

平均すきま理論を適用した分子気体潤滑方程式の数値計算法

吉田 英代*¹ 林 武文*²

要 旨

ハードディスク装置に用いられる浮動ヘッドスライダは、磁気ヘッドを記録媒体上に非接触に位置づける動圧気体軸受の一種であるが、その設計には時間項を含む分子気体潤滑方程式の数値計算が不可欠である。近年、ハードディスクのトラック密度を増大させる目的で、溝状のテクスチャパターンを施したディスクが開発されている。本研究では、テクスチャパターンを含むディスク面に対応した分子気体潤滑方程式に平均すきま理論を適用し、これをADI法により時間分割の2次の精度で積分することにより、テクスチャパターンが施されたディスク上で浮動ヘッドスライダの浮上特性を計算する方法を検討した。さらに、この計算法を使用したシミュレーションシステムを開発し、これにより代表的な数種のスライダ特性を比較計算した。このシステムを使用することにより、複数の異なるパターンが存在するディスク上で、効率よく高精度なスライダの設計が可能となった。

Numerical Analysis of a Time Dependent Molecular Gas Lubrication Equation Applicable for Patterned Surfaces Using a Mixed Film Thickness Averaging Method

Hideyo YOSHIDA*¹ Takefumi HAYASHI*²

Abstract

In magnetic disk storage systems, a flying head slider is used to suspend a magnetic element on the recording medium at a spacing of several 10 nano-meters. To design the head slider, numerical analysis of the time dependent molecular gas film lubrication equation is indispensable. Recently, for the purpose of increasing the track density of hard disks, a recording disk with surface texture patterns such as grooves has been developed. In the present study, the mixed film thickness averaging method is applied to the molecular gas film lubrication equation to take the disk surface texture into account. And this lubrication equation is integrated using an alternated-direction-implicit method, which can give a solution with an accuracy of $(\Delta t)^2$. Also, an interactive visual simulator was developed to estimate the flying characteristics of flying head sliders. The system has proven to be effective for designing the slider and the configuration of the surface pattern.

*¹ 関西大学大学院総合情報学研究科

*² 関西大学総合情報学部

1. まえがき

磁気ディスクの面記録密度を向上させるためには、線記録密度を上げて1トラックに入るビット数を増やす方法と、トラックの幅を狭めてトラック密度を増やす方法が考えられる。前者はビットサイズの縮小に対応して磁区の干渉が無視できなくなり、出力レベルが低下するため、信号品質の確保が重要な課題となっている。また後者は、現状技術ではヘッドの位置決めのためにトラック幅を狭くすることは困難である。信号品質を安価に向上する方法として、近年、溝状のテクスチャパターンを施したディスクが研究されている^[1]。このディスクには、図1.1に示

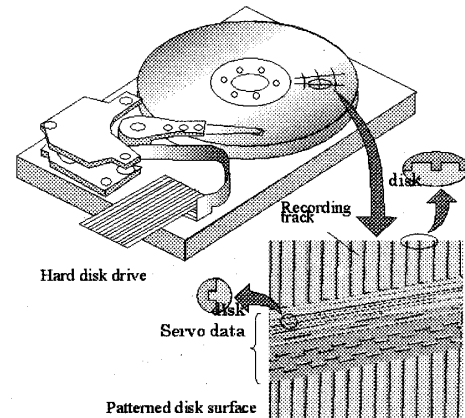


図1.1 Patterned magnetic disk

すように、トラックを形成する円周方向の連続な溝と、セクタ毎にそれを横切る半径方向の放射状の溝領域が形成されている。トラック間に溝を設けることにより、信号の干渉を回避し、既存の磁気ディスク装置の数倍のトラック密度を実現できるとともに、狭いトラックにヘッドを追従させるために、ヘッドの位置決めのためのサーボ情報を与えることが可能となる。しかしこのようなディスク表面は浮動ヘッドスライダの浮上特性に大きな影響を及ぼす。特に、セクタ境界部のパターンの通過に伴って、スライダが定常的に励振されるため、動的な安定性を考慮したスライダ形状とディスク表面パターンを組み合わせた設計が不可欠となる。

粗さをもつディスク面の潤滑特性の解析には、粗さを平均化して潤滑特性上等価な平滑面で置き換える平均すきま理論が用いられる。この考え方は、一次元の静止粗さに対する直感的考察から導入されたが、Elrod^[2]により数学的に証明され、三矢^[3]により二次元粗さへ拡張された。また、三矢ら^[4]は、圧縮性流体について、スリップ流れがある場合へ拡張した平均化法を示し、浮動ヘッドスライダを用いた実験によりその妥当性を確認した。さらに、空気の圧縮性の影響が顕在化する条件でのすきまの平均化法に関する検討も行われ、平均すきま理論の圧縮性潤滑膜への適用性と限界が明らかにされている^[5]。

本研究では、分子気体潤滑方程式を使用し、平均すきま理論を適用した計算方法を検討した。特に、複数の溝状のテクスチャパターンが走行面に存在する場合、テクスチャの単位パターンの混合比を流量係数のテーブルとしてあらかじめ定義することにより、計算を簡素化している。この平均すきま理論を適用した潤滑方程式を、ADI法により時間分割の2次の精度で計算する手順を示した。ADI法は時間項を含むレイノルズ方程式を時間方向に直接積分して解を求める方法であり、 x 方向と y 方向を分離して交互に繰返して計算するが、精度・安定性に優れている。さらに、この計算法を使用したシミュレーションシステムを開発し、これを用いて代表的なスライダの浮上特性を明らかにした。

2. スライダの動的挙動を求める運動方程式

スライダの重心位置の垂直変位を z_g 、ピッチング角を θ とした時の、2自由度解析モデル(図2.1)のスライダの運動方程式は次式の通りである。

$$m\ddot{z}_g = -kz_g + \iint \Delta p dx dy,$$

$$I\ddot{\theta} = -k_\theta\theta + \iint \Delta p(x_g - x) dx dy.$$

z_g : スライダの重心位置の垂直変位,

m : スライダの質量,

I : スライダの慣性モーメント,

θ : スライダの回転角,

p : スライダとディスク間の圧力,

Δp : スライダ面圧力分布の定常浮上状態からの変動分,

x_g : スライダの重心位置, k : ばね定数 (垂直),

k_θ : ばね定数 (ピッチング).

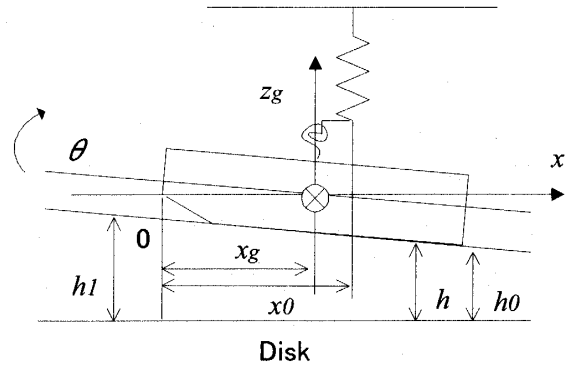


図2.1 A model with two degrees of freedom

なお, x 軸はディスク面の走行方向でスライダの長さ方向, y 軸はこれに垂直でディスク面と平行であり, スライダの幅方向である。

この運動方程式と次章で述べる潤滑方程式を時間項で連立させて, 各時間における圧力分布と浮上すきまを算出する。

3. 気体潤滑方程式

3.1 分子気体潤滑方程式

浮動ヘッドがディスク面から浮上する原理は気体軸受と同じである。スライダとディスクの間のすきまが十分に大きい場合には, 空気の流れを連続とみなすことができ, この時の圧力分布 p は, 気体潤滑の基本方程式であるレイノルズ方程式によって求めることができる。しかし, 実際にはスライダとディスクの間のすきまは非常に微小であり, 空気を不連続流れとして扱う必要がある。

さらに, 空気の希薄化の影響が顕著となる高クヌッセン数・低ベアリング数条件下, すなわち微小浮上・軽荷重スライダの解析のために, ボルツマン方程式に基づく分子気体潤滑方程式が導出された。これは, 数ナノメートルおよびそれ以下の微小すきまに適用可能である^{[6][7]}。

式(1)は, 有次元の場合の分子気体潤滑方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Qph^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Qph^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U_x \frac{\partial}{\partial x} (ph) + 6\mu U_y \frac{\partial}{\partial y} (ph) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (ph). \quad (1)$$

p : スライダとディスク間の圧力, μ : 空気の粘性係数,

h : スライダとディスクの間のすきま, U_x : 走行面の速度の x 成分,

U_y : 走行面の速度の y 成分.

なお, x 軸はディスク面の走行方向でスライダの長さ方向, y 軸はこれに垂直でディスク面と平行であり, スライダの幅方向である.

最小すきまでの逆クヌッセン数を D_0 とすると, $D_0 = \sqrt{\pi}/(2K_{n0})$ (K_{n0} : 最小すきまでのクヌッセン数) であり, $D = D_0PH$ で定義される. ここで, P, H は無次元量であり $P = p/p_a$ (p_a : 周囲圧力), $H = h/h_0$ (h_0 : 最小すきま量) である. この時, 圧力流れの無次元流量係数は $Q_p = Q_p(D)$ である. ここで, 連続流の流量係数を $Q_{con} (= D/6)$ とすると, ボルツマン方程式に基づく圧力流れの無次元流量係数 Q は, $Q = Q_p(D)/Q_{con}$ で定義される.

流量係数 Q_p の計算には無限積分が含まれるために多大な計算時間を要する. これを回避するために, D と Q_p の関係を数表化し, 潤滑領域の各メッシュ点の Q_p の値を表から内挿計算する方法が提案され^[8], 計算精度を損なうことなく従来の修正レイノルズ方程式と同程度の計算時間の解析が可能となった.

3.2 平均すきま理論の適用

本研究は矩形状のテクスチャパターンを対象としている. 本システムでは矩形パターンに対して, すきまをこれと等価な平滑面で置換して潤滑特性を近似的に解く平均すきま理論を適用している. 平均すきま理論では算術平均と調和平均を用いることによりすきまを平均化するが, 前節の分子気体潤滑方程式は, 次の平均すきまで表された平均レイノルズ方程式に書き換えることができる^{[8][9]}.

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q\bar{p}\bar{h}^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(Q\bar{p}\bar{h}^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}) = 6\mu U_x\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}\bar{h}_x^*) + 6\mu U_y\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}\bar{h}_y^*) + 12\mu\frac{\partial}{\partial t}(\bar{p}\bar{h}). \quad (2)$$

ここで, \bar{p} は平均圧力であり,

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_x^3 &= \alpha_{px}\bar{h}^3 + (1-\alpha_{px})\hat{h}^3 \\ \bar{h}_y^3 &= \alpha_{py}\bar{h}^3 + (1-\alpha_{py})\hat{h}^3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \bar{h}_x &= \alpha_{sx}\bar{h} + (1-\alpha_{sx})\hat{h} \\ \bar{h}_y &= \alpha_{sy}\bar{h} + (1-\alpha_{sy})\hat{h} \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_{mx} &= (1-\alpha_{sx})(\bar{h}-\hat{h}) \\ \bar{h}_{my} &= (1-\alpha_{sy})(\bar{h}-\hat{h}) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \bar{h}_x^* &= \bar{h}_x + 2\beta\bar{h}_{mx} \\ \bar{h}_y^* &= \bar{h}_y + 2\beta\bar{h}_{my} \end{aligned} \right\},$$

である. ただし, $\bar{\quad}$ は算術平均であり, $\hat{\quad}$ は調和平均 ($\hat{h} = \frac{\bar{h}^{-2}}{h^{-3}}, \hat{h}^3 = \frac{1}{h^{-3}}$) である. また, β は静止面粗さでは 0, 走行面粗さでは 1 の定数である. つまり, 静止面粗さ (スライダにテクスチャがある場合) では, $\bar{h}_x^* = \bar{h}_x$, $\bar{h}_y^* = \bar{h}_y$ である. h の添え字 m はすきまの時間変化 (走行粗さの場合に生じる) に起因するスクイーズ効果に対応する平均すきまである.

また, $\alpha_{px}\alpha_{py}$ は圧力流れの, $\alpha_{sx}\alpha_{sy}$ はせん断流れの, x, y 方向における h の算術平均 \bar{h} と調和平均 \hat{h} の混合比である. パターンごとに流量係数のテーブルを作成し, 凹凸パターン通

過時におけるヘッドの浮上特性の解析を容易にしている。なお、本研究で対象としている矩形パターンの場合には、 $\alpha_{px} = \alpha_{sx}$, $\alpha_{py} = \alpha_{sy}$ である。また、平行パターンの場合には $\alpha_{px} = \alpha_{sx} = 1$, $\alpha_{py} = \alpha_{sy} = 0$ であり、直交パターンの場合には $\alpha_{px} = \alpha_{sx} = 0$, $\alpha_{py} = \alpha_{sy} = 1$ であるので、

$$\begin{aligned} \text{平行パターン: } & \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x^3 = \bar{h}^3 \\ \widetilde{h}_y^3 = \widehat{h}^3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x = \bar{h} \\ \widetilde{h}_y = \widehat{h} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_{mx} = 0 \\ \widetilde{h}_{my} = (\bar{h} - \widehat{h}) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x^* = \bar{h} \\ \widetilde{h}_y^* = \widehat{h} + 2\beta(\bar{h} - \widehat{h}) \end{aligned} \right\}, \\ \text{直交パターン: } & \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x^3 = \widehat{h}^3 \\ \widetilde{h}_y^3 = \bar{h}^3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x = \widehat{h} \\ \widetilde{h}_y = \bar{h} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_{mx} = (\bar{h} - \widehat{h}) \\ \widetilde{h}_{my} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \widetilde{h}_x^* = \widehat{h} + 2\beta(\bar{h} - \widehat{h}) \\ \widetilde{h}_y^* = \bar{h} \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

の関係が成り立つ。

4. 分子気体潤滑方程式の数値解法

4.1 ADI法を使用した解法

レイノルズ方程式の数値解法には、Whiteらによる factored implicit アルゴリズム^[10]が有効である。この手法は ADI法 (Alternating Direction Implicit Method) の一種であり、潤滑方程式の非線形項を時間について展開して線形化し、 xy 座標のそれぞれの方向の1次元問題に帰着することにより $O((\Delta t)^2)$ の精度で高速計算を実現できる。各時間ステップでレイノルズ方程式を直接解いているために解が安定であり、定常状態の圧力分布とスライダの姿勢を同じアルゴリズムで求めることができる。

ここでは、分子気体潤滑方程式に ADI法を適用した解析法を示す。平均すきま理論を適用した分子気体潤滑方程式は、前章で示した式(2)の通りである。

積分はスライダ全面について行い、境界条件としてスライダの周囲の圧力を大気圧とする。

ここで、式(2)の線形化を容易にするために、 $z = \bar{p}h$ の変数変換を行う。

この時、 $Q(D) = Q(D_0 \bar{p}h) = Q(z)$ である。

また、 $\bar{p} = \frac{z}{h}$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right)$ であるから、これを式(2)

に適用し、さらに $\Lambda'_x = 6\mu U_x$, $\Lambda'_y = 6\mu U_y$, $\sigma' = 12\mu$ とおくと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[Qz \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} \frac{\partial z}{\partial x} - Qz^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Qz \frac{\widetilde{h}_y^3}{h^2} \frac{\partial z}{\partial y} - Qz^2 \frac{\widetilde{h}_y^3}{h^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right] \\ & = \Lambda'_x \frac{\partial}{\partial x} \left(z \frac{\widetilde{h}_x^*}{h} \right) + \Lambda'_y \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\widetilde{h}_y^*}{h} \right) + \sigma' \frac{\partial z}{\partial t} \\ \sigma' \frac{\partial z}{\partial t} & = \frac{\partial}{\partial x} \left[Qz \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} \frac{\partial z}{\partial x} - Qz^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} - \Lambda'_x z \frac{\widetilde{h}_x^*}{h} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Qz \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \frac{\partial z}{\partial y} - Qz^2 \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} - \Lambda'_{yz} \frac{\widetilde{h}_y}{\bar{h}} \right\}. \quad (3)$$

ここで,

$$F = Qz \left\{ \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right\} - \Lambda'_{xz} \frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}}, \quad G = Qz \left\{ \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right\} - \Lambda'_{yz} \frac{\widetilde{h}_y}{\bar{h}}$$

とすると, 式(3)は,

$$\sigma' z_t = F_x + G_y \quad (4)$$

と表せる. ここで, z_t は z の t に関する偏微分である. 以下, $\frac{\partial z}{\partial t}$ を z_t と記し, z の t に関する偏微分とする (F_x , G_y など同様に偏微分を表す).

積分の台形公式により,

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2} (z_t^n + z_t^{n+1}) + O((\Delta t)^3) \quad (5)$$

と表せるので, 式(4)を式(5)に代入すると,

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2\sigma'} (F_x^n + G_y^n + F_x^{n+1} + G_y^{n+1}) + O((\Delta t)^3). \quad (6)$$

ここで, n および $n+1$ は時間ステップを, また Δt はその間隔を表す.

いま, $F = F(\bar{h}, \bar{h}_x, z, z_x, t)$, $G = G(\bar{h}, \bar{h}_y, z, z_y, t)$ であるため, これらを時間 t についてテイラー展開により線形化すると,

$$\begin{aligned} F^{n+1} - F^n &= \frac{\partial F^n}{\partial \bar{h}} (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + \frac{\partial F^n}{\partial \bar{h}_x} (\bar{h}_x^{n+1} - \bar{h}_x^n) + \frac{\partial F^n}{\partial z} (z^{n+1} - z^n) \\ &\quad + \frac{\partial F^n}{\partial z_x} (z_x^{n+1} - z_x^n) + O((\Delta t)^2), \\ G^{n+1} - G^n &= \frac{\partial G^n}{\partial \bar{h}} (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + \frac{\partial G^n}{\partial \bar{h}_y} (\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n) + \frac{\partial G^n}{\partial z} (z^{n+1} - z^n) \\ &\quad + \frac{\partial G^n}{\partial z_y} (z_y^{n+1} - z_y^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\partial Q}{\partial D} = Q_D$ とし, さらに,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial F^n}{\partial \bar{h}} = \left\{ Qz z_x \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - Qz^2 \bar{h}_x \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) - \Lambda'_{xz} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}} \right) \right\}^n, \\ B &= \frac{\partial F^n}{\partial \bar{h}_x} = \left\{ -Qz^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right\}^n, \\ C &= \frac{\partial F^n}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial z} (z z_x \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - z^2 \bar{h}_x \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3}) + Q (z_x \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - 2z \bar{h}_x \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3}) - \Lambda'_{xz} \frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}} \right\}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ Q_{,D} D_0 \left(z z_{,x} \frac{\bar{h}_x^3}{h^2} - z^2 \bar{h}_{,x} \frac{\bar{h}_x^3}{h^3} \right) + Q \left(z_{,x} \frac{\bar{h}_x^3}{h^2} - 2z \bar{h}_{,x} \frac{\bar{h}_x^3}{h^3} \right) - \Lambda'_{,x} \frac{\bar{h}_x^*}{h} \right\}^n, \\
D &= \frac{\partial F^n}{\partial z_{,x}} = \left\{ Q z \frac{\bar{h}_x^3}{h^2} \right\}^n, \\
I &= \frac{\partial G^n}{\partial h} = \left\{ Q z z_{,y} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\bar{h}_y^3}{h^2} \right) - Q z^2 \bar{h}_{,y} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right) - \Lambda'_{,y} z \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\bar{h}_y^*}{h} \right) \right\}^n, \\
J &= \frac{\partial G^n}{\partial \bar{h}_{,y}} = \left\{ -Q z^2 \frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right\}^n, \\
K &= \frac{\partial G^n}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial z} \left(z z_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^2} - z^2 \bar{h}_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right) + Q \left(z_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^2} - 2z \bar{h}_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right) - \Lambda'_{,y} \frac{\bar{h}_y^*}{h} \right\}^n \\
&= \left\{ Q_{,D} D_0 \left(z z_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^2} - z^2 \bar{h}_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right) + Q \left(z_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^2} - 2z \bar{h}_{,y} \frac{\bar{h}_y^3}{h^3} \right) - \Lambda'_{,y} \frac{\bar{h}_y^*}{h} \right\}^n, \\
L &= \frac{\partial G^n}{\partial z_{,y}} = \left\{ Q z \frac{\bar{h}_y^3}{h^2} \right\}^n
\end{aligned}$$

(C, K の計算では, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = Q_{,D} \frac{\partial(D_0 z)}{\partial z} = D_0 Q_{,D}$ の関係を使用している.)

とすると,

$$\begin{aligned}
F^{n+1} - F^n &= A(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + B(\bar{h}_x^{n+1} - \bar{h}_x^n) + C(z^{n+1} - z^n) + D(z_x^{n+1} - z_x^n) + O((\Delta t)^2), \\
G^{n+1} - G^n &= I(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + J(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n) + K(z^{n+1} - z^n) + L(z_y^{n+1} - z_y^n) + O((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

であり, さらに両辺を偏微分すると,

$$\begin{aligned}
F_x^{n+1} &= F_x^n + \delta_x \{A(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_x \{B(\bar{h}_x^{n+1} - \bar{h}_x^n)\} + \delta_x \{C(z^{n+1} - z^n)\} \\
&\quad + \delta_x \{D(\delta_x z^{n+1} - \delta_x z^n)\}, \\
G_y^{n+1} &= G_y^n + \delta_y \{I(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_y \{J(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n)\} + \delta_y \{K(z^{n+1} - z^n)\} \\
&\quad + \delta_y \{L(\delta_y z^{n+1} - \delta_y z^n)\}
\end{aligned}$$

である (δ_x は x の偏微分演算子). これらを式(6)に代入し, $a = \frac{\Delta t}{2\sigma}$ とすると,

$$\begin{aligned}
z^{n+1} &= z^n + a [F_x^n + G_y^n \\
&\quad + F_x^n + \delta_x \{A(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_x \{B(\bar{h}_x^{n+1} - \bar{h}_x^n)\} + \delta_x \{C(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_x \{D(\delta_x z^{n+1} - \delta_x z^n)\} \\
&\quad + G_y^n + \delta_y \{I(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_y \{J(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n)\} + \delta_y \{K(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_y \{L(\delta_y z^{n+1} - \delta_y z^n)\}] \\
&\quad + O((\Delta t)^3).
\end{aligned}$$

これを, z^{n+1}, z^n について整理すると,

$$\{1 - a(\delta_x C + \delta_x D \delta_x + \delta_y K + \delta_y L \delta_y)\} z^{n+1} = \{1 - a(\delta_x C + \delta_x D \delta_x + \delta_y K + \delta_y L \delta_y)\} z^n$$

$$+a[\delta_x\{A(\bar{h}^{n+1}-\bar{h}^n)\}+\delta_x\{B(\bar{h}_x^{n+1}-\bar{h}_x^n)\}+\delta_y\{I(\bar{h}^{n+1}-\bar{h}^n)\}+\delta_y\{J(\bar{h}_y^{n+1}-\bar{h}_y^n)\}] \quad (7)$$

$$+2a(F_x^n+G_y^n)+O((\Delta t)^3).$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} L_1(x) &= a(\delta_x C + \delta_x D \delta_x), \\ L_2(y) &= a(\delta_y K + \delta_y L \delta_y), \\ \phi &= 2a(F_x^n + G_y^n) \\ &+ a[\delta_x\{A(\bar{h}^{n+1}-\bar{h}^n)\}+\delta_x\{B(\bar{h}_x^{n+1}-\bar{h}_x^n)\}+\delta_y\{I(\bar{h}^{n+1}-\bar{h}^n)\}+\delta_y\{J(\bar{h}_y^{n+1}-\bar{h}_y^n)\}] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とし, $O((\Delta t)^3)$ 以下の項を省略すると, 式(7)は,

$$\{1-(L_1+L_2)\}z^{n+1} = \{1-(L_1+L_2)\}z^n + \phi$$

であり, $\Delta z^n = z^{n+1} - z^n$ とすると,

$$\{1-(L_1+L_2)\}\Delta z^n = \phi$$

$$\{(1-L_1)(1-L_2)-L_1L_2\}\Delta z^n = \phi \quad (9)$$

である. ここで, 式(9)の左辺 $\{ \}$ 内の第2項に注目すると,

$$\begin{aligned} L_1L_2\Delta z^n &= a^2(\delta_x C + \delta_x D \delta_x)(\delta_y K + \delta_y L \delta_y)\Delta z^n \\ &= \frac{\Delta t^2}{(2\sigma')^2}(\delta_x C + \delta_x D \delta_x)(\delta_y K + \delta_y L \delta_y)\left\{\frac{\Delta z^n}{\Delta t}\Delta t\right\} \\ &= \frac{\Delta t^3}{(2\sigma')^2}(\delta_x C + \delta_x D \delta_x)(\delta_y K + \delta_y L \delta_y)(z_t^n + O(\Delta t)) \end{aligned}$$

であり $O((\Delta t)^3)$ であるためこの項を省略すると, 式(9)は以下のように表される.

$$\{(1-L_1)(1-L_2)\}\Delta z^n = \phi. \quad (10)$$

ここで, 式(10)を以下の2式に分解する.

$$(1-L_1)\Delta z^n = \phi, \quad (11)$$

$$(1-L_2)\Delta z^n = \Delta z^n. \quad (12)$$

つまり, まず式(11)を x 方向の1次元問題として解き, 次に式(12)を y 方向の1次元問題として解くことができる.

4.2 矩形パターンを考慮したすきまの平均化

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{h}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \quad \text{が成立することを考慮すると, 前に求めた } A \sim D, I \sim L,$$

およびそれらの x または y に関する微分には, \bar{h} の1階微分, 2階微分として, 以下の6種類が必要であることがわかる.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\bar{h}_x^*}{\bar{h}} \right).$$

ここで、図4.1に示すように、凹凸パターンの凹部と凸部の面積比が $s_g : s_r$ である矩形パターンを考える。凹部のすきまを h_g 、凸部のすきまを h_r とすると、算術平均すきま \bar{h} は以下のように入えられる。

$$\bar{h} = s_g h_g + s_r h_r \quad (s_r + s_g = 1).$$

また、凹凸の溝の深さを d とすると、

$$\left. \begin{aligned} h_g &= \bar{h} + s_g d \\ h_r &= \bar{h} - s_g d \end{aligned} \right\}$$

である。したがって、算術平均、調和平均の項は、それぞれ以下のように表される。

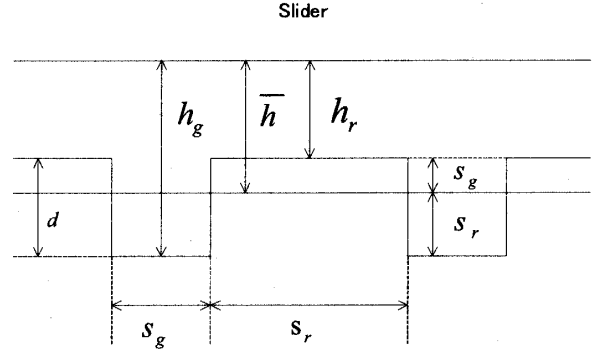


図4.1 Cross section of rectangular texture pattern

$$\bar{h}^3 = s_g h_g^3 + s_r h_r^3 = s_g (\bar{h} + s_g d)^3 + s_r (\bar{h} - s_g d)^3,$$

$$\widehat{h}^3 = \frac{1}{\bar{h}^{-3}} = \frac{1}{\frac{s_g}{h_g^3} + \frac{s_r}{h_r^3}} = \frac{1}{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^3}},$$

$$\widehat{h} = \frac{\bar{h}^{-2}}{\bar{h}^{-3}} = \frac{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^2} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^2}}{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^3}}.$$

これより、矩形状パターンにおける平均すきま \tilde{h} 、 \tilde{h}^3 は、

$$\tilde{h} = \alpha_s \bar{h} + (1 - \alpha_s) \widehat{h} = \alpha_s \bar{h} + (1 - \alpha_s) \left\{ \frac{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^2} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^2}}{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^3}} \right\},$$

$$\tilde{h}^3 = \alpha_p \bar{h}^3 + (1 - \alpha_p) \widehat{h}^3$$

$$= \alpha_p \{s_g (\bar{h} + s_g d)^3 + s_r (\bar{h} - s_g d)^3\} + (1 - \alpha_p) \left\{ \frac{1}{\frac{s_g}{(\bar{h} + s_g d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h} - s_g d)^3}} \right\}$$

であるので、

$$\frac{\widetilde{h}^3}{\bar{h}^2} = \frac{\alpha_p \{s_g(\bar{h}+s,d)^3 + s_r(\bar{h}-s_g d)^3\} + (1-\alpha_p) \left\{ \frac{1}{\frac{s_g}{(\bar{h}+s,d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h}-s_g d)^3}} \right\}}{h^2}$$

$$\frac{\widetilde{h}^3}{\bar{h}^3} = \frac{\alpha_p \{s_g(\bar{h}+s,d)^3 + s_r(\bar{h}-s_g d)^3\} + (1-\alpha_p) \left\{ \frac{1}{\frac{s_g}{(\bar{h}+s,d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h}-s_g d)^3}} \right\}}{h^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{h}}{\bar{h}} &= \frac{\widetilde{h} + 2\beta(1-\alpha_s)(\bar{h}-\widehat{h})}{\bar{h}} = \frac{\alpha_s \bar{h} + (1-\alpha_s)\widehat{h} + (2\beta-2\beta\alpha_s)(\bar{h}-\widehat{h})}{\bar{h}} \\ &= \frac{(\alpha_s + 2\beta - 2\beta\alpha_s)\bar{h} + (1-\alpha_s)(1-2\beta)\widehat{h}}{\bar{h}} \end{aligned}$$

$$= (\alpha_s + 2\beta - 2\beta\alpha_s) + (1-\alpha_s)(1-2\beta) \frac{\frac{s_g}{(\bar{h}+s,d)^2} + \frac{s_r}{(\bar{h}-s_g d)^2}}{\frac{s_g}{(\bar{h}+s,d)^3} + \frac{s_r}{(\bar{h}-s_g d)^3}} \cdot \frac{1}{h}$$

これらを算術平均すま \bar{h} で1階微分および2階微分する。その結果に、算術平均、

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}^k &= s_g h_g^k + s_r h_r^k = s_g(\bar{h}+s,d)^k + s_r(\bar{h}-s_g d)^k \\ \bar{h}^{-k} &= s_g h_g^{-k} + s_r h_r^{-k} = \frac{s_g}{(\bar{h}+s,d)^k} + \frac{s_r}{(\bar{h}-s_g d)^k} \quad (k \neq 1) \end{aligned} \right\}$$

(※ $k=1$ の場合は $\bar{h}^{-1} = \frac{\bar{h}^{-2}}{h^{-3}}$ とする.)

による置換を適用すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}^3}{\bar{h}^2} \right) &= \frac{\frac{3(\bar{h}^{-4})(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + 3\bar{h}^2\alpha_p}{\bar{h}^2} \cdot \frac{2 \left\{ \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^{-3}} + \bar{h}^3\alpha_p \right\}}{\bar{h}^3} \\ &= \frac{\alpha_p}{\bar{h}^3} \{3\bar{h}^2\bar{h} - 2\bar{h}^3\} + \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^3} \left\{ 3\bar{h} \frac{(\bar{h}^{-4})}{(\bar{h}^{-3})^2} - \frac{2}{\bar{h}^{-3}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h^3}}{\bar{h}^3} \right) &= \frac{\frac{3(\bar{h}^{-4})(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + 3\bar{h}^2\alpha_p}{\bar{h}^3} \cdot \frac{3 \left\{ \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^{-3}} + \bar{h}^3\alpha_p \right\}}{\bar{h}^4} \\
&= \frac{\alpha_p}{\bar{h}^4} \{ 3\bar{h}^2\bar{h} - 3\bar{h}^3 \} + \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^4} \left\{ 3\bar{h} \frac{(\bar{h}^{-4})}{(\bar{h}^{-3})^2} - \frac{3}{\bar{h}^{-3}} \right\}, \\
\frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h^*}}{\bar{h}} \right) &= (1-\alpha_s)(1-2\beta) \left\{ -2 \frac{\bar{h}^{-3}}{h h^{-3}} + 3 \frac{\bar{h}^{-4} h^{-2}}{h(\bar{h}^{-3})^2} - \frac{\bar{h}^{-2}}{\bar{h}^2 h^{-3}} \right\} \\
&= \frac{(1-\alpha_s)(1-2\beta)}{\bar{h}^2} \left\{ -2\bar{h} + 3 \frac{\bar{h}^{-4} h^{-2}}{(\bar{h}^{-3})^2} \bar{h} - \frac{\bar{h}^{-2}}{h^{-3}} \right\}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\widetilde{h^3}}{\bar{h}^2} \right) &= \frac{\frac{18(\bar{h}^{-4})^2(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^3} - \frac{12(\bar{h}^{-5})(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + 6\bar{h}\alpha_p}{\bar{h}^2} - \frac{12 \left\{ \frac{\bar{h}^{-4}(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + \bar{h}^2\alpha_p \right\}}{\bar{h}^3} \\
&\quad + \frac{6 \left\{ \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^{-3}} + \bar{h}^3\alpha_p \right\}}{\bar{h}^4} \\
&= 6 \frac{\alpha_p}{\bar{h}^4} (\bar{h}^3 - 2\bar{h}^2\bar{h} + \bar{h}^3) + 6 \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^4} \left[\frac{1}{\bar{h}^{-3}} - 2 \frac{\bar{h}^{-4}}{(\bar{h}^{-3})^2} \bar{h} + \left\{ 3 \frac{(\bar{h}^{-4})^2}{(\bar{h}^{-3})^3} - 2 \frac{(\bar{h}^{-5})}{(\bar{h}^{-3})^2} \right\} \bar{h}^2 \right], \\
\frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\widetilde{h^3}}{\bar{h}^3} \right) &= \frac{\frac{18(\bar{h}^{-4})^2(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^3} - \frac{12(\bar{h}^{-5})(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + 6\bar{h}\alpha_p}{\bar{h}^3} - \frac{18 \left\{ \frac{(\bar{h}^{-4})(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})^2} + \bar{h}^2\alpha_p \right\}}{\bar{h}^4} \\
&\quad + \frac{12 \left\{ \frac{(1-\alpha_p)}{(\bar{h}^{-3})} + \bar{h}^3\alpha_p \right\}}{\bar{h}^5} \\
&= 6 \frac{\alpha_p}{\bar{h}^5} (\bar{h}^3 - 3\bar{h}^2\bar{h} + 2\bar{h}^3) + 6 \frac{(1-\alpha_p)}{\bar{h}^5} \left[2 \frac{1}{(\bar{h}^{-3})} - 3 \frac{(\bar{h}^{-4})}{(\bar{h}^{-3})^2} \bar{h} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ 3 \frac{(\bar{h}^{-4})^2}{(\bar{h}^{-3})^3} - 2 \frac{(\bar{h}^{-5})}{(\bar{h}^{-3})^2} \right\} \bar{h}^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \bar{h}^2} \left(\frac{\bar{h}^*}{\bar{h}} \right) &= (1-\alpha_s)(1-2\beta) \left\{ -6 \frac{\bar{h}^{-4}}{h h^{-3}} + 4 \frac{1}{\bar{h}^2} + 18 \frac{\bar{h}^{-4^2} \bar{h}^{-2}}{h h^{-3^3}} - 12 \frac{\bar{h}^{-5} \bar{h}^{-2}}{h h^{-3^2}} - 6 \frac{\bar{h}^{-4} \bar{h}^{-2}}{\bar{h}^2 h^{-3^2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\bar{h}^{-2}}{h^3 h^{-3}} \right\} \\ &= \frac{2(1-\alpha_s)(1-2\beta)}{\bar{h}^3} \left[-3 \left\{ \frac{\bar{h}^{-4}}{h^{-3}} - 3 \frac{\bar{h}^{-4^2} \bar{h}^{-2}}{h^{-3^3}} + 2 \frac{\bar{h}^{-5} \bar{h}^{-2}}{h^{-3^2}} \right\} \bar{h}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2 - 3 \frac{\bar{h}^{-4} \bar{h}^{-2}}{h^{-3^2}} \right\} \bar{h} + \frac{\bar{h}^{-2}}{h^{-3}} \right]. \end{aligned}$$

4.3 不等分割メッシュを用いた離散値化

本システムでは不等分割メッシュを用いた中心差分（2次精度）および上流差分（2次精度）による離散値化を行っている。潤滑すきま内の流れの物理的な特性に基づき、走行方向のせん断流れの項には上流差分を、それ以外の項（圧力流れの項およびスライダ幅方向のせん断流れの項）には中心差分を適用している。

これらは、等分割区間における差分法と同様に、テイラー展開を基に導くことができる^[11]。

2次元での x, y それぞれに関する1階偏微分、および2階偏微分は以下の通り。

i) 中心差分（2次精度）

$$2 \text{ 階微分: } \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^3 A_k(i) u_{i+2-k,j}, \quad \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^3 B_k(j) u_{i,j+2-k}.$$

$$1 \text{ 階微分: } \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 C_k(i) u_{i+2-k,j}, \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \sum_{k=1}^3 D_k(j) u_{i,j+2-k}.$$

ここで、係数 A, C は、差分を $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ として、以下のように定義される。（ B, D についても同様。）

$$\begin{aligned} A_1(i) &= \frac{2}{\Delta x_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}, & C_1(i) &= \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}, \\ A_2(i) &= \frac{-2}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i}, & C_2(i) &= \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}, \\ A_3(i) &= \frac{2}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}, & C_3(i) &= \frac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}. \end{aligned}$$

ii) 上流差分（2次精度） ※2階微分は、必要となる項が存在しないため記述を省略。

$$1 \text{ 階微分: } \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 C_k(i) u_{i+1-k,j}.$$

ここで、係数 C は、差分を $\Delta x_{i-2} = x_{i-1} - x_{i-2}, \Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ として、以下のように定義される。

$$C_1(i) = \frac{\Delta x_{i-2} + 2\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})},$$

$$C_2(i) = \frac{-(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})}{\Delta x_{i-2}\Delta x_{i-1}},$$

$$C_3(i) = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-2}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})}.$$

この不等分割区間における中心差分，上流差分を使用し，式(11)，式(12)を解く．

添字 i, j はスライダ面のメッシュ点番号 (i, j) を表す．

$$\begin{aligned} L_1 \Delta z_{i,j}^* &= \{a(\delta_x C + \delta_x D \delta_x)\} \Delta z_{i,j}^* \\ &= a[\delta_x(C \Delta z_{i,j}^*) + \delta_x(D \delta_x(\Delta z_{i,j}^*))] \\ &= a[(\delta_x C)(\Delta z_{i,j}^*) + C(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + (\delta_x D)(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + D(\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)]. \end{aligned} \quad (13)$$

いま，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial x} = Q_{,D} \frac{\partial(D\bar{z})}{\partial x} = D_0 Q_{,D} \bar{z}_{,x}, \\ \frac{\partial Q_{,D}}{\partial x} &= \frac{\partial Q_{,D}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial x} = Q_{,DD} \frac{\partial(D\bar{z})}{\partial x} = D_0 Q_{,DD} \bar{z}_{,x} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

であるので，これを用いて式(13)に C, D を代入すると，

$$\begin{aligned} L_1 \Delta z_{i,j}^* &= a[(\delta_x C)(\Delta z_{i,j}^*) + C(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + (\delta_x D)(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + D(\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)] \\ &= a[(\delta_x C)(\Delta z_{i,j}^*) + (C + \delta_x D)(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + D(\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)] \\ &= a[(\delta_x C)(\Delta z_{i,j}^*) + (C + \delta_x D)(C_3(i) \Delta z_{i-1,j}^* + C_2(i) \Delta z_{i,j}^* \\ &\quad + C_1(i) \Delta z_{i+1,j}^*) + D(A_3(i) \Delta z_{i-1,j}^* + A_2(i) \Delta z_{i,j}^* + A_1(i) \Delta z_{i+1,j}^*)] \\ &= a[\{(C + \delta_x D)C_3(i) + D(A_3(i))\} \Delta z_{i-1,j}^* \\ &\quad + \{\delta_x C + (C + \delta_x D)(C_2(i)) + D(A_2(i))\} \Delta z_{i,j}^* \\ &\quad + \{(C + \delta_x D)(C_1(i)) + D(A_1(i))\} \Delta z_{i+1,j}^*]. \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} L_2 \Delta z_{i,j}^* &= a[\{(K + \delta_y L)D_3(j) + L(B_3(j))\} \Delta z_{i,j-1}^* \\ &\quad + \{\delta_y K + (K + \delta_y L)D_2(j) + L(B_2(j))\} \Delta z_{i,j}^* \\ &\quad + \{(K + \delta_y L)(D_1(j)) + L(B_1(j))\} \Delta z_{i,j+1}^*]. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} (\delta_x C) &= D_0^2 Q_{,DD} \bar{z}_{,x} \left(z z_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} - z^2 \bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} \right) \\ &\quad + D_0 Q_{,D} \left\{ \left(z_{,x}^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} + z z_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} + z z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{h^2} \right)_{,x} \right) - \left(2 z z_{,x} \bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} + z^2 \bar{h}_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} + z^2 \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{h^3} \right)_{,x} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_0 Q_{Dz,x} \left(z_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - 2z\bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) \\
& + Q \left\{ \left(z_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} + z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{,x} \right) - \left(2z_{,x} \bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} + 2z\bar{h}_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} + 2z\bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{,x} \right) - \Lambda'_x \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}} \right)_{,x} \right\} \\
& = D_0^2 Q_{DDz,x} z \left(z_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - z\bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) \\
& + D_0 Q_D \left\{ \left(2z_{,x}^2 + zz_{,xx} \right) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - z \left(4z_{,x} \bar{h}_{,x} + z\bar{h}_{,xx} \right) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} + zz_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{,x} - z^2 \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{,x} \right\} \\
& + Q \left\{ \left(z_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} + z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{,x} \right) - 2 \left(z_{,x} \bar{h}_{,x} + z\bar{h}_{,xx} \right) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} - 2z\bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{,x} - \Lambda'_x \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}} \right)_{,x} \right\}, \\
(\delta_x D) & = D_0 Q_{Dz,x} z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} + Q z_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} + Q z \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{,x}, \\
(\delta_y K) & = D_0^2 Q_{DDz,y} \left(zz_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} - z^2 \bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \\
& + D_0 Q_D \left\{ \left(z_{,y}^2 \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + zz_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + zz_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{,y} \right) - \left(2zz_{,y} \bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} + z^2 \bar{h}_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} + z^2 \bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right)_{,y} \right) \right\} \\
& + D_0 Q_{Dz,y} \left(z_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} - 2z\bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \\
& + Q \left\{ \left(z_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + z_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{,y} \right) - \left(2z_{,y} \bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} + 2z\bar{h}_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} + 2z\bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right)_{,y} \right) - \Lambda'_y \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}} \right)_{,y} \right\} \\
& = D_0^2 Q_{DDz,y} z \left(z_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} - z\bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \\
& + D_0 Q_D \left\{ \left(2z_{,y}^2 + zz_{,yy} \right) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} - z \left(4z_{,y} \bar{h}_{,y} + z\bar{h}_{,yy} \right) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} + zz_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{,y} - z^2 \bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right)_{,y} \right\} \\
& + Q \left\{ \left(z_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + z_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{,y} \right) - 2 \left(z_{,y} \bar{h}_{,y} + z\bar{h}_{,yy} \right) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} - 2z\bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right)_{,y} - \Lambda'_y \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}} \right)_{,y} \right\}, \\
(\delta_y L) & = D_0 Q_{Dz,y} z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + Q z_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} + Q z \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{,y}.
\end{aligned}$$

また、式(8)より、

$$\phi = 2a(F_x^n + G_y^n)$$

$$+ a[\delta_x\{A(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_x\{B(\bar{h}_x^{n+1} - \bar{h}_x^n)\} + \delta_y\{I(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\} + \delta_y\{J(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n)\}]$$

であるので、この右辺を第1項から順に解く。ただし、以下で、

$$\left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2}\right)_x = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2}\right) = \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2}\right)_{\bar{h}}, \quad \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3}\right)_x = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3}\right) = \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3}\right)_{\bar{h}},$$

$$\left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}}\right)_x = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{h}} \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}}\right) = \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}$$

である (y 方向の微分についても同様)。

(第1項)

$$F_x^n = D_0 Q_{Dz} z \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} z_{.x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.x} \right) + Q z_x \left\{ \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} z_{.x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.x} \right\}$$

$$+ Q z \left\{ \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{.x} z_{.x} + \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} z_{.xx} - z_{.x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.x} - z \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{.x} \bar{h}_{.x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.xx} \right\}$$

$$- \Lambda'_{.x} z_{.x} \frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}} - \Lambda'_{.x} z \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}} \right)_{.x}$$

$$= D_0 Q_{Dz} z \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} z_{.x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.x} \right)$$

$$+ Q \left\{ (z_{.x}^2 + z z_{.xx}) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} - (2 z_{.x} z \bar{h}_{.x} + z^2 \bar{h}_{.xx}) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} + z z_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right)_{.x} - z^2 \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{.x} \right\}$$

$$- \Lambda'_{.x} z_{.x} \frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}} - \Lambda'_{.x} z \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\bar{h}} \right)_{.x},$$

$$G_y^n = D_0 Q_{Dz} z \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} z_{.y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.y} \right) + Q z_y \left\{ \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} z_{.y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.y} \right\}$$

$$+ Q z \left\{ \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right)_{.y} z_{.y} + \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} z_{.yy} - z_{.y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.y} - z \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right)_{.y} \bar{h}_{.y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \bar{h}_{.yy} \right\}$$

$$- \Lambda'_{.y} z_{.y} \frac{\widetilde{h}_y^*}{\bar{h}} - \Lambda'_{.y} z \left(\frac{\widetilde{h}_y^*}{\bar{h}} \right)_{.y}$$

$$\begin{aligned}
&= D_0 Q_{,D} z_{,y} z \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} z_{,y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} \bar{h}_{,y} \right) \\
&+ Q \left\{ (z_{,y}^2 + z z_{,yy}) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} - (2z_{,y} z \bar{h}_{,y} + z^2 \bar{h}_{,yy}) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} + z z_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,y} - z^2 \bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,y} \right\} \\
&- \Lambda'_{,y} z_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^*}{\widetilde{h}} - \Lambda'_{,y} z \left(\frac{\widetilde{h}_y^*}{\widetilde{h}} \right)_{,y}.
\end{aligned}$$

従って,

$$2a(F_x^n + G_y^n)$$

$$\begin{aligned}
&= 2a \left[D_0 Q_{,D} z \left\{ \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} z_{,x} - z \frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \bar{h}_{,x} \right) z_{,x} + \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} z_{,y} - z \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} \bar{h}_{,y} \right) z_{,y} \right\} \right. \\
&+ Q \left\{ (z_{,x}^2 + z z_{,xx}) \frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} + (z_{,y}^2 + z z_{,yy}) \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} + z (z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} + z_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,y}) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2z (z_{,x} \bar{h}_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} + z_{,y} \bar{h}_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3}) - z^2 (\bar{h}_{,xx} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} + \bar{h}_{,yy} \frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} + \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} + \bar{h}_{,y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,y}) \right\} \right. \\
&\left. - \Lambda'_x \left\{ z_{,x} \frac{\widetilde{h}_x^*}{\widetilde{h}} + z \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\widetilde{h}} \right)_{,x} \right\} - \Lambda'_y \left\{ z_{,y} \frac{\widetilde{h}_y^*}{\widetilde{h}} + z \left(\frac{\widetilde{h}_y^*}{\widetilde{h}} \right)_{,y} \right\} \right].
\end{aligned}$$

(第2項)

$$\begin{aligned}
a[\delta_x \{A(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)\}] &= a\{(\delta_x A)(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + A(\bar{h}_{,x}^{n+1} - \bar{h}_{,x}^n)\} \\
&= a \left[\left\{ (D_0 Q_{,D} z_{,x} z \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} + Q z_{,x}^2 \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} + Q z z_{,xx} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} + Q z z_{,x} \left(\left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} \right)_{,x} \right\} \right. \\
&\quad \left. - (D_0 Q_{,D} z_{,x} z^2 \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} + Q z z z_{,x} \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} + Q z^2 \bar{h}_{,xx} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} + Q z^2 \bar{h}_{,x} \left(\left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} \right)_{,x} \right) \right. \\
&\quad \left. - (\Lambda'_x z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\widetilde{h}} \right)_{,x} + \Lambda'_x z \left(\left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\widetilde{h}} \right)_{,x} \right)_{,x}) \right\} (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) \\
&+ \left\{ Q z z_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^2} \right)_{,x} - Q z^2 \bar{h}_{,x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\widetilde{h}^3} \right)_{,x} - \Lambda'_x z \left(\frac{\widetilde{h}_x^*}{\widetilde{h}} \right)_{,x} \right\} (\bar{h}_{,x}^{n+1} - \bar{h}_{,x}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \left[\{ D_0 Q_{Dz} z^2 \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - z_{.x} z \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) \right. \\
&\quad + Q \left(z z_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - z^2 \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) \right) + z_{.x}^2 \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) \\
&\quad \left. + z z_{.xx} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - 2 z z_{.x} \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) - z^2 \bar{h}_{.xx} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) \right] \\
&\quad - \Lambda'_x \left(z_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}} \right) + z \left(\left(\frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}} \right)_{.x} \right) \right) (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) \\
&\quad + \{ Q z z_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - Q z^2 \bar{h}_{.x} \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) - \Lambda'_x z \left(\frac{\widetilde{h}_x}{\bar{h}} \right) \} (\bar{h}_{.x}^{n+1} - \bar{h}_{.x}^n).
\end{aligned}$$

(第3項)

$$\begin{aligned}
a[\delta_x \{ B(\bar{h}_{.x}^{n+1} - \bar{h}_{.x}^n) \}] &= a \{ (\delta_x B)(\bar{h}_{.x}^{n+1} - \bar{h}_{.x}^n) + B(\bar{h}_{.xx}^{n+1} - \bar{h}_{.xx}^n) \} \\
&= a \left[\{ -D_0 Q_{Dz} z^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} - 2 Q z z_{.x} \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} - Q z^2 \left(\frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right)_{.x} \right] (\bar{h}_{.x}^{n+1} - \bar{h}_{.x}^n) \\
&\quad + \left(-Q z^2 \frac{\widetilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) (\bar{h}_{.xx}^{n+1} - \bar{h}_{.xx}^n).
\end{aligned}$$

(第4項)

$$\begin{aligned}
a[\delta_y \{ I(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) \}] &= a \{ (\delta_y I)(\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) + I(\bar{h}_{.y}^{n+1} - \bar{h}_{.y}^n) \} \\
&= a \left[\{ D_0 Q_{Dz} z^2 \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) - z_{.y} z \bar{h}_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \right. \\
&\quad + Q \left(z z_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) - z^2 \bar{h}_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \right) + z_{.y}^2 \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) \\
&\quad \left. + z z_{.yy} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) - 2 z z_{.y} \bar{h}_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) - z^2 \bar{h}_{.yy} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) \right] \\
&\quad - \Lambda'_y \left(z_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y}{\bar{h}} \right) + z \left(\left(\frac{\widetilde{h}_y}{\bar{h}} \right)_{.y} \right) \right) (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n) \\
&\quad + \{ Q z z_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) - Q z^2 \bar{h}_{.y} \left(\frac{\widetilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) - \Lambda'_y z \left(\frac{\widetilde{h}_y}{\bar{h}} \right) \} (\bar{h}_{.y}^{n+1} - \bar{h}_{.y}^n).
\end{aligned}$$

(第5項)

$$\begin{aligned}
 a[\delta_y\{J(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n)\}] &= a\{(\delta_y J)(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n) + J(\bar{h}_{yy}^{n+1} - \bar{h}_{yy}^n)\} \\
 &= a\left[\left\{-D_0 Q_D z^2 \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} - 2Q_z z_y \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} - Q_z^2 \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_y\right\}(\bar{h}_y^{n+1} - \bar{h}_y^n) + (-Q_z^2 \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}})(\bar{h}_{yy}^{n+1} - \bar{h}_{yy}^n)\right].
 \end{aligned}$$

従って、これら第1項から第5項までをまとめると、

$$\begin{aligned}
 \varphi &= 2a\left[D_0 Q_D z \left\{\left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}} z_x - z \frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}} \bar{h}_x\right) z_x + \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} z_y - z \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} \bar{h}_y\right) z_y\right\}\right. \\
 &\quad + Q \left\{(z_x^2 + z z_{xx}) \frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}} + (z_y^2 + z z_{yy}) \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} + z \left(z_x \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_x + z_y \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_y\right)\right. \\
 &\quad \left. - 2z(z_x \bar{h}_x \frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}} + z_y \bar{h}_y \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}})\right. \\
 &\quad \left. - z^2 \left(\bar{h}_{xx} \frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}} + \bar{h}_{yy} \frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}} + \bar{h}_x \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_x + \bar{h}_y \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_y\right)\right\} \\
 &\quad - \Lambda'_x \left\{z_x \frac{\bar{h}_x^*}{\bar{h}} + z \left(\frac{\bar{h}_x^*}{\bar{h}}\right)_x\right\} - \Lambda'_y \left\{z_y \frac{\bar{h}_y^*}{\bar{h}} + z \left(\frac{\bar{h}_y^*}{\bar{h}}\right)_y\right\} \\
 &\quad + a \left\{D_0 Q_D z \left(z_x^2 \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} + z_y^2 \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} - z_x z \bar{h}_x \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} - z_y z \bar{h}_y \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)\right. \\
 &\quad + Q \left(z \left(z_x \left(\left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_x + z_y \left(\left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_y\right) - z^2 \left(\bar{h}_x \left(\left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_x + \bar{h}_y \left(\left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_y\right)\right. \\
 &\quad + (z_x^2 + z z_{xx}) \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} + (z_y^2 + z z_{yy}) \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} - z(2z_x \bar{h}_x + z \bar{h}_{xx}) \left(\frac{\bar{h}_x^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} \\
 &\quad \left. - z(2z_y \bar{h}_y + z \bar{h}_{yy}) \left(\frac{\bar{h}_y^3}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right) \\
 &\quad \left. - \Lambda'_x \left(z_x \left(\frac{\bar{h}_x^*}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} + z \left(\left(\frac{\bar{h}_x^*}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_x\right) - \Lambda'_y \left(z_y \left(\frac{\bar{h}_y^*}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}} + z \left(\left(\frac{\bar{h}_y^*}{\bar{h}}\right)_{\bar{h}}\right)_y\right)\right\} (\bar{h}^{n+1} - \bar{h}^n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ Qz(z_x \left(\frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}^2} \right) - 2z_x \frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} - 2z_x \bar{h} \left(\frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right) - \Lambda'_{xz} \left(\frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}} \right) - D_0 Q_{D,z,x} z^2 \frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right\} (\bar{h}_{.x}^{n+1} - \bar{h}_{.x}^n) \\
& + \left\{ Qz(z_y \left(\frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}^2} \right) - 2z_y \frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} - 2z_y \bar{h} \left(\frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right) - \Lambda'_{yz} \left(\frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}} \right) - D_0 Q_{D,z,y} z^2 \frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right\} (\bar{h}_{.y}^{n+1} - \bar{h}_{.y}^n) \\
& - \left\{ Qz^2 \frac{\tilde{h}_x^3}{\bar{h}^3} \right\} (\bar{h}_{.xx}^{n+1} - \bar{h}_{.xx}^n) - \left\{ Qz^2 \frac{\tilde{h}_y^3}{\bar{h}^3} \right\} (\bar{h}_{.yy}^{n+1} - \bar{h}_{.yy}^n)].
\end{aligned}$$

ここまでで、式(11)、式(12)を解くために必要な $L_1(x)\Delta z_{i,j}^*$ 、 $L_2(y)\Delta z_{i,j}^n$ 、 φ が与えられた。これらをもとに、三重対角行列を使用した連立一次方程式により Δz^n を求めることができる^[12]。

5. 数値計算システムの処理の流れ

本システムは、2章の運動方程式と3章の潤滑方程式を時間項で連立させて、各時間における圧力分布と浮上すきまを算出し、結果をリアルタイムで可視化する。

メイン処理として、時間ステップ毎に以下の処理を繰り返し行う。

(1) 圧力分布の描画

(2) 圧力解の計算

- ・現在の時刻 (t) における圧力分布を用いて、スライダの運動方程式により次の時刻 ($t+1$) のスライダ姿勢を求める (ルンゲ・クッタ法)。
- ・このスライダ姿勢を予測値として、潤滑方程式により次の時刻 ($t+1$) の圧力分布を求める (ADI法)。
- ・この圧力分布を用いて、再度運動方程式よりスライダの姿勢を求め、これが予測値と一致するまで収束計算を行う。

(3) 上記で求めた圧力値、または流出すきまが不正値であれば数ステップ前に戻り、時間幅などのパラメータ修正を行う。

6. テクスチャ付きディスクにおけるスライダ浮上特性

6.1 スライダの緒元とメッシュ分割

代表的な3種類のスライダについて、その特性を分析した。これらのスライダは平滑面において、ディスク走行面速度 $U_x=10\text{m/s}$ 、押付荷重 $F=0.54\text{mN}$ (0.0547gf) の場合に最小浮上すきまが 20nm になるように設計している。また、このスライダに対する空間メッシュは不等分割としており、スライダ面における凹凸の境界付近、外周付近で分割数を多くしている。

表6.1にスライダの諸元および押付け荷重 (Load) を示す。これは全てのスライダで同じ値としている。

表6.1 Specifications of sliders

Length	[mm]	0.5
Width	[mm]	0.39
Mass	[mg]	0.34
Inertia(pitching)	[mg·mm ²]	0.0083
Load	[mN]	0.54

以下の図6.1-6.6に3種類のスライダの寸法と形状を示す。

(1) Taper-Flat(TF)

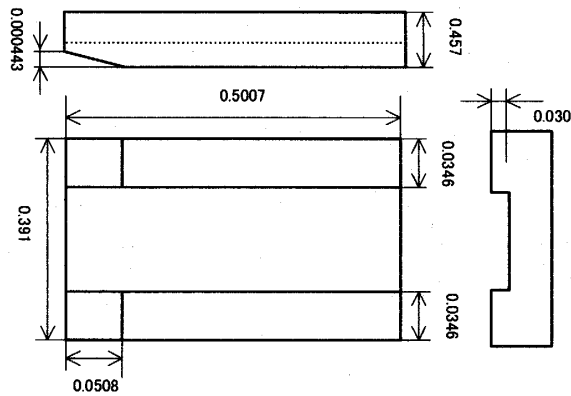


図6.1 Dimension of TF slider [mm]

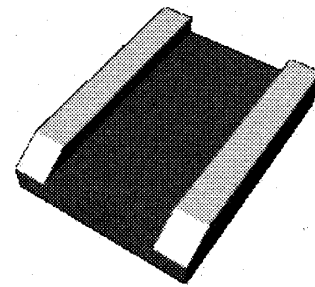


図6.2 Shape of TF slider

(2) Negative-Pressure(NP)

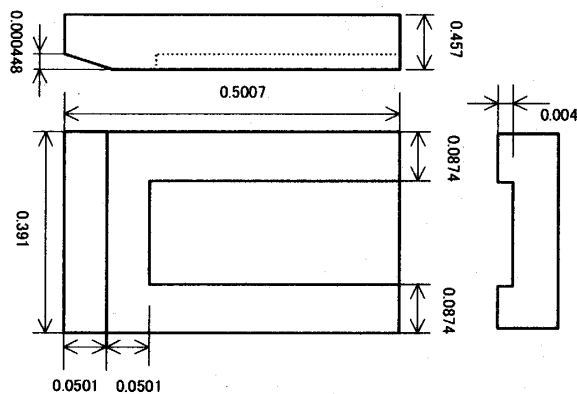


図6.3 Dimension of NP slider [mm]

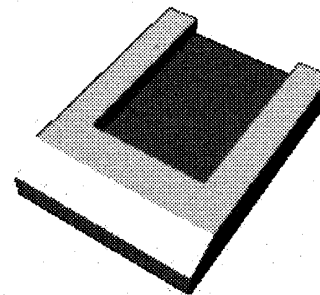


図6.4 Shape of NP slider

(3) Step-Pad(SP)

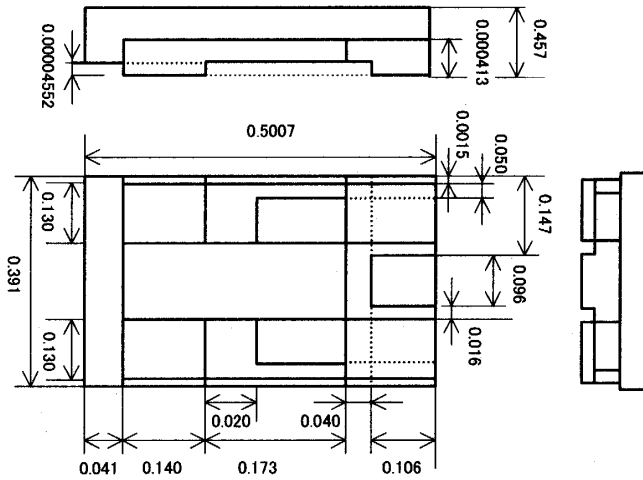


図6.5 Dimension of SP slider [mm]

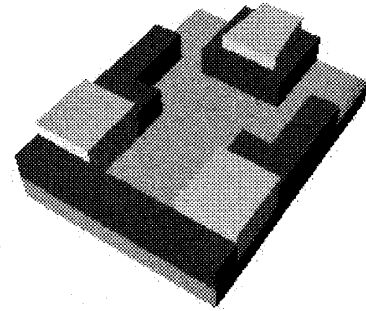


図6.6 Shape of SP slider

6.2 ディスク表面のテクスチャパターン

本解析では、ディスク面に4領域の異なるパターンを与えた。ディスクには以下の4領域から成るパターンが、ディスク長分繰り返し設定される。

1周期のテクスチャパターン：

平行パターン179.75+直交パターン6.25+混合パターン10.625+直交パターン3.375
= 200 (単位は[μm])

平行	直交	混合	直交
179.75	6.25	10.625	3.375

図6.7の左に平行パターン (Longitudinal) および直交パターン (Transverse) を、右に混合パターン (Plateau) を示す。

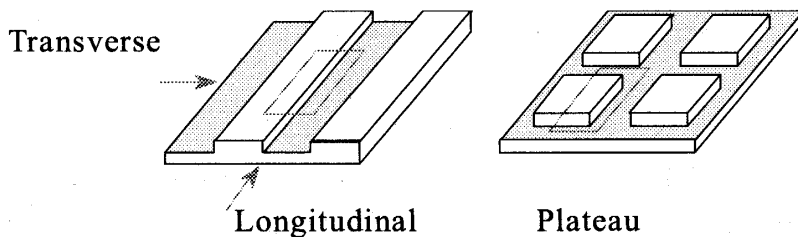


図6.7 Texture pattern

6.3 スライダの浮上特性

上記のスライダ、テクスチャ付きディスクを使用し、スライダの浮上特性を解析した。

ディスク表面は、約90%の部分がデータ領域 (トラック部分) の平行な溝パターンであるため、スライダの定常浮上量は平行パターンに対する潤滑特性によってほぼ決まり、セクタ境界

部の直交および混合パターンの領域はスライダに周期的に加わる外乱として作用すると考えられる。

6.3.1 溝通過に伴う最小浮上すきまの振動

ここでは、テクスチャの溝通過時の振動の様子を時間の経過に従って示す。図6.8は3種類のスライダそれぞれについて、溝深さ $d=5, 10, 15$ の場合の振動の様子を示している。横軸が経過時間[ms]、縦軸が最小浮上すきま h_0 [nm]である。図中の d は溝深さ(depth)である。

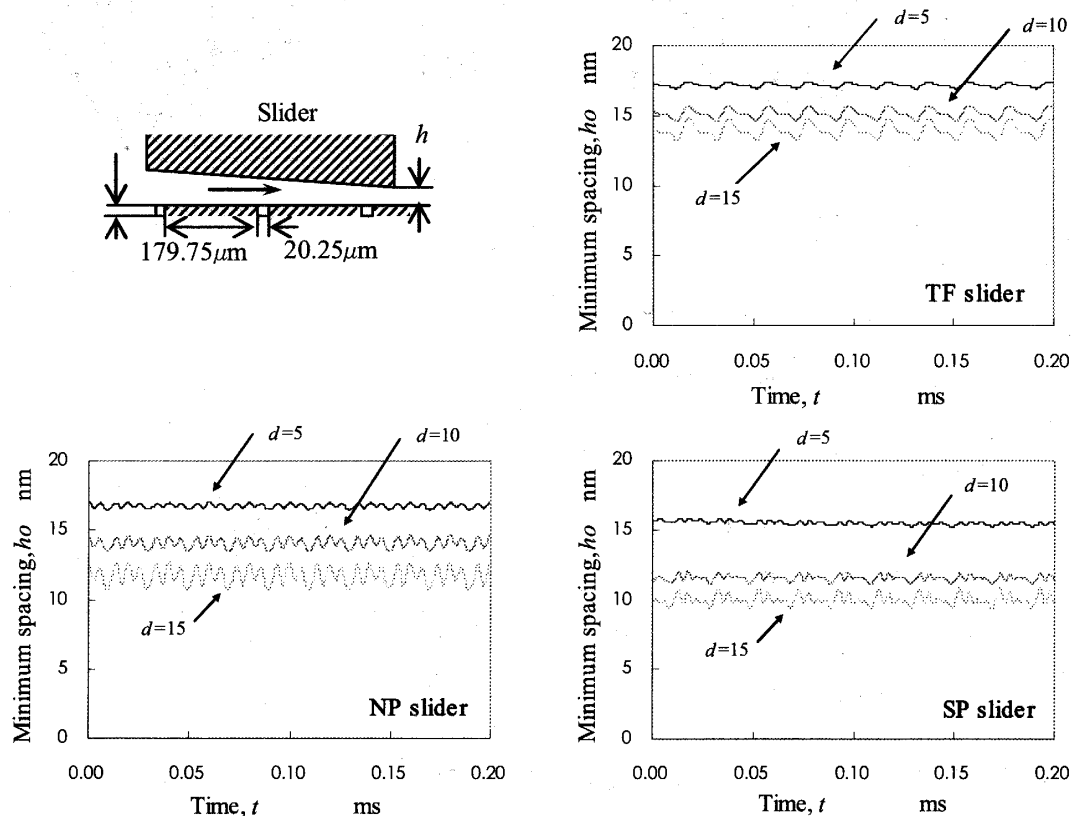


図6.8 Minimum spacing variation as a parameter of groove depths, d

図6.8では、いずれのスライダも、テクスチャパターンの溝深さ (d) が大きくなるにつれて最小浮上すきまが小さくなり、振動が大きくなっているのが分かる。また、溝の通過に伴い、スライダは一定周期の振動を繰り返し行っているが、前節でも示したように、Negative-pressure スライダは最も振動が大きい。Step-Pad スライダは、溝深さが大きくなるにつれて最小浮上すきま h_0 が他のスライダよりも小さくなるが、それでも他のスライダと比較すると振動も小さく、安定しているといえる。

図6.9は先程と同じ計算結果を、テクスチャパターンの溝深さごとに表したグラフである。それぞれのグラフで3種類のスライダを比較している。

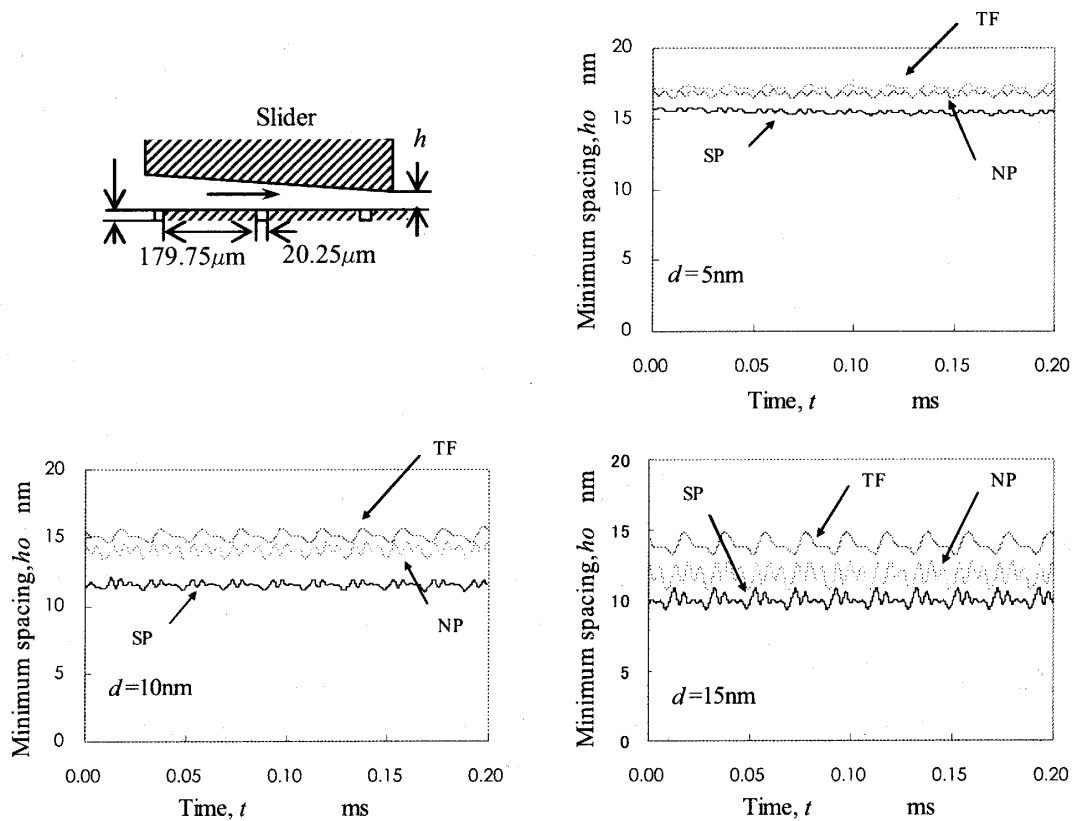


図6.9 Minimum spacing variation of three sliders

溝深さ $d=5$ の場合、いずれのスライダもほぼ同じ最小浮上すきまを示しており、特に、Taper-Flat スライダと Negative-Pressure スライダは同程度の値となっている。溝が深くなると、3種類のスライダにそれぞれ差が生じるが、特に、Negative-pressure スライダでは振動が激しくなり、Step-Pad スライダでは最小浮上すきまが小さくなっていくのが分かる。ただし、Step-Pad スライダでは、溝深さが10nm程度より大きくなると、それ以降、最小浮上すきまの変化は小さくなる。

6.3.2 溝深さに伴う最小浮上すきまの変化

図6.10はそれぞれのスライダについて、時間経過に伴う最小浮上すきまの平均値 (h_{ave})、最小浮上すきまの最大値 (h_{max})、最小浮上すきまの最小値 (h_{min}) を示したグラフである。これは、溝の通過に伴って、どれくらいの振幅で振動したかを示したものである。 h_{max} と h_{min} の差が大きいほど、溝の通過による振動が大きいといえる。

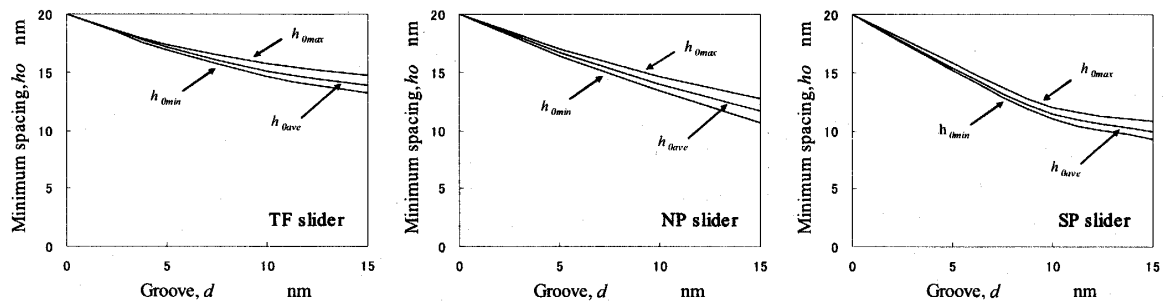


図6.10 Maximum and minimum spacing values of h_0

いずれもテクスチャパターンの溝深さが大きくなるに従い、振幅が大きくなっているのが分かる。 h_{0max} と h_{0min} の差が最も大きいのはNegative-Pressureスライダである。これにより、溝の通過時に最も振動するスライダはNegative-Pressureスライダであることが分かる。

図6.11はテクスチャパターンの溝深さに伴う最小浮上すきま h_0 の平均値の変化の様子を、3種類のスライダで比較したグラフである。横軸が溝の深さ[nm]、縦軸が最小浮上すきま h_0 [nm]の平均値である。溝深さ0nmの定常浮上量20nmから開始し、溝深さ15nmまでの結果を示している。

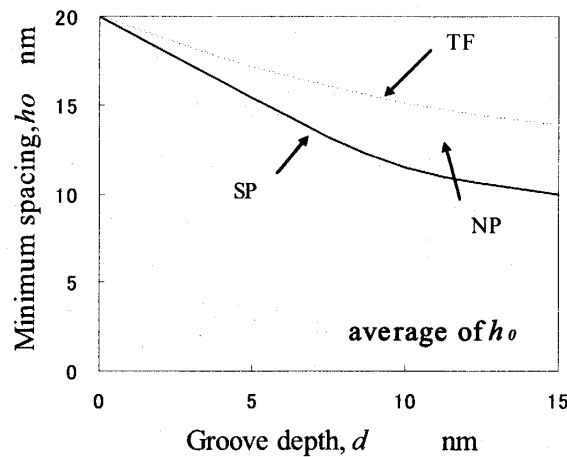


図6.11 Average minimum spacing variation of three sliders

Taper-Flatスライダに比べると、Step-Padスライダは溝深さの影響を大きく受けている。しかしStep-Padスライダの場合は、溝深さが10nm程度（最小浮上すきま10nm程度）より大きくなると最小浮上すきまの変化が少なくなり、溝深さ20nmでは解が発散して計算不可となった。Taper-Flatスライダの場合には、溝深さ15nm程度（最小浮上すきま15nm程度）より大きくなると最小浮上すきまの変化が少なくなり、それ以降はほぼ同じ最小浮上すきまを維持するが、溝深さ40nmで解が発散した。また、Negative-Pressureスライダは、これら

Taper-Flat スライダと Step-Pad スライダの中間程度の値を示しているが、溝深さが25nm に達するまではほぼ同じ程度の割合で最小浮上すきまが小さくなり、30nm で解が発散した。

解の発散については、メッシュ分割を検討することにより若干の改善は図れると考えられるが、テクスチャパターンの溝深さと最小浮上すきまとの関係についてはおよそ今回得た結果の通りであると思われる。

7. まとめ

本稿では、平均すきま理論に基づき矩形断面状のテクスチャパターンに対応した分子気体潤滑方程式を示し、ADI法により時間分割の2次の精度で解析を行うための離散値化法を示した。本研究で開発したシステムでは、空間領域の微分法として、走行方向のせん断流れの項には上流差分を、それ以外の項には中心差分を適用した。

また、本システムにより代表的な3種類のスライダについて、パターン付きディスクにおける浮上特性を調査した。その結果は以下の通りである。

いずれも、テクスチャ無しの場合の定常浮上量20nmからの計算結果である。

(1) Taper-Flat スライダ

- ・最小浮上すきま h_0 は、溝深さが大きくなるにつれて少しずつ低下する。
- ・溝深さ15nmの場合の最小浮上すきまは15nm程度であり、それ以降は溝深さを大きくしても、ほぼ同じ最小浮上すきまを維持する。
- ・溝通過時の振動は、溝深さが大きくなるにつれて少し激しくなる。

(2) Negative-Pressure スライダ

- ・最小浮上すきま h_0 は、溝深さが大きくなるにつれて少しずつ低下する。その割合は Taper-Flat スライダと Step-Pad スライダの中間程度である。
- ・溝深さ15nmの場合の最小浮上すきまは13nm程度であり、それ以降、溝深さ25nmに達するまで、溝深さにほぼ比例して最小浮上すきまも小さくなる。
- ・溝深さ通過時の振動は、他のスライダに比べると最も激しい。

(3) Step-Pad スライダ

- ・最小浮上すきま h_0 は、溝深さが大きくなるにつれて大きく低下する(10nm程度まで)。
- ・溝深さ10nmの場合の最小浮上すきまは10nm程度であり、それ以降は溝深さを大きくしても、ほぼ同じ最小浮上すきまを維持する。
- ・溝通過時の振動は、溝深さが大きくなるにつれて少し激しくなるが、他のスライダに比べると振幅は小さい。

ディスク表面にテクスチャがある場合、Negative-Pressure スライダはやや不安定であり、Step-Pad スライダはやや安定であるといえる。Step-Pad スライダは、溝深さに伴う浮上すきまの低下が最も大きく、かつ、振動が少ないため、最も良い効果が得られると考えられる。

今回、定常浮上すきまを20nmにするにあたり、これまで定常浮上すきま50nmであったスライダの諸元をいくらか変更したが、当初、解が発散するケースが多かった。荷重や速度を変更して調整することも行ったが、メッシュ分割を見直すことにより改善できたところが多い。今後、さらに最小浮上すきまを小さくして計算を行うためには、それぞれのスライダにとって最適なメッシュ分割を検討する必要があると思われる。

謝辞

本研究の一部は、平成17年度関西大学重点領域研究助成金において、研究課題「積層型左手系メタ媒質の開発と高周波技術への応用」として研究費を受けたことを付記する。

参考文献

- [1] 石田・渡辺：“ハード・ディスク装置の容量を光ディスク並みに上げる技術を開発”，日経エレクトロニクス，586，169-181（1993）。
- [2] Elrod, H. G.：“Thin-Film Lubrication Theory for Newtonian Fluids with Surfaces Possessing Striated Roughness or Grooving”，Trans.ASME, Ser.F, 95, 4, 484（1973）。
- [3] 三矢保永：“二次元に分布したあらしをもつ面の流体潤滑特性”，日本機械学会論文集（C編），50，449, 168（1984）。
- [4] Mituya, Y., Ohkubo, T. and Ota, H.：“Averaged Reynolds Equation Extended to Gas Lubrication Possessing Surface Roughness in the Slip Flow Regime：Approximate Method and Confirmation Experiments”，Trans.ASME J.Tribology, 111, 3, 495（1989）。
- [5] 三矢保永・林武文：“面粗さをもつ圧縮性潤滑膜におけるすきまの平均化法”，日本機械学会論文集（C編），55，519, 2864（1989）。
- [6] 福井茂寿・金子礼三：“ボルツマン方程式に基づく薄膜気体潤滑特性の解析（第1報）”，日本機械学会論文集（C編），53，487, 829（1987）。
- [7] 福井茂寿・金子礼三：“ボルツマン方程式に基づく薄膜気体潤滑特性の解析（第2報）”，日本機械学会論文集（C編），53，492, 1807（1987）。
- [8] Fukui, S. and Kaneko, R.：“A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for High Knudsen Number Lubrication Problems”，Trans.ASME J.Tribology, 112, 78（1990）。
- [9] 三矢保永・鴻村哲志：“面粗さに関して平均化されたボルツマン修正レイノルズ方程式の直接法による過渡応答解析”，日本機械学会論文集（C編），60，569, 247（1994）。
- [10] White, J. W. and Nigam, A.：“A Factored Implicit Scheme for the Numerical Solution of the Reynolds Equation at Very Low Spacing”，Trans.ASME, Ser.F, 102, 80（1980）。
- [11] 日本機械学会編：“流れの数値シミュレーション”，コロナ社（1988）。
- [12] 吉田英代・林武文：“時間項を含む分子気体潤滑の数値計算法に関する研究”，関西大学総合情報学部紀要，23，141（2005）。