

時間項を含む分子気体潤滑方程式の数値計算法に関する研究

吉田 英代*¹ 林 武文*²

要 旨

ハードディスク装置に用いられる浮動ヘッドスライダは、磁気ヘッドを記録媒体上に非接触に位置づける動圧気体軸受の一種であるが、その設計には時間項を含む分子気体潤滑方程式の数値計算が不可欠である。近年、ヘッドと媒体間のすきまは、10nm程度まで微小化されてきたが、このような超微小すきまでは、気体の圧縮性の影響により、圧力解の収束性が悪化して短時間で解を求めることが困難となる。本研究では、時間項を含む分子気体潤滑方程式にADI法を適用して時間分割の2次の精度で解析を行う方法について検討を行った。特に、潤滑すきま内の流れの物理的な性質に基づいて、圧縮性流れの項に中心差分を、またせん断流れの項には上流差分を適用することにより、超高圧縮性条件下における解の収束性が向上することを明らかにした。

Numerical Analysis of a Time Dependent Molecular Gas Film Lubrication Equation

Hideyo YOSHIDA*¹ Takefumi HAYASHI*²

Abstract

In magnetic disk storage, a flying head slider is used to suspend a magnetic element on a recording medium over several 10 nano-meter spacing. To design the head slider, numerical analysis of the time dependent molecular gas film lubrication equation is indispensable. Recently, the spacing between magnetic head and medium has been reduced to 10 nm. Under such high compression conditions, the convergence of the solution becomes worse. In the present study, we developed a numerical method to integrate the time dependent molecular gas film lubrication equation using an alternated-direction-implicit method, which can give the solution in the accuracy of $(\Delta t)^2$. Especially, considering the physical characteristics of the flow in the lubrication film, the central finite difference method is applied to the pressure flow term and the upstream finite difference method is applied to the shear flow term and the convergence of the solution is improved.

*¹ 関西大学大学院総合情報学研究科

*² 関西大学総合情報学部

1. まえがき

磁気ディスク装置には、動圧気体軸受の原理を応用し磁気ヘッドを記録媒体上に数十ナノメートルのすきまを介して浮上させる浮動ヘッドスライダが用いられている^[1]。高速回転するディスク表面とヘッドの相対速度は毎秒数10メートルであり、しかも媒体、ヘッドともに剛体から成るために摩擦・摩耗の観点からは両者の非接触走行は不可欠である。

磁気ディスク装置の記録密度をあげるためには、浮動ヘッドスライダの浮上すきまを微小化することが有効であり、現在の浮上すきまは10ナノメートルのオーダーまで微小化されている。しかし、すきまの微小化に伴い、スライダの安定浮上を阻害する様々な外乱の影響が顕在化し、ヘッドとディスクの接触損傷の危険性が増大する。空気潤滑膜における流れの希薄度を示す指標として、クヌッセン数 $Kn = \lambda/h$ (気体の分子平均自由行程 λ に対する軸受すきま h の比) が用いられる。高クヌッセン数の条件下では空気の粒子性の影響、軸受表面の影響、気体潤滑膜の非線形性の影響など、通常の気体軸受と異なる問題点が顕在化する。記録密度を向上するとともに装置の信頼性を確保するためには、これらの要因がスライダの動的浮上特性に及ぼす影響を明らかにし、それに基づく設計指針を確立しなければならない。

浮動ヘッドスライダの動的特性の評価には、時間項をもつ分子気体潤滑方程式^[2]が用いられる。同方程式は気体分子の挙動を考慮に入れることにより、ナノメートルオーダーの潤滑すきまにおける圧力分布の解析を行うことが可能であり、その有効性も検証されている。しかし、超微小すきまでは、気体の圧縮性の影響により、潤滑方程式の収束性が悪化して短時間で解を求めることが困難となる。また、収束する場合にも、空間領域の分割数の粗さが原因となり、圧力解に誤差が発生する場合がある。これらを改善する為に、これまでに、短時間で収束可能な方法、誤差が少なく精度が高い方法、安定性の高い方法など、多くの計算スキームが提案されている。レイノルズ方程式の積分形である流量連続の式を直接差分して不連続点の収束性を高めるダイバージェンス・フォーミュレーション (DF) 法^[3]、圧力流れとせん断流れをまとめて扱うことによって高精度かつ高安定を実現する指数法^[4]、空間微分に上流差分を使用することにより圧力分布がのこぎり波状になることを改善した上流差分スキーム^{[4]-[6]}、数値拡散を抑える手法である CIP 法^[7]などである。

本研究では、潤滑すきま内の流れの物理的な性質に基づいて、圧縮性流れの項に中心差分を、また、せん断流れの項には上流差分 (1次精度および2次精度) を適用することにより、超高圧縮性条件下における解の収束性が向上することを明らかにした。せん断流れの項に中心差分、1次精度上流差分、2次精度上流差分を適用した時の圧力分布およびすきま分布を取得し、三者の安定性と精度を比較したが、その結果、中心差分に比べ上流差分は非常に安定した解が得られた。また計算精度に関しては、1次精度の上流差分は中心差分に比べ、明らかに精度が劣化した。不等分割メッシュを用いた2次精度上流差分を適用することにより、従来の中心差分と同程度の精度が得られることが明らかになった。

2. スライダの動的挙動を求める運動方程式

スライダの重心位置の垂直変位を z_g 、ピッチング角を θ とした時の、2自由度解析モデルを図2.1に示す。また、この時のスライダの運動方程式は次式の通りである。

$$m\ddot{z}_g = -kz_g + \iint \Delta p dx dy,$$

$$I\ddot{\theta} = -k_\theta\theta + \iint \Delta p(x_g - x) dx dy.$$

z_g : スライダの重心位置の垂直変位,
 m : スライダの質量, I : スライダの慣性モーメント,
 θ : スライダの回転角, p : スライダとディスク間の圧力,
 Δp : スライダ面圧力分布の定常浮上状態からの変動分,
 x_g : スライダの重心位置, k : ばね定数 (垂直),
 k_θ : ばね定数 (ピッチング).

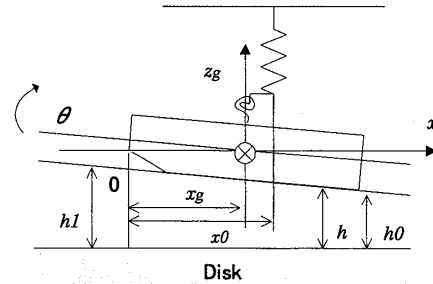


図2.1 スライダの2自由度モデル

なお、 x 軸はディスク面の走行方向でスライダの長さ方向、 y 軸はこれに垂直でディスク面と平行であり、スライダの幅方向である。

3. 気体潤滑方程式

3.1 連続流レイノルズ方程式と修正レイノルズ方程式

浮動ヘッドがディスク面から浮上する原理は気体軸受と同じである。スライダとディスクの間のすきまが十分に大きい場合には、空気の流れを連続とみなすことができ、この時の圧力分布 p は、気体潤滑の基本方程式であるレイノルズ方程式によって求めることができる。

連続流レイノルズ方程式 (有次元) は、以下のように表される^[8]。

$$\frac{\partial}{\partial x} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial y}) = 6\mu U_x \frac{\partial}{\partial x} (ph) + 6\mu U_y \frac{\partial}{\partial y} (ph) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (ph).$$

p : スライダとディスク間の圧力, μ : 空気の粘性係数,
 h : スライダとディスクの間のすきま, U_x : 走行面の速度の x 成分,
 U_y : 走行面の速度の y 成分.

なお、 x 軸はディスク面の走行方向でスライダの長さ方向、 y 軸はこれに垂直でディスク面と平行であり、スライダの幅方向である。

ここで、左辺はスライダとディスクの間の圧力勾配によって生じる圧力流れ (Poiseuille flow) であり、右辺はスライダとディスクの速度差によって生じるせん断流れ (Couette flow) である。

しかし、実際にはスライダとディスクの間のすきまは非常に微小であり、空気を不連続流れ

として扱う必要がある。この場合の圧力分布 p を与える潤滑方程式として、Burgdorfer^[9]により壁面での一次スリップ流れの境界条件を考慮して導入された修正レイノルズ方程式が一般に用いられる。これは、上記レイノルズ方程式の圧力流れの項に、 $(1 + \frac{6Kn}{ph})$ の修正項を追加したものである。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (ph^3) \left(1 + \frac{6Kn}{ph} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (ph^3) \left(1 + \frac{6Kn}{ph} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right\} \\ & = 6\mu U_x \frac{\partial}{\partial x} (ph) + 6\mu U_y \frac{\partial}{\partial y} (ph) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (ph). \end{aligned}$$

これは、クヌッセン数 $Kn \ll 1$ の条件に対して導かれた近似式であるが、 $Kn > 1$ の場合にも適用可能であることが確認されている^{[10]-[12]}。また、さらに微小なすきまにおける潤滑特性を解析するために、2次のスリップ量まで考慮にいたれた高次修正レイノルズ方程式も提案されている^[10]。

しかし、これらの物理的な根拠は無い。また、スライダの浮上すきまが数ナノメートルにまで微小化されるに伴い、気体の粒子性の影響が顕著化し、スリップ近似に基づく修正レイノルズ方程式の適用範囲を超えることが予想される。空気の希薄化の影響が顕著となる高クヌッセン数・低ベアリング数条件下、すなわち微小浮上・軽荷重スライダの解析には、次のボルツマン方程式に基づく分子気体潤滑方程式の解析が必要となる。

3.2 分子気体潤滑方程式

気体粒子の運動を考慮することが可能なボルツマン方程式に基づく潤滑特性の研究により、数ナノメートルおよびそれ以下の微小すきまに適用可能な一般化された潤滑方程式が導出された^{[13][14]}。

$$\frac{\partial}{\partial x} (Qph^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (Qph^3 \frac{\partial p}{\partial y}) = 6\mu U_x \frac{\partial}{\partial x} (ph) + 6\mu U_y \frac{\partial}{\partial y} (ph) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t} (ph).$$

最小すきまでの逆クヌッセン数を D_0 とすると、 $D_0 = \sqrt{\pi} / (2Kn_0)$ (Kn_0 : 最小すきまでのクヌッセン数) であり、 $D = D_0 PH$ で定義される。ここで、 P, H は無次元量であり $P = p/p_a$ (p_a : 周囲圧力)、 $H = h/h_0$ (h_0 : 最小すきま量) である。この時、圧力流れの無次元流量係数は $Q_p = Q_p(D)$ である。ここで、連続流の流量係数を $Q_{con} (= D/6)$ とすると、ボルツマン方程式に基づく圧力流れの無次元流量係数 Q は、 $Q = Q_p(D) / Q_{con}$ で定義される。

流量係数 Q_p の計算には無限積分が含まれるために多大な計算時間を要する。これを回避するために、 D と Q_p の関係を数表化し、潤滑領域の各メッシュ点の Q_p の値を表から内挿計算する方法が提案され^[15]、計算精度を損なうことなく従来の修正レイノルズ方程式と同程度の計算時間の解析が可能となった。

本解析システムにおいては表3.1の流量係数表を使用する。個々のメッシュ点について、その近似値を表から検索し、ラグランジュの3点内挿補間により流量係数を求める。この表の D と Q_p 、および dQ_p/dD の関係を図3.1に示す。

表3.1 流量係数表^[13]

D	Q_p	dQ_p/dD
100.000	17.693306190	0.166564368
90.000	16.027773100	0.166540967
80.000	14.362515990	0.166508515
70.000	12.697649510	0.166461670
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
0.025	2.606731611	-18.441190220
0.020	2.710941117	-23.639722750
0.015	2.848947703	-32.423401620
0.010	3.049553175	-50.263246180

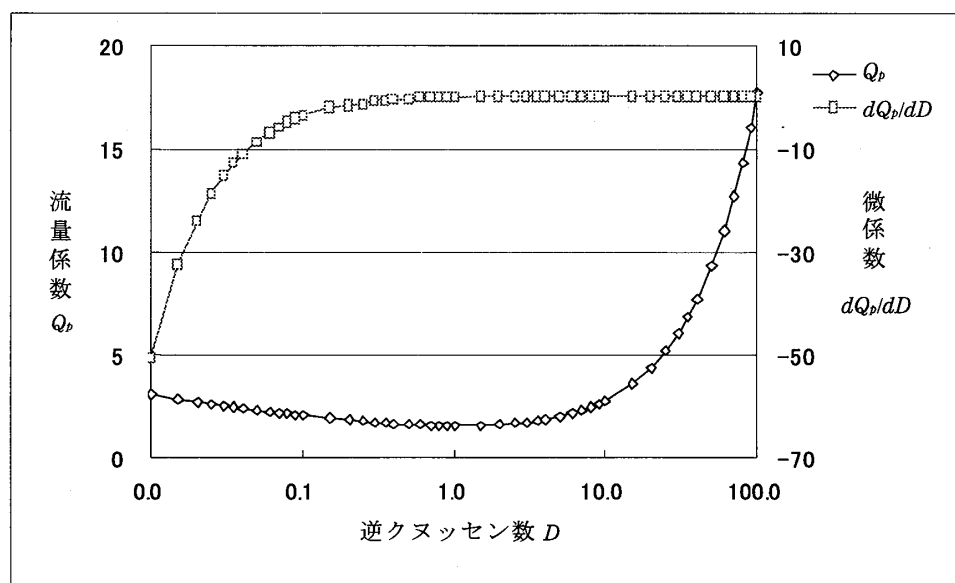


図3.1 逆クヌッセン数と流量係数の関係

4. 分子気体潤滑方程式の数値解法

4.1 ADI法を使用した解法

レイノルズ方程式の数値解法には、Whiteらによる factored implicit アルゴリズム^[16]が有効である。この手法は ADI 法 (Alternating Direction Implicit Method) の一種であり、潤滑方程式の非線形項を時間について展開して線形化し、 xy 座標のそれぞれの方向の 1 次元問題に帰着することにより $O((\Delta t)^2)$ の精度で高速計算を実現できる。各時間ステップでレイノルズ方程式を直接解いているために解が安定であり、定常状態の圧力分布とスライダの姿勢を同じアルゴリズムで求めることができる。

ここでは、分子気体潤滑方程式に ADI 法を適用した解析法を示す。分子気体潤滑方程式は

次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qph^3\frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(Qph^3\frac{\partial p}{\partial y}) = 6\mu U_x \frac{\partial}{\partial x}(ph) + 6\mu U_y \frac{\partial}{\partial y}(ph) + 12\mu \frac{\partial}{\partial t}(ph). \quad (1)$$

なお、積分はスライダ全面について行い、境界条件としてスライダの周囲の圧力を大気圧とする。

式(1)において、 $z=ph$ とおくと、 $Q(D) = Q(D_0ph) = Q(z)$ である。

ここで、 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(p)}{\partial x}h + p\frac{\partial(h)}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{h}(\frac{\partial z}{\partial x} - p\frac{\partial h}{\partial x})$ であるから、

$$\begin{aligned} (ph^3)\frac{\partial p}{\partial x} &= phh(\frac{\partial z}{\partial x} - p\frac{\partial h}{\partial x}) \\ &= zh\frac{\partial z}{\partial x} - z^2\frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

これを式(1)に適用し、さらに $\Lambda'_x = 6\mu U_x$, $\Lambda'_y = 6\mu U_y$, $\sigma' = 12\mu$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q(zh\frac{\partial z}{\partial x} - z^2\frac{\partial h}{\partial x})\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{Q(zh\frac{\partial z}{\partial y} - z^2\frac{\partial h}{\partial y})\right\} &= \Lambda'_x \frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda'_y \frac{\partial z}{\partial y} + \sigma' \frac{\partial z}{\partial t} \\ \sigma' \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q(zh\frac{\partial z}{\partial x} - z^2\frac{\partial h}{\partial x}) - \Lambda'_x z\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{Q(zh\frac{\partial z}{\partial y} - z^2\frac{\partial h}{\partial y}) - \Lambda'_y z\right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $F = Q(zh\frac{\partial z}{\partial x} - z^2\frac{\partial h}{\partial x}) - \Lambda'_x z$, $G = Q(zh\frac{\partial z}{\partial y} - z^2\frac{\partial h}{\partial y}) - \Lambda'_y z$

とすると、式(2)は

$$\sigma' z_t = F_x + G_y \quad (3)$$

と表せる。以下、 $\frac{\partial z}{\partial t}$ を z_t と記し、 z の t に関する偏微分とする。

積分の台形公式により、

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2}(z_t^n + z_t^{n+1}) + O((\Delta t)^3) \quad (4)$$

と表せるので、式(3)を式(4)に代入すると、

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2\sigma'}(F_x^n + G_y^n + F_x^{n+1} + G_y^{n+1}) + O((\Delta t)^3). \quad (5)$$

ここで、 n および $n+1$ は時間ステップを、また Δt はその間隔を表す。

いま、 $F = F(h, z, z_x, h_x, t)$, $G = G(h, z, z_y, h_y, t)$ であるため、これらを時間 t についてテイラー展開により線形化すると、

$$\begin{aligned} F^{n+1} - F^n &= \frac{\partial F^n}{\partial h}(h^{n+1} - h^n) + \frac{\partial F^n}{\partial h_x}(h_x^{n+1} - h_x^n) + \frac{\partial F^n}{\partial z}(z^{n+1} - z^n) + \frac{\partial F^n}{\partial z_x}(z_x^{n+1} - z_x^n) + O((\Delta t)^2), \end{aligned}$$

$$G^{n+1} - G^n = \frac{\partial G^n}{\partial h} (h^{n+1} - h^n) + \frac{\partial G^n}{\partial h_y} (h_y^{n+1} - h_y^n) + \frac{\partial G^n}{\partial z} (z^{n+1} - z^n) + \frac{\partial G^n}{\partial z_y} (z_y^{n+1} - z_y^n) + O((\Delta t)^2).$$

ここで, $\frac{\partial Q}{\partial D} = \bar{Q}$ とし, さらに,

$$A = \frac{\partial F^n}{\partial h} = \{Qz z_x\}^n,$$

$$B = \frac{\partial F^n}{\partial h_x} = \{-Qz^2\}^n,$$

$$C = \frac{\partial F^n}{\partial z} = \{D_0 \bar{Q} (zhz_x - z^2 h_x) + Q(hz_x - 2zh_x) - \Lambda'_x\}^n,$$

$$D = \frac{\partial F^n}{\partial z_x} = \{Qzh\}^n,$$

$$I = \frac{\partial G^n}{\partial h} = \{Qz z_y\}^n,$$

$$J = \frac{\partial G^n}{\partial h_y} = \{-Qz^2\}^n,$$

$$K = \frac{\partial G^n}{\partial z} = \{D_0 \bar{Q} (zhz_y - z^2 h_y) + Q(hz_y - 2zh_y) - \Lambda'_y\}^n,$$

$$L = \frac{\partial G^n}{\partial z_y} = \{Qzh\}^n$$

(C, K の計算では, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = \bar{Q} \frac{\partial (D_0 z)}{\partial z} = D_0 \bar{Q}$ の関係を使用している.)

とすると,

$$F_x^{n+1} - F_x^n = A(h^{n+1} - h^n) + B(h_x^{n+1} - h_x^n) + C(z^{n+1} - z^n) + D(z_x^{n+1} - z_x^n) + O((\Delta t)^2),$$

$$G_y^{n+1} - G_y^n = I(h^{n+1} - h^n) + J(h_y^{n+1} - h_y^n) + K(z^{n+1} - z^n) + L(z_y^{n+1} - z_y^n) + O((\Delta t)^2)$$

であり, さらに両辺を偏微分すると,

$$F_x^{n+1} = F_x^n + \delta_x \{A(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_x \{B(h_x^{n+1} - h_x^n)\} + \delta_x \{C(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_x \{D(\delta_x z^{n+1} - \delta_x z^n)\},$$

$$G_y^{n+1} = G_y^n + \delta_y \{I(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_y \{J(h_y^{n+1} - h_y^n)\} + \delta_y \{K(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_y \{L(\delta_y z^{n+1} - \delta_y z^n)\}$$

である (δ_x は x の偏微分演算子). これらを式(5)に代入し, $a = \frac{\Delta t}{2\sigma'}$ とすると,

$$\begin{aligned} z^{n+1} = & z^n + a [F_x^n + G_y^n \\ & + F_x^n + \delta_x \{A(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_x \{B(h_x^{n+1} - h_x^n)\} + \delta_x \{C(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_x \{D(\delta_x z^{n+1} - \delta_x z^n)\} \\ & + G_y^n + \delta_y \{I(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_y \{J(h_y^{n+1} - h_y^n)\} + \delta_y \{K(z^{n+1} - z^n)\} + \delta_y \{L(\delta_y z^{n+1} - \delta_y z^n)\}] \\ & + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

これを、 z^{n+1} 、 z^n について整理すると、

$$\begin{aligned} \{1-a(\delta_x C+\delta_x D\delta_x+\delta_y K+\delta_y L\delta_y)\}z^{n+1} &= \{1-a(\delta_x C+\delta_x D\delta_x+\delta_y K+\delta_y L\delta_y)\}z^n \\ &+ a[\delta_x\{A(h_x^{n+1}-h_x^n)\}+\delta_x\{B(h_x^{n+1}-h_x^n)\}+\delta_y\{I(h_y^{n+1}-h_y^n)\}+\delta_y\{J(h_y^{n+1}-h_y^n)\}] \\ &+ 2a(F_x^n+G_y^n)+O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} L_1(x) &= a(\delta_x C+\delta_x D\delta_x), \\ L_2(y) &= a(\delta_y K+\delta_y L\delta_y), \\ \phi &= 2a(F_x^n+G_y^n) \\ &+ a[\delta_x\{A(h_x^{n+1}-h_x^n)\}+\delta_x\{B(h_x^{n+1}-h_x^n)\}+\delta_y\{I(h_y^{n+1}-h_y^n)\}+\delta_y\{J(h_y^{n+1}-h_y^n)\}] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とし、 $O((\Delta t)^3)$ 以下の項を省略すると、式(6)は、

$$\{1-(L_1+L_2)\}z^{n+1} = \{1-(L_1+L_2)\}z^n + \phi$$

であり、 $\Delta z^n = z^{n+1} - z^n$ とすると、

$$\begin{aligned} \{1-(L_1+L_2)\}\Delta z^n &= \phi \\ \{[1-L_1][1-L_2]-L_1L_2\}\Delta z^n &= \phi \end{aligned} \quad (8)$$

である。ここで、式(8)の左辺{}内の第2項に注目すると、

$$\begin{aligned} L_1L_2\Delta z^n &= a^2(\delta_x C+\delta_x D\delta_x)(\delta_y K+\delta_y L\delta_y)\Delta z^n \\ &= \frac{\Delta t^2}{(2\sigma)^2}(\delta_x C+\delta_x D\delta_x)(\delta_y K+\delta_y L\delta_y)\left\{\frac{\Delta z^n}{\Delta t}\Delta t\right\} \\ &= \frac{\Delta t^3}{(2\sigma)^2}(\delta_x C+\delta_x D\delta_x)(\delta_y K+\delta_y L\delta_y)(z_t^n+O(\Delta t)) \end{aligned}$$

であり $O((\Delta t)^3)$ であるためこの項を省略すると、式(8)は以下のように表される。

$$\{[1-L_1][1-L_2]\}\Delta z^n = \phi. \quad (9)$$

ここで、式(9)を以下の2式に分解する。

$$(1-L_1)\Delta z^* = \phi, \quad (10)$$

$$(1-L_2)\Delta z^n = \Delta z^*. \quad (11)$$

つまり、まず式(10)を x 方向の1次元問題として解き、次に式(11)を y 方向の1次元問題として解くことができる。

4.2 不等分割メッシュを用いた中心差分による離散化

高ベアリング数 Λ の流れにおいて空間分割を等分割にした場合、急激な圧力変動が起こる領域（境界部分）の解が不安定となり振動する。この領域で圧力解を求めるためには、分割を細かくする必要がある。しかし、比較的安定な領域に関しても同様に細かく分割することは、計算コストを不必要に増大させることになる。そこで、急激な圧力変動が発生する境界部分は細かく分割し、あまり変化のない部分は粗く分割するための不等分割を行うことが有効である。潤滑方程式の空間微分には、メッシュの不等分割に対応可能な中心差分を適用する。これは、等分割区間における中心差分と同様に、テイラー展開を基に導くことができる^[7]。

差分を $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ とすると、テイラー展開により、

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x_{i-1} u_i' + \frac{1}{2!} (\Delta x_{i-1})^2 u_i'' - \frac{1}{3!} (\Delta x_{i-1})^3 u_i''' + \dots,$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x_i u_i' + \frac{1}{2!} (\Delta x_i)^2 u_i'' + \frac{1}{3!} (\Delta x_i)^3 u_i''' + \dots$$

が得られる。この2式から u_i'' を消去すれば、

$$u_i' = \frac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i-1} + \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} u_i + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i+1} + O((\Delta x)^2).$$

また、 u_i' を消去すれば、

$$u_i'' = \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} u_{i-1} - \frac{2}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} u_i + \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} u_{i+1} + O((\Delta x)^2)$$

が得られる（3階以降の微分の項は省略）。ここで、 $O((\Delta x)^2)$ の項を省略すると、2次元で x, y それぞれに関する1階偏微分、および2階偏微分は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^3 A_k(i) u_{i+2-k,j},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^3 B_k(j) u_{i,j+2-k},$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 C_k(i) u_{i+2-k,j},$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \sum_{k=1}^3 D_k(j) u_{i,j+2-k}.$$

ここで、係数 A, C は以下のように定義されるが、 B, D についても同様である。

$$A_1(i) = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)},$$

$$C_1(i) = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})},$$

$$A_2(i) = \frac{-2}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i},$$

$$C_2(i) = \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}},$$

$$A_3(i) = \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})},$$

$$C_3(i) = \frac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}.$$

この式において $\Delta x_{i-1} = \Delta x_i$ とした場合には、

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x},$$

となり、等分割における2次精度中心差分と同じ式となる。

この不等分割区間における中心差分を使用し、式(10)、式(11)を解く。

添字 i, j はスライダ面のメッシュ点番号 (i, j) を表す。

$$\begin{aligned} L_1 \Delta z_{i,j}^* &= \{a(\delta_x C + \delta_x D \delta_x)\} \Delta z_{i,j}^* \\ &= a[\delta_x (C \Delta z_{i,j}^*) + \delta_x (D \delta_x (\Delta z_{i,j}^*))] \\ &= a[(\delta_x C)(\Delta z_{i,j}^*) + C(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + (\delta_x D)(\delta_x \Delta z_{i,j}^*) + D(\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)]. \end{aligned} \quad (12)$$

いま、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial x} = \bar{Q} \frac{\partial (D_0 z)}{\partial x} = D_0 \bar{Q} z_x, \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{Q}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial x} = \bar{Q}^2 \frac{\partial (D_0 z)}{\partial x} = D_0 \bar{Q}^2 z_x \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

であるので、これを用いて式(12)に C, D を代入すると、

$$\begin{aligned} L_1 \Delta z_{i,j}^* &= a[\{D_0^2 \bar{Q}^2 z_x (zhz_x - z^2 h_x) + D_0 \bar{Q}((z_x hz_x + zh_x z_x + zh_{xx}) - (2z_x h_x + z^2 h_{xx}))\} \\ &\quad + D_0 \bar{Q} z_x (hz_x - 2zh_x) + Q((h_x z_x + hz_{xx}) - (2z_x h_x + 2zh_{xx}))\} (\Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{D_0 \bar{Q} (zhz_x - z^2 h_x) + Q(hz_x - 2zh_x) - \Lambda'_x\} (\delta_x \Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{D_0 \bar{Q} z_x (zh) + Q(z_x h + zh_x)\} (\delta_x \Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{Qzh\} (\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)] \\ &= a[\{D_0^2 \bar{Q}^2 z_x (zhz_x - z^2 h_x) + D_0 \bar{Q} (2hz_x^2 - 3zh_x z_x + zh_{xx} - z^2 h_{xx}) \\ &\quad + Q((h_x z_x + hz_{xx}) - (2z_x h_x + 2zh_{xx}))\} (\Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{D_0 \bar{Q} (2zhz_x - z^2 h_x) + Q(2hz_x - zh_x) - \Lambda'_x\} (\delta_x \Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{Qzh\} (\delta_x^2 \Delta z_{i,j}^*)] \\ &= a[\{D_0^2 \bar{Q}^2 z_x (zhz_x - z^2 h_x) + D_0 \bar{Q} (2hz_x^2 - 3zh_x z_x + zh_{xx} - z^2 h_{xx}) \\ &\quad + Q((h_x z_x + hz_{xx}) - (2z_x h_x + 2zh_{xx}))\} (\Delta z_{i,j}^*) \\ &\quad + \{D_0 \bar{Q} (2zhz_x - z^2 h_x) + Q(2hz_x - zh_x) - \Lambda'_x\} (C_3(i) \Delta z_{i-1,j}^* + C_2(i) \Delta z_{i,j}^* + C_1(i) \Delta z_{i+1,j}^*) \\ &\quad + \{Qzh\} (A_3(i) \Delta z_{i-1,j}^* + A_2(i) \Delta z_{i,j}^* + A_1(i) \Delta z_{i+1,j}^*)]. \end{aligned}$$

さらに、 z について整理すると、

$$\begin{aligned} L_1 \Delta z_{i,j}^* &= a[\{D_0 \bar{Q} (2zhz_x - z^2 h_x) + Q(2hz_x - zh_x) - \Lambda'_x\} C_3(i) + (Qzh) A_3(i)] (\Delta z_{i-1,j}^*) \\ &\quad + a[\{D_0^2 \bar{Q}^2 z_x (zhz_x - z^2 h_x) + D_0 \bar{Q} (2hz_x^2 - 3zh_x z_x + zh_{xx} - z^2 h_{xx}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q(-h_x z_x + h z_{xx} - 2z h_{xx}) \\
& + \{D_0 \bar{Q}(2zhz_x - z^2 h_x) + Q(2hz_x - zh_x) - \Lambda'_x\} C_2(i) + (Qzh) A_2(i) (\Delta z_{i,j}^*) \\
& + a [\{D_0 \bar{Q}(2zhz_x - z^2 h_x) + Q(2hz_x - zh_x) - \Lambda'_x\} C_1(i) + (Qzh) A_1(i)] (\Delta z_{i+1,j}^*).
\end{aligned} \tag{14}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
L_2 \Delta z_{i,j}^* & = a [\{D_0 \bar{Q}(2zhz_y - z^2 h_y) + Q(2hz_y - zh_y) - \Lambda'_y\} D_3(j) + (Qzh) B_3(j)] (\Delta z_{i,j-1}^*) \\
& + a [\{D_0 \bar{Q}^2 z_y (zhz_y - z^2 h_y) + D_0 \bar{Q}(2hz_y^2 - 3zh_y z_y + zh_{yy} - z^2 h_{yy}) \\
& + Q(-h_y z_y + h z_{yy} - 2z h_{yy})\} \\
& + \{D_0 \bar{Q}(2zhz_y - z^2 h_y) + Q(2hz_y - zh_y) - \Lambda'_y\} D_2(j) + (Qzh) B_2(j)] (\Delta z_{i,j}^*) \\
& + a [\{D_0 \bar{Q}(2zhz_y - z^2 h_y) + Q(2hz_y - zh_y) - \Lambda'_y\} D_1(j) + (Qzh) B_1(j)] (\Delta z_{i,j+1}^*).
\end{aligned} \tag{15}$$

また, 式(7)より,

$$\begin{aligned}
\phi & = 2a(F_x^n + G_y^n) \\
& + a[\delta_x \{A(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_x \{B(h_x^{n+1} - h_x^n)\} + \delta_y \{I(h^{n+1} - h^n)\} + \delta_y \{J(h_y^{n+1} - h_y^n)\}]
\end{aligned}$$

であるので, 右辺を第1項から順に解く.

(第1項)

$$\begin{aligned}
F_x^n & = D_0 \bar{Q} z_x (h z z_x - z^2 h_x) + Q(h_x z z_x + h z z_{xx} - 2z z_x h_x - z^2 h_{xx}) - \Lambda'_x z_x \\
& = D_0 \bar{Q} z_x z (h z_x - z h_x) + Q z_x (-h_x z + h z_x) + Q z (h z_{xx} - z h_{xx}) - \Lambda'_x z_x \\
& = (D_0 \bar{Q} z_x z + Q z_x) (h z_x - z h_x) + Q z (h z_{xx} - z h_{xx}) - \Lambda'_x z_x.
\end{aligned}$$

同様に,

$$G_y^n = (D_0 \bar{Q} z_y z + Q z_y) (h z_y - z h_y) + Q z (h z_{yy} - z h_{yy}) - \Lambda'_y z_y.$$

従って,

$$\begin{aligned}
2a(F_x^n + G_y^n) & = 2a [(D_0 \bar{Q} z_x z + Q z_x) (h z_x - z h_x) + Q z (h z_{xx} - z h_{xx}) - \Lambda'_x z_x \\
& + (D_0 \bar{Q} z_y z + Q z_y) (h z_y - z h_y) + Q z (h z_{yy} - z h_{yy}) - \Lambda'_y z_y] \\
& = 2a [(D_0 \bar{Q} z + Q) \{h(z_x^2 + z_y^2) - z(z_x h_x + z_y h_y)\} \\
& + Q z \{h(z_{xx} + z_{yy}) - z(h_{xx} + h_{yy})\} - (\Lambda'_x z_x + \Lambda'_y z_y)].
\end{aligned}$$

(第2項)

$$\begin{aligned}
a[\delta_x \{A(h^{n+1} - h^n)\}] & = a \{(\delta_x A)(h^{n+1} - h^n) + A(h_x^{n+1} - h_x^n)\} \\
& = a \{(D_0 \bar{Q} z_x^2 z + Q z_x^2 + Q z z_{xx})(h^{n+1} - h^n) + (Q z z_x)(h_x^{n+1} - h_x^n)\}.
\end{aligned}$$

(第3項)

$$\begin{aligned} a[\delta_x\{B(h_x^{n+1}-h_x^n)\}] &= a\{(\delta_x B)(h_x^{n+1}-h_x^n)+B(h_{xx}^{n+1}-h_{xx}^n)\} \\ &= a\{(-D_0\bar{Q}z_x z^2-2Qzz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)+(-Qz^2)(h_{xx}^{n+1}-h_{xx}^n)\}. \end{aligned}$$

(第4項)

$$\begin{aligned} a[\delta_y\{I(h^{n+1}-h^n)\}] &= a\{(\delta_y I)(h^{n+1}-h^n)+I(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\} \\ &= a\{(D_0\bar{Q}z_y z^2+Qz_y^2+Qzz_{yy})(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)\}. \end{aligned}$$

(第5項)

$$\begin{aligned} a[\delta_y\{J(h_y^{n+1}-h_y^n)\}] &= a\{(\delta_y J)(h_y^{n+1}-h_y^n)+J(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\} \\ &= a\{(-D_0\bar{Q}z_y z^2-2Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)+(-Qz^2)(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\}. \end{aligned}$$

従って、これら第1項から第5項までをまとめると、

$$\begin{aligned} \phi &= 2a[(D_0\bar{Q}z+Q)\{h(z_x^2+z_y^2)-z(z_x h_x+z_y h_y)\} \\ &\quad +Qz\{h(z_{xx}+z_{yy})-z(h_{xx}+h_{yy})\}-(\Lambda'_x z_x+\Lambda'_y z_y)] \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z_x^2 z+Qz_x^2+Qzz_{xx})(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)\} \\ &\quad +a\{(-D_0\bar{Q}z_x z^2-2Qzz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)+(-Qz^2)(h_{xx}^{n+1}-h_{xx}^n)\} \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z_y^2 z+Qz_y^2+Qzz_{yy})(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)\} \\ &\quad +a\{(-D_0\bar{Q}z_y z^2-2Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)+(-Qz^2)(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\} \\ &= 2a[(D_0\bar{Q}z+Q)\{h(z_x^2+z_y^2)-z(z_x h_x+z_y h_y)\} \\ &\quad +Qz\{h(z_{xx}+z_{yy})-z(h_{xx}+h_{yy})\}-(\Lambda'_x z_x+\Lambda'_y z_y)] \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z+Q)(z_x^2)(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_{xx})(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)\} \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z+Q)(-zz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)+(-Qzz_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)+(-Qz^2)(h_{xx}^{n+1}-h_{xx}^n)\} \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z+Q)(z_y^2)(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_{yy})(h^{n+1}-h^n)+(Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)\} \\ &\quad +a\{(D_0\bar{Q}z+Q)(-zz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)+(-Qzz_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)+(-Qz^2)(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\} \\ &= a(D_0\bar{Q}z+Q)[(z_x^2+z_y^2)(h^{n+1}+h^n)-zz_x(h_x^{n+1}+h_x^n)-zz_y(h_y^{n+1}+h_y^n)] \\ &\quad +a(Qz)[2\{h(z_{xx}+z_{yy})-z(h_{xx}+h_{yy})-(\Lambda'_x z_x+\Lambda'_y z_y)\} \\ &\quad +\{(z_{xx})(h^{n+1}-h^n)+(z_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)\} \\ &\quad +\{(-z_x)(h_x^{n+1}-h_x^n)+(-z)(h_{xx}^{n+1}-h_{xx}^n)\} \\ &\quad +\{(z_{yy})(h^{n+1}-h^n)+(z_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)\} \\ &\quad +\{(-z_y)(h_y^{n+1}-h_y^n)+(-z)(h_{yy}^{n+1}-h_{yy}^n)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a(D_0 \bar{Q}z + Q) [(z_x^2 + z_y^2)(h^{n+1} + h^n) - zz_x(h_x^{n+1} + h_x^n) - zz_y(h_y^{n+1} + h_y^n)] \\
 &\quad + a(Qz) \{ (h^{n+1} + h^n)(z_{xx} + z_{yy}) - z(h_{xx}^n + h_{yy}^n + h_{xx}^{n+1} + h_{yy}^{n+1}) - 2(\Lambda'_x z_x + \Lambda'_y z_y) \} \\
 &= a[(D_0 \bar{Q}z + Q) \{ (z_x^2 + z_y^2)(h^{n+1} + h^n) - zz_x(h_x^{n+1} + h_x^n) - zz_y(h_y^{n+1} + h_y^n) \} \\
 &\quad + (Qz) \{ (z_{xx} + z_{yy})(h^{n+1} + h^n) - z(h_{xx}^{n+1} + h_{xx}^n) - z(h_{yy}^{n+1} + h_{yy}^n) - 2(\Lambda'_x z_x + \Lambda'_y z_y) \}].
 \end{aligned}$$

ここまでで、式(10)、式(11)を解くために必要な $L_1(x)\Delta z_{i,j}^*$, $L_2(y)\Delta z_{i,j}^n$, ϕ が与えられた。

4.3 連立1次方程式の解法

上記までの $L_1(x)\Delta z_{i,j}^*$, $L_2(y)\Delta z_{i,j}^n$, ϕ をもとに、 Δz^n を求める。

これには三重対角行列による解法を使用する。

$$(1 - L_1(x))\Delta z^* = \phi, \tag{10}$$

$$(1 - L_2(y))\Delta z^n = \Delta z^*. \tag{11}$$

ここで、式(14)を以下のように表す(z の添字 j は省略)。

$$L_1(x)\Delta z_i^* = a_i(\Delta z_{i-1}^*) + b_i(\Delta z_i^*) + c_i(\Delta z_{i+1}^*).$$

この時、式(10)の連立1次方程式は、以下の $M \times M$ の三重対角行列を使用して表すことができ、これを解くことにより Δz^* が求められる (M はスライダの長さ方向の分割点数)。

$$\begin{bmatrix} 1-b_1 & -c_1 & & & \\ -a_2 & 1-b_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & -a_i & 1-b_i & -c_i & \\ & & -a_M & 1-b_M & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1^* \\ \Delta z_2^* \\ \vdots \\ \Delta z_i^* \\ \Delta z_M^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \phi_M \end{bmatrix}.$$

同様に、式(15)を以下のように表す(z の添字 i は省略)。

$$L_2(y)\Delta z_j^n = a_j(\Delta z_{j-1}^n) + b_j(\Delta z_j^n) + c_j(\Delta z_{j+1}^n).$$

この時、式(11)の連立一次方程式は、以下の $N \times N$ の三重対角行列を使用して表すことができ、これを解くことにより Δz^n が求められる (N はスライダの幅方向の分割点数)。

$$\begin{bmatrix} 1-b_1 & -c_1 & & & \\ -a_2 & 1-b_2 & -c_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & -a_j & 1-b_j & -c_j & \\ & & -a_N & 1-b_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1^n \\ \Delta z_2^n \\ \vdots \\ \Delta z_j^n \\ \Delta z_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1^* \\ \Delta z_2^* \\ \vdots \\ \Delta z_j^* \\ \Delta z_N^* \end{bmatrix}$$

5. 数値計算システムの処理の流れ

本システムでは、スライダの運動方程式とボルツマン方程式に基づく潤滑方程式を時間領域で連立させて解き、その結果をリアルタイムで可視化する。処理の流れは図5.1の通りである。

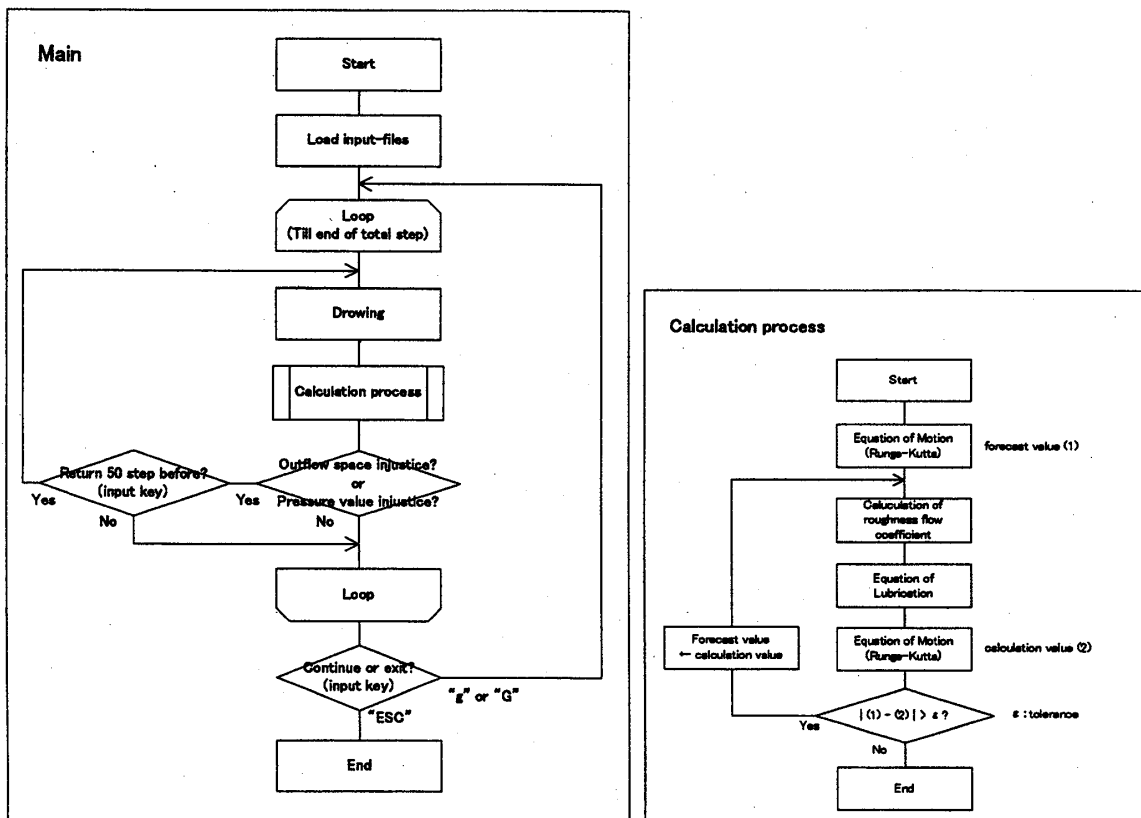


図5.1 数値計算システムの処理の流れ

メイン処理として、時間ステップ毎に以下の処理を繰り返し行う。

- (1) 圧力分布の描画
- (2) 圧力解の計算
 - ・現在の時刻 (t) における圧力分布を用いて、スライダの運動方程式により次の時刻 ($t+1$) のスライダ姿勢を求める (ルンゲ・クッタ法).
 - ・このスライダ姿勢を予測値として、潤滑方程式により次の時刻 ($t+1$) の圧力分布を求める (ADI法).
 - ・この圧力分布を用いて、再度運動方程式よりスライダの姿勢を求め、これが予測値と一致するまで収束計算を行う.
- (3) 上記で求めた圧力値, または流出すきまが不正値であれば数ステップ前に戻り, 時間幅などのパラメータ修正を行う.

6. 空間微分における離散値化法の検討

空間微分法として2次精度の中心差分を使用した場合, 分割が粗い場合には圧力分布が流出端付近でギザギザなのこぎり波状になる. 適切な計算法を使用しなかった場合に発生するこの現象は, これまでも多く報告されている^[3].

潤滑すきま内の空気流は流入端から流出端に向かって流れ, 圧力は流入端から流出端に向かって伝わる. これを考慮すると, 流出端側よりも流入端側の圧力の影響を大きく受けることが予想される. 従って, 走行面速度の影響を受けるせん断流れの項の微分法としては, 中心差分ではなく, 上流差分を用いるのが適当と思われる^[3]. そこで, 本章では中心差分, 1次精度の上流差分 (1次上流差分), および2次精度の上流差分 (2次上流差分) で圧力分布およびすきま分布を示し, 解の安定性と精度を比較する.

本システムで使用するスライダの諸元を表6.1に, スライダの形状を図6.1に示す. 押付荷重は $F=29\text{mN}(3\text{gf})$ としているが, これは実験のパターンに応じて変更する. また, 本章の実験パターンでメッシュ分割を「級数」としている場合は, スライダの4端およびテーパとフラットの境界付近でメッシュ分割を細かくした 200×19 の不等分割である. それ以外の場合 (20×10 , 50×10 , 100×20) は等分割である.

表6.1 スライダの諸元

Length	[mm]	2.00
Width	[mm]	1.56
Mass	[g]	5.48
Inertia(pitching)	[mg·mm ²]	2.11
Load	[mN]	29

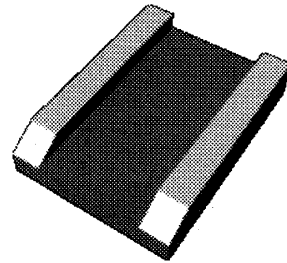


図6.1 スライダの形状

6.1 1次上流差分

空間分割 Δx に対する1次精度の上流差分近似は、次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

本節ではせん断流れの項の微分に中心差分（従来法）を使用した場合と、上記の1次上流差分を使用した場合の安定性と精度を比較する。ここでは押付荷重を増加させることによりすきまを小さくし、それぞれのすきまで圧力分布およびすきま分布（流入端、流出端）を確認する。結果として、流入端、流出端のすきま [m]、およびその時のベアリング数 ($\Lambda = \frac{6\mu Ul}{p_a h_0^2}$, μ : 空気の粘性係数, U : 走行面の速度, l : スライダ長, p_a : 大気圧, h_0 : 流出端すきま) を表6.2-6.10に、軸受中心線における圧力分布 [kgf/m²] ($x=0$: 流入端, $x=1$: 流出端) を図6.2-6.10にまとめた。

A. メッシュ分割点 $M \times N = 50 \times 10$ の場合

【条件】押付荷重: 0.003 [kgf]

【結果】表6.2, 図6.2参照

表6.2 すきま分布 (50*10, 0.003 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	4.34E-07	4.94E-07
流出端すきま	1.79E-07	1.82E-07
Λ	948.2	919.7

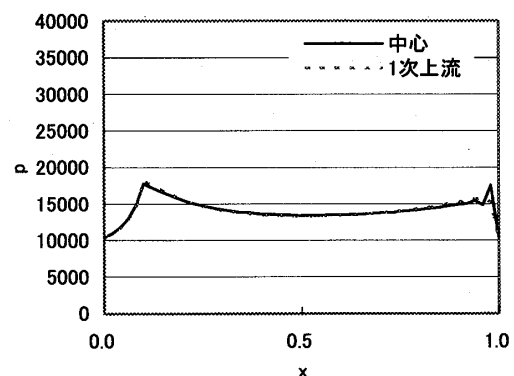


図6.2 圧力分布 (50*10, 0.003 [kgf])

【条件】 押付荷重：0.007 [kgf]

【結果】 表6.3, 図6.3参照

表6.3 すきま分布 (50*10,0.007 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	1.95E-07	2.33E-07
流出端すきま	9.33E-08	9.42E-08
Λ	3483.3	3422.2

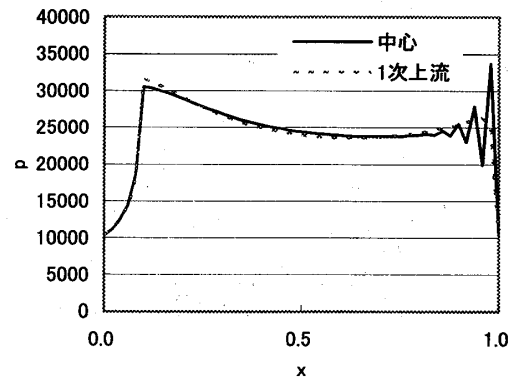


図6.3 圧力分布 (50*10,0.007 [kgf])

【条件】 押付荷重：0.108 [kgf]

【結果】 表6.4, 図6.4参照

表6.4 すきま分布 (50*10,0.108 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	1.27E-08	1.68E-08
流出端すきま	1.75E-08	2.15E-08
Λ	99130.7	65854.4

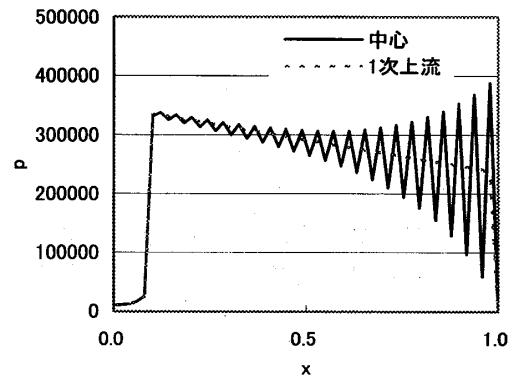


図6.4 圧力分布 (50*10,0.108 [kgf])

B. メッシュ分割点 $M \times N = 100 \times 20$ の場合

【条件】 押付荷重：0.003 [kgf]

【結果】 表6.5, 図6.5参照

表6.5 すきま分布 (100*20,0.003 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	4.25E-07	4.61E-07
流出端すきま	1.79E-07	1.82E-07
Λ	946.5	920.8

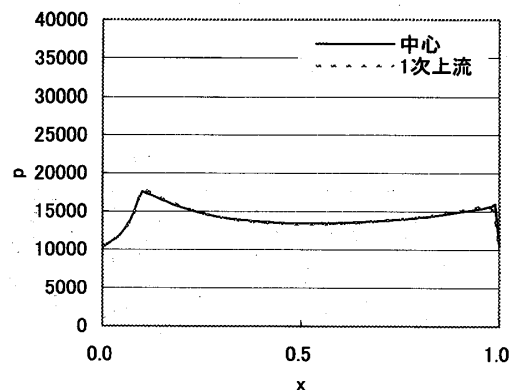


図6.5 圧力分布 (100*20,0.003 [kgf])

【条件】 押付荷重：0.007 [kgf]

【結果】 表6.6, 図6.6参照

表6.6 すきま分布 (100*20,0.007 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	1.87E-07	2.12E-07
流出端すきま	9.30E-08	9.46E-08
Λ	3508.8	3393.4

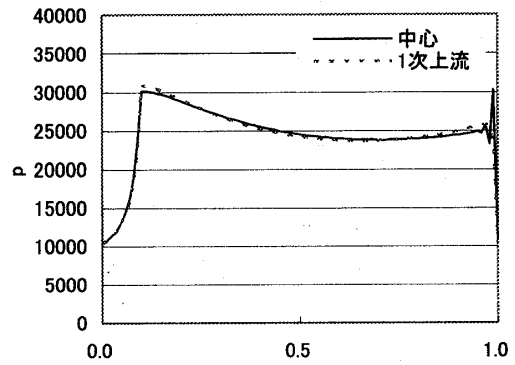


図6.6 圧力分布 (100*20,0.007 [kgf])

【条件】 押付荷重：0.108 [kgf]

【結果】 表6.7, 図6.7参照

表6.7 すきま分布 (100*20,0.108 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	1.12E-08	1.42E-08
流出端すきま	1.66E-08	1.98E-08
Λ	110040.1	77749.3

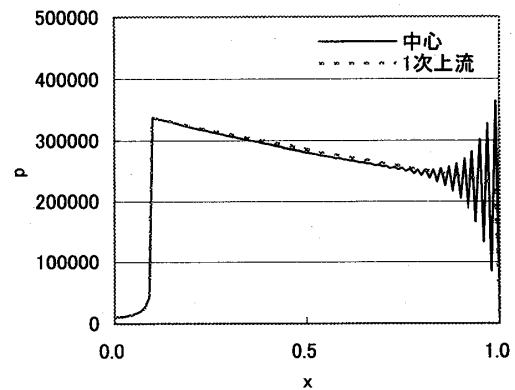


図6.7 圧力分布 (100*20,0.108 [kgf])

C. メッシュ分割が級数 (200×19) の場合

【条件】 押付荷重：0.003 [kgf]

【結果】 表6.8, 図6.8参照

表6.8 すきま分布 (級数,0.003 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	4.22E-07	4.21E-07
流出端すきま	1.78E-07	1.79E-07
Λ	956.9	945.7

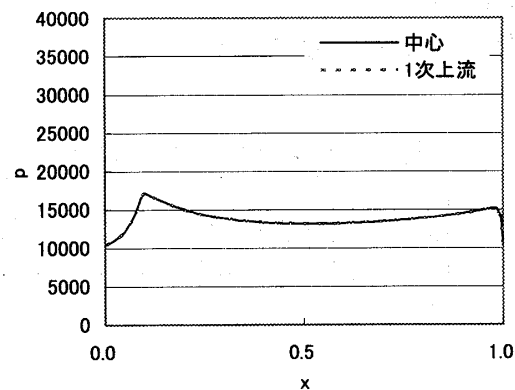


図6.8 圧力分布 (級数,0.003 [kgf])

【条件】押付荷重：0.007 [kgf]

【結果】表6.9, 図6.9参照

表6.9 すきま分布 (級数,0.007 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	1.83E-07	1.81E-07
流出端すきま	9.22E-08	9.26E-08
Λ	3571.8	3538.6

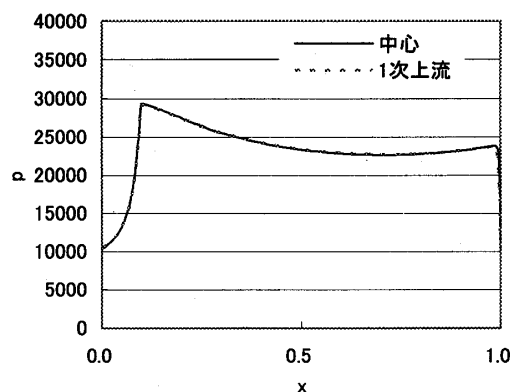


図6.9 圧力分布 (級数,0.007 [kgf])

【条件】押付荷重：0.108 [kgf]

【結果】表6.10, 図6.10参照

表6.10 すきま分布 (級数,0.108 [kgf])

	中心	1次上流
流入端すきま	9.84E-09	9.41E-09
流出端すきま	1.52E-08	1.47E-08
Λ	130989.2	141278.6

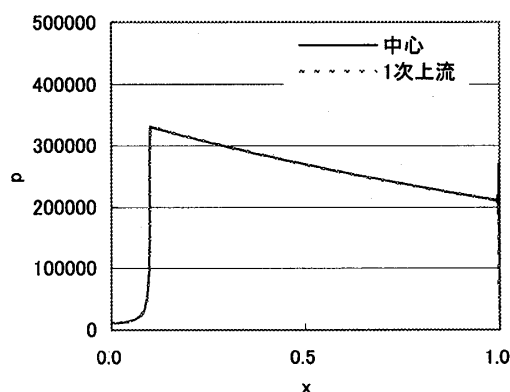


図6.10 圧力分布 (級数,0.108 [kgf])

これらの結果を以下にまとめる。

- 中心差分, 上流差分ともに, 荷重約0.15 [kgf], 流出端すきま15nm 程度までは収束することが確認できたが, 15nm より小さくなると, 時間方向の圧力差分が次第に収束しなくなり, 5nm に近くなると, 解が発散した。
- メッシュ分割が不等分割で細かい場合 (C), 中心差分, 1次上流差分はいずれも同じ圧力分布を示しており, すきま分布もほぼ同じ結果を得ている。この時の解が最も精度が高いと考えられる。
- 中心差分の等分割で分割が粗く, かつすきまが小さい場合に流出端付近でのこぎり波状の圧力解が発生したが, 上流差分では分割が粗く, かつすきまが小さい場合においても安定した圧力解が得られた。
- しかし, 上流差分で分割が粗い場合 (A) には, 流入端のすきまが大きくなる。また, 分割が粗い場合 (A) を分割が細かい場合 (C) と比較すると, 押付荷重を大きくした場合 (すきまを小さくした場合) に, スライドの浮上量がかなり高くなることが分かる。1次上流差分では, 解が安定化するものの精度はあまりよくないといえる。

6.2 2次上流差分

1次精度の上流差分は解が安定化するものの精度がよくない。そこで、本節ではメッシュの不等分割に対応可能な2次精度の上流差分近似を検討する。この場合も中心差分同様に、テイラー展開を基に導くことができる。

差分を $\Delta x_{i-2} = x_{i-1} - x_{i-2}$, $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ とすると、テイラー展開により、

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x_{i-1} u_i' + \frac{1}{2!} (\Delta x_{i-1})^2 u_i'' - \frac{1}{3!} (\Delta x_{i-1})^3 u_i''' + \dots,$$

$$u_{i-2} = u_i - (\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1}) u_i' + \frac{1}{2!} (\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})^2 u_i'' - \frac{1}{3!} (\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})^3 u_i''' + \dots$$

が得られる。この2式から u_i'' を消去すれば、

$$u_i' = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-2}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})} u_{i-2}' - \frac{\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}} u_{i-1}' + \frac{2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})} u_i' + O((\Delta x)^2)$$

が得られる(3階以降の微分の項は省略)。ここで、 $O((\Delta x)^2)$ の項を省略すると、2次元での x, y それぞれに関する1階偏微分は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 E_k(i) u_{i+1-k,j}$$

ここで、係数 E は以下のように定義される。

$$E_1(i) = \frac{\Delta x_{i-2} + 2\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})},$$

$$E_2(i) = \frac{-(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})}{\Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}},$$

$$E_3(i) = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-2}(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1})}.$$

この式において $\Delta x_{i-2} = \Delta x_{i-1}$ とした場合には、

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 3u_{i,j}}{2\Delta x}$$

となり、等分割における2次上流差分と同じ式となる。

ここで、中心差分、1次上流差分、2次上流差分を使用した場合の比較の結果を表6.11-6.14、図6-11-6.14に示す。

A. メッシュ分割点 $M \times N = 50 \times 10$ の場合

【条件】 押付荷重 : 0.003 [kgf]

【結果】 表6.11, 図6.11参照

表6.11 すきま分布 (50*10,0.003 [kgf])

	中心	1次上流	2次上流
流入端すきま	4.34E-07	4.94E-07	4.19E-07
流出端すきま	1.79E-07	1.82E-07	1.71E-07
Λ	948.2	919.7	1040.1

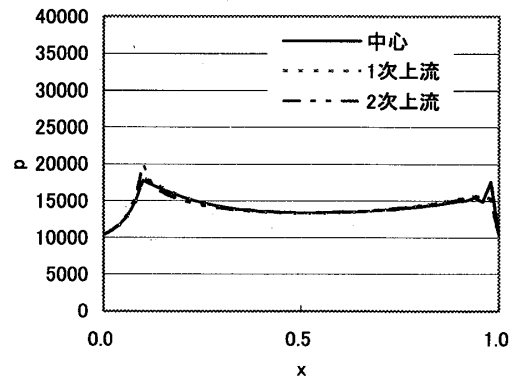


図6.11 圧力分布 (50*10,0.003 [kgf])

【条件】 押付荷重 : 0.108 [kgf]

【結果】 表6.12, 図6.12参照

表6.12 すきま分布 (50*10,0.108 [kgf])

	中心	1次上流	2次上流
流入端すきま	1.27E-08	1.68E-08	1.30E-08
流出端すきま	1.75E-08	2.15E-08	1.63E-08
Λ	99130.7	65854.4	114300.3

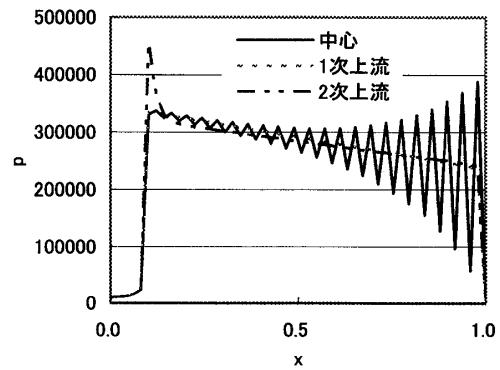


図6.12 圧力分布 (50*10,0.108 [kgf])

B. メッシュ分割が級数 (200×19) の場合

【条件】 押付荷重 : 0.003 [kgf]

【結果】 表6.13, 図6.13参照

表6.13 すきま分布 (級数,0.003 [kgf])

	中心	1次上流	2次上流
流入端すきま	4.22E-07	4.21E-07	4.20E-07
流出端すきま	1.78E-07	1.79E-07	1.78E-07
Λ	956.9	945.7	960.8

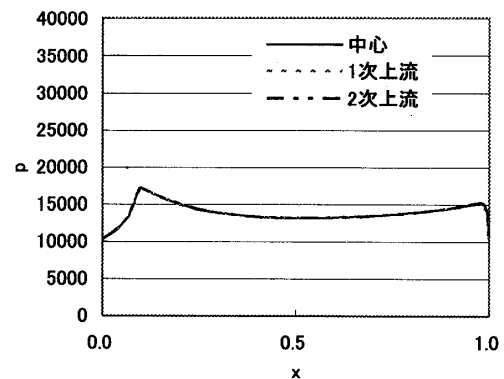


図6.13 圧力分布 (級数,0.003 [kgf])

【条件】押付荷重：0.108 [kgf]

【結果】表6.14, 図6.14参照

表6.14 すきま分布 (級数,0.108 [kgf])

	中心	1次上流	2次上流
流入端すきま	9.84E-09	9.41E-09	9.13E-09
流出端すきま	1.52E-08	1.47E-08	1.43E-08
Λ	130989.2	141278.6	149150.6

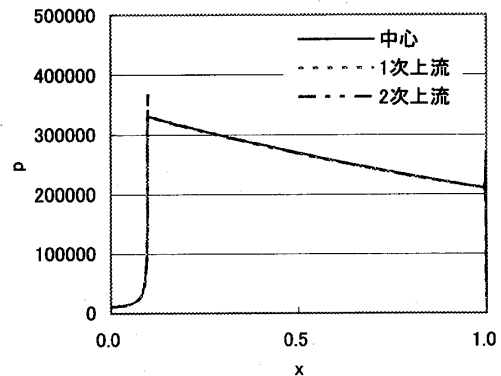


図6.14 圧力分布 (級数,0.108 [kgf])

これらの結果を以下にまとめる。

- 2次上流差分では、テーパとフラットの境界で、圧力解が一時的に大きな値となっているが、それ以外のところでの圧力分布は、1次上流差分とほぼ同じ結果となった。
- 2次上流差分では、分割が粗く (Λ) 荷重が大きい場合 (表6.12, 図6.12), 1次上流差分に比べ高精度な浮上量が得られた。しかし、中心差分に比べ流入端すきまは大きくなり、流出端すきまは小さくなった。これは、テーパとフラットの境界で高圧力解が発生したことにより、スライダにピッチング角方向の力が加わったことが原因と考えられる。

6.3 空気膜形状を固定した場合の比較

浮動スライダの場合には、1次上流差分、2次上流差分で収束時の圧力解の違いはほとんどみられなかった。そこで、本節ではスライダの姿勢を固定した場合 (運動方程式は解かずに潤滑方程式のみ解く) の、中心差分、1次上流差分、2次上流差分の圧力解の計算結果を比較する。比較した結果を図6.15-6.18に示す。

【条件】流入端すきま：2.25E-07, 流出端すきま：9.51E-08, Λ ：3351.9

A. メッシュ分割点 $M \times N = 20 \times 10$ の場合

【結果】図6.15参照

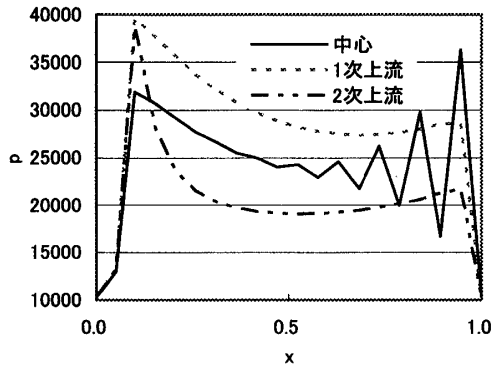


図6.15 圧力分布 (20*10)

B. メッシュ分割点 $M \times N = 50 \times 10$ の場合

【結果】図6.16参照

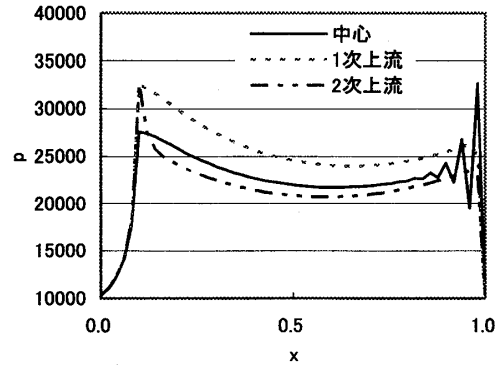


図6.16 圧力分布 (50*10)

C. メッシュ分割点 $M \times N = 100 \times 20$ の場合

【結果】図6.17参照

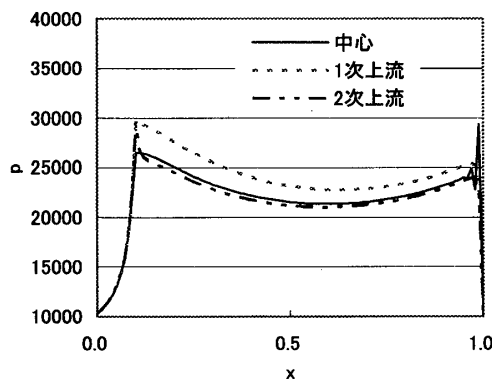


図6.17 圧力分布 (100*20)

D. メッシュ分割が級数 (200x19) の場合

【結果】図6.18参照

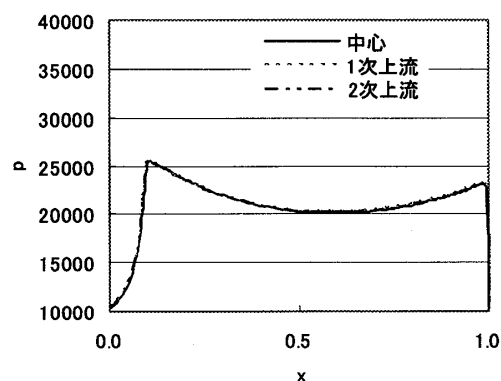


図6.18 圧力分布 (級数)

これらの結果を以下にまとめる。

- 特に分割が粗い場合、中心差分、1次上流差分、2次上流差分で圧力分布が大きく異なる。分割が粗い場合には、中心差分では、浮動スライダの場合と同様に流出端付近でのこぎり波状の振動が発生する。
- 特に分割が粗い場合、1次上流差分では全体的に圧力が高くなる。それに比べ、2次上流差分では、テーパとフラットの境界付近で圧力が高くなるものの、それ以外のところでは分割が細かい場合とほぼ同じ圧力分布となった。スライダ姿勢を固定した場合にも、2次精度の上流差分が有効であると考えられる。

7. まとめ

本稿では、浮動ヘッドスライダの運動方程式、潤滑方程式を示した後、ADI法を適用して時間分割の2次の精度で解析を行う為の潤滑方程式の離散値化法を示した。また、潤滑方程式の数値計算法として、空間微分における離散値化法の検討を行った。微分法としては、中心差分（従来法）、1次精度の上流差分、2次精度の上流差分の3つの方法を取りあげ、圧力分布およびすきま分布を比較した。結果は以下のとおりである。

- 中心差分：分割が粗く、かつすきまが小さい場合に流出端付近でのこぎり波状の圧力分布が発生する。
- 1次上流差分：中心差分で発生する流出端付近でのこぎり波状の圧力分布は改善され、圧力解が安定することは確認できたが、スライダの浮上量が高くなり、精度があまり高くない。
- 2次上流差分：中心差分で発生する流出端付近でのこぎり波状の圧力分布は改善され、圧力解が安定することは確認できた。また、スライダの浮上量についても改善され、高い精度が得られた。ただ、テーパとフラットの境界で高圧力解による誤差が発生するため、テーパとフラットの境界付近では中心差分を用いるなどの考慮が必要である。

3つの差分法を比較したが、2次精度の上流差分が最も高い安定性、精度が得られた。

現在、スライダとディスクのすきまが微小化するに伴い、安定性、精度の高い計算法が求められる。本稿では空間微分における離散値化法として、せん断流れに対する3つの差分法を比較したが、さらに、指数法やCIP法の適用を行い、より安定性、精度の高い計算法を検討していきたい。

謝辞

本研究の一部は科学研究費（基盤研究（B）, 課題番号 14350086）によって行われたことを付記する。

参考文献

- [1] 多川則男：“超高密度ハードディスクにおけるナノトライボロジー”，49, 8, 651 (2004).
- [2] Fukui, S. and Kaneko, R.：“Experimental investigation of externally pressurized gas bearings under high Knudsen number conditions”, *Trans. ASME J. Tribology*, 110, 1, 144 (1988).
- [3] 金子礼三：“流体潤滑の数値計算における離散値化手法”，潤滑, 29, 9, 633 (1984).
- [4] 川端信義：“気体潤滑膜流れの離散値化手法”，トライボロジスト, 38, 9, 779 (1993).
- [5] 川端信義：“高 Δ 領域の気体潤滑レイノルズ方程式の数値計算”，日本機械学会論文集（C編）, 52, 484, 3277 (1986).

- [6] 川端信義：“高 Λ 領域の気体潤滑レイノルズ方程式の数値計算（第2報）”，日本機械学会論文集（C編），54, 504, 1911（1988）.
- [7] 小西範和・山根清美・福井茂寿・鈴木允：“ニアコンタクト領域のMGLダイナミクス解析”，機械学会2000年度年次大会講演論文集(II)，No.00-1, 171（2000）.
- [8] 堀幸夫：“流体潤滑”，養賢堂（2002）.
- [9] Burgdorfer, A.：“The Influence of the Molecular Mean Free Path on the Performance of Hydrodynamic Gas-Lubricated Bearings”，*Trans. ASME, Ser.D*, 81, 1, 94（1959）.
- [10] Hsia, Y. and Domoto, G. A.：“An Experimental Investigation of Molecular Rarefaction Effects in Gas-Lubricated Bearings at Ultra-Low Clearances”，*Trans. ASME, Ser.F*, 105, 1, 120（1983）.
- [11] 大久保俊文・三矢保永：“高クヌッセン数条件下で気体潤滑されたスライダ軸受の実験的検討”，日本機械学会論文集（C編），51, 462, 304（1985）.
- [12] 大久保俊文・岸田順一・福井茂寿・安田享祐：“可視レーザー干渉を利用した浮動ヘッドスライダ浮上特性の精密測定”，日本機械学会論文集（C編），53, 487, 839（1987）.
- [13] 福井茂寿・金子礼三：“ボルツマン方程式に基づく薄膜気体潤滑特性の解析（第1報）”，日本機械学会論文（C編），53, 487, 829（1987）.
- [14] 福井茂寿・金子礼三：“ボルツマン方程式に基づく薄膜気体潤滑特性の解析（第2報）”，日本機械学会論文（C編），53, 492, 1807（1987）.
- [15] Fukui, S. and Kaneko, R.：“A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for High Knudsen Number Lubrication Problems”，*Trans. ASME J.Tribology*, 112, 78（1990）.
- [16] White, J. W. and Nigam, A.：“A Factored Implicit Scheme for the Numerical Solution of the Reynolds Equation at Very Low Spacing”，*Trans. ASME, Ser.F*, 102, 80（1980）.
- [17] 日本機械学会編：“流れの数値シミュレーション”，コロナ社（1988）.