2)^4 - 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4/8$  (曲線 3) の下の面積は、曲線 2 と曲線 1 で囲まれる図形 3 の面積であり、 $a^5 - 2S_4$  である。

ここで、曲線 3 の半分の高さの、 $y = -(x - a/2)^4 - 3/2a^2x^2 + 3/2a^3x + a^4/16$  を曲線 4 とし、曲線  $y = (x - a/2)^4$  (曲線 5) の下の面積を  $T$  とすると、曲線 4 と 5 を加えた曲線 6

$$y = -\frac{3}{2}a^2x^2 + \frac{3}{2}a^3x + \frac{1}{16}a^4 \quad (5)$$

の下の面積は、図形 3 の半分の面積と  $T$  との和だから、 $(a^5 - 2S_4)/2 + T$  である。

ところで曲線 6 の下の面積は、式(5)において放物線  $y = x^2$  の下の面積  $S_2$  と直線  $y = x$  の下の面積  $S_1$  が既に求められているから、これらの値を代入すると  $5a^5/16$  と得られる。よって、 $(a^5 - 2S_4)/2 + T = 5a^5/16$  だから、変形すると

$$S_4 = T + \frac{3}{16}a^5. \quad (6)$$

ここで、曲線5の下での  $x = a/2 \sim a$  までの面積を考えると（図11を前項と共用して参照、ただしy座標値は異なる）、曲線5は  $x = a/2$  に関して対称だから  $T/2$  である。一方、 $X = x - a/2$  と変数変換すると曲線5は  $y = X^4$  とも表せるから、次節で述べる補助定理2より、

$$\frac{S_4}{T/2} = \frac{a^5}{(a/2)^5} = 32 \quad \text{だから} \quad T = \frac{S_4}{16}.$$

これを式(6)に代入すると、

$$S_4 = \frac{1}{5} a^5.$$

Q.E.D.

### 3.2 補助定理の証明

二項定理における係数を三角形に並べたものをパスカルの三角形と呼ぶように、カヴァリエリとほぼ同時代のB.パスカル（1623-1662）は、確率の研究に際し二項展開を利用して、本節では、二項定理の係数に関する補助定理1と、2.3で述べた“不可分量の幾何学”命題22の系を一般化した補助定理2を提示し証明する。

#### 補助定理1

$${}_n C_0 + \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{3} + \dots + \frac{{}_n C_r}{r+1} + \dots + \frac{{}_n C_n}{n+1} = \sum_{r=0}^n \frac{{}_n C_r}{r+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

証明)

各項は、 $\frac{{}_n C_r}{r+1} = \frac{n!}{(r+1)r!(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(r+1)!(n-r)!} = \frac{{}_{n+1} C_{r+1}}{n+1}$  より、

$$\sum_{r=0}^n \frac{{}_n C_r}{r+1} = \frac{1}{n+1} ({}_{n+1} C_1 + {}_{n+1} C_2 + \dots + {}_{n+1} C_{n+1}).$$

ここで、 $(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + \dots + {}_n C_n x^n$  において  $x=1$  のとき、

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + \dots + {}_n C_n = 2^n.$$

よって、 ${}_{n+1} C_1 + {}_{n+1} C_2 + \dots + {}_{n+1} C_{n+1} = 2^{n+1} - {}_{n+1} C_0 = 2^{n+1} - 1.$

$$\therefore \sum_{r=0}^n \frac{{}_n C_r}{r+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Q.E.D.

#### 補助定理2

一般放物線  $y = x^n$  の下の、 $x = 0 \sim a$  までの面積を  $S_a$  とおき、 $x = 0 \sim b$  までの面積を  $S_b$  とおくと、 $S_a/S_b = a^{n+1}/b^{n+1}$  である。

証明)

一般性を失うことなく、 $b < a$  とする。一般放物線  $y = x^n$  を曲線1とし、曲線1を垂直方向

に  $b^n/a^n$  倍に圧縮した,  $y = (b/a)^n x^n$  (曲線2) を考える (図12の左図参照).  $x$  軸と  $x = a$  と, 曲線1および曲線2で囲まれた図形を, それぞれ図形1および図形2とすると, 図形1の面積が  $S_a$  である. 図形2の面積を  $S_c$ , 曲線2の上の  $y = b^n$  までの面積 ( $x = 0 \sim a$ ) を  $T_c$  とし, 曲線1の上の  $y = b^n$  までの面積 ( $x = 0 \sim b$ ) を  $T_b$  とすると (図12の右図参照),

$$S_b + T_b = b^{n+1}, \quad S_c + T_c = ab^n. \tag{7}$$

ここで曲線の独立変数を  $y$  とすると, 2つの曲線はそれぞれ  $x = \sqrt[n]{y}$  と  $x = a/b^n \sqrt[n]{y}$  と表されるから, 面積が  $T_c$  と  $T_b$  の2つの図形について, 基準線を  $x$  軸にとり水平方向の線素を考えると, 前者における任意の線素の長さ, 後者において対応する線素の長さの比は  $a/b$  である.

$$\therefore T_c = \frac{a}{b} T_b.$$

この関係を, 式(7)の第2式に代入して変形し, 第1式を用いると,

$$S_c = ab^n - \frac{a}{b} T_b = \frac{a}{b} (b^{n+1} - T_b) = \frac{a}{b} S_b. \tag{8}$$

次に, 図形1と図形2の面積である  $S_a$  と  $S_c$  について考える. 基準線を  $y$  軸にとると,  $x$  軸上の任意の点における線素の高さについて, 前者のそれは後者のその  $a^n/b^n$  倍だから,

$$S_a = \frac{a^n}{b^n} S_c. \tag{9}$$

すると, 式(8)と(9)より

$$\frac{S_a}{S_b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Q.E.D.

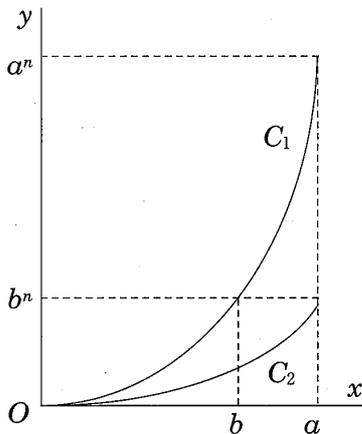


図12 一般放物線の下での面積比

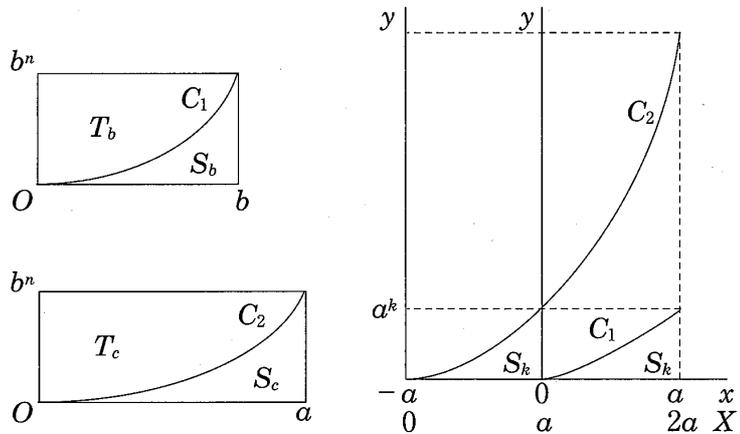


図13 一般放物線の下での面積

3.3 定理の証明

本節では、パスカルが確立したとされる数学的帰納法により<sup>[11]</sup>、以下の定理（カヴァリエリが推測するだけに終わった命題）を証明する。

定理

一般放物線  $y = x^n$  の下の、 $x = 0 \sim a$  までの面積を  $S_n$  とおくと、 $S_n = a^{n+1}/(n+1)$  である。

証明)

$n = 1$  のとき

命題3.1より、成り立つ。

$n = m (m = 2 \sim k - 1)$  のとき、 $S_m = a^{m+1}/(m+1)$  と仮定する。

$n = k$  のとき、上記仮定のもと  $S_k = a^{k+1}/(k+1)$  を証明する。

一般放物線  $y = x^k$  (曲線1) と  $x$  軸と  $x = a$  とで囲まれた図形の面積が  $S_k$  である。一般放物線  $y = (x+a)^k$  (曲線2) の下の  $x = -a \sim a$  までの面積  $S$  は、 $x = -a \sim 0$  までの面積と、 $x = 0 \sim a$  までの面積の和であり、以下の2点が成り立つ。

- (1) 前者 (曲線2の下の  $x = -a \sim 0$  までの面積) は、 $S_k$  に等しい。
- (2)  $S/S_k = 2^{k+1}$ 。

まず第1点であるが、 $X = x+a$  と変数変換すると、 $y = (x+a)^k = X^k$  だから、曲線2の下の  $x = -a \sim 0$  までの面積は、 $y = X^k$  の下の  $X = 0 \sim a$  までの面積  $S_k$  に等しい。

次に第2点であるが、図13に示すように、 $S$  は  $y = X^k$  の下の  $X = 0 \sim 2a$  までの面積に等しい。すると補助定理2より、 $S/S_k = (2a)^{k+1}/a^{k+1} = 2^{k+1}$ 。

よって、 $S = S_k +$  曲線2の下の  $x = 0 \sim a$  までの面積  $= 2^{k+1}S_k$ 。

$$\therefore \text{曲線2の下の } x = 0 \sim a \text{ までの面積} = (2^{k+1} - 1)S_k.$$

ここで  $(x+a)^k$  は二項定理より、

$$(a+x)^k = {}_k C_0 a^k + {}_k C_1 a^{k-1} x + {}_k C_2 a^{k-2} x^2 + \dots + {}_k C_{k-1} a x^{k-1} + {}_k C_k x^k$$

だから、曲線2の下の  $x = 0 \sim a$  までの面積は、上式における右辺の各項の下の  $x = 0 \sim a$  までの面積の和である。よって仮定より、

$$(2^{k+1} - 1)S_k = {}_k C_0 a^k a + {}_k C_1 a^{k-1} \frac{a^2}{2} + {}_k C_2 a^{k-2} \frac{a^3}{3} + \dots + {}_k C_{k-1} a \frac{a^k}{k} + S_k.$$

$$\therefore (2^{k+1} - 2)S_k = a^{k+1} \left( {}_k C_0 + \frac{{}_k C_1}{2} + \frac{{}_k C_2}{3} + \dots + \frac{{}_k C_{k-1}}{k} \right).$$

ここで補助定理1より、

$${}_k C_0 + \frac{{}_k C_1}{2} + \frac{{}_k C_2}{3} + \dots + \frac{{}_k C_{k-1}}{k} = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} - \frac{{}_k C_k}{k+1} = \frac{2^{k+1} - 2}{k+1}.$$

$$\therefore S_k = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Q.E.D.

#### 4 あとがき

本論では、積分への一里塚というべきカヴァリエリの不可分量の概念を用いて、一般放物線の下での面積を求めた。まず不可分法を明確にするために、なじみのある楕円と球の求積を述べるとともに、アルキメデスの発見法との関連性を考察した。また、直線と放物線の下での求積についてのカヴァリエリの業績を紹介した。次に、低次放物線の下での面積を、カヴァリエリの証明法とは異なり、面積は線素の集まりとの考えをより明確にして求めた。さらに、同じ考えによって、カヴァリエリが推測するに終わった、一般放物線の下での求積定理を2つの補助定理とともに証明した。証明には、カヴァリエリとほぼ同時代のパスカルの業績を利用した。

不可分量の概念に対しては、幅や厚みのないものをいくら集めても、面積や体積にならないとの非難がおこったが、この非難に対してカヴァリエリは明確には反論できなかった。しかし、パスカルはカヴァリエリを擁護して以下のように述べている<sup>[4]</sup>。

「私は以下において、“縦線の和”あるいは“面の和”のような不可分量の用語を用いることに何らの支障も感じないであろう。この表現は不可分量の理論を解しない人々には幾何学的でないと思われる。このような人々は、無際限の数の線によって1つの平面を表すなどということは幾何学に反するように思っているのであるが、これは彼らの無知の結果に他ならない。」

今後は、パスカルのこの言葉を含めて、カヴァリエリからニュートンやライプニッツの積分へ向けて、高い次数の無限小は最終結果になんの影響も及ぼさないから捨て去ることができる、という一般原則を考察する予定である。

#### 参考文献

- [1] ニキフォロフスキー, V.A. (馬場良和訳): 積分の歴史—アルキメデスからコーシー, リーマンまで—, 現代数学社 (1993).
- [2] ボイヤー, C. B. (加賀美鐵雄他訳): 数学の歴史, 朝倉書店 (1998).
- [3] カッツ, V. J. (上野健爾他監訳): カッツ数学の歴史, 共立出版 (2005).
- [4] 上垣渉: はじめて読む数学の歴史, ベレ出版 (2006).
- [5] ユークリッド (中村幸四郎他訳): ユークリッド原論, 共立出版 (1996).
- [6] 上垣渉: アルキメデスを読む, 日本評論社 (1999).
- [7] アルキメデス (佐藤徹訳・解説): アルキメデス方法, 東海大学出版会 (1991).
- [8] 斉藤憲: よみがえる天才アルキメデス, 岩波書店 (2006).
- [9] C.B. Boyer: Cavalieri, limits and discarded infinitesimals, *Scripta Mathematica*, 8, pp.79-91 (1941).
- [10] 安部斎: 微積分の歩んだ道, 森北出版 (1989).
- [11] 数学辞典第3版, 日本数学会編, 岩波書店 (1994).