ユークリッド原論巻Ⅰの前半についての考察

深田　陽司

要　旨

本論では，ユークリッド原論巻Ⅰにおける公理および前半の26個の命題を考察した．まず公理について考察し，５つの公理（文献によっては９個の公理）では，これら26個の命題の証明に不十分であると問題提起し，いくつかの追加公理を提案した．次に26個の命題を考察し，各命題の証明において暗黙的に使用されている事実（線分の長さに対する交換則と結合則など）を命題として明示し証明する．さらに命題Ⅰ･7とⅠ･24を詳しく考察する．前者は命題Ⅰ･8（三辺合同）の補助定理であるが，異なる場合での証明には異なる命題が必要であり，後者では論理が飛躍しすぎていることを指摘する．

Considerations on the First Half of Volume I of Euclid's Elements

Youji FUKADA

Abstract

In this paper, considerations are described on the first half of Volume I of Euclid's Elements. First, only 5 axioms (or 9 in the other references) are shown not to be sufficient to prove the first 26 propositions, then several additional axioms are proposed. Second, those facts implicitly used in the proof of each proposition are stated explicitly as propositions and proved as a result of the examinations of each of the 26 propositions. Thirdly, 2 Propositions, I•7 and I•24, among them are precisely examined. Consequently, it is shown that the former has to be separately proved for different cases and the latter has a large logical leap in its proof.

1．はじめに

数学における2つの基本的概念である数と空間は，農業の開始（B.C.15000～10000）とともに生まれたが，そのうち後者は古代エジプト（B.C.3000頃）やメソポタミア（B.C.1800頃）を経て，B.C.5世紀頃に黄金期を迎えた古代ギリシャで幾何学として画期的発展をみた．それは定理の数が単に量的に増えたからではなく，現代数学の基本的枠組みである公理主義がユークリッド（B.C.330?～275?）によって確立されたからである[1]．その成果は“ユークリッド原論”としてまとめられ[2],[3]，アルキメデス（B.C.287?～212）によるπの計算や球と円柱の研究へと引き継がれた[4]．さらに，I．ニュートン（1809～1865）やB．ラッセル（1872～1970）などの近現代の研究者までも含めた科学者のバイブルとなってきた[5]．

ところで，ユークリッド以前にも多くの数学者が輩出しており，それぞれ重要な貢献をしている．タレス（B.C.624?～546?）は論証数学の父と呼ばれたし，ピタゴラス（B.C.572?～492?）は三平方の定理を証明し，ヒポクラテス（B.C.470?～430?）は3大作図問題の1つである円の正方形化（約2300年経た19世紀末についに不可能であることが証明された）の引き金を引いたし，ユードクソス（B.C.408?～355?）は相似の概念に必要な比例の定理と積分の原型ともいえるとり尽くし法を考え出した[1],[5]．ユークリッドはこれら先人の成果を単にまとめたのではなく，彼自身の成果も含めてユークリッド幾何学として一つの公理体系を構築したのである．

“ユークリッド原論”はあまりにも有名なので，他にも“ユードクソスの原論”など原論というタイトルを持つ書物があるにも拘わらず，“原論”といえば“ユークリッド原論”を指すほどである．“原論”は13巻から成り，全部で463個の命題が証明されている[2],[3]．ギリシャ時代の数学といえば幾何学を指していたが，“ユークリッド原論”では幾何だけでなく，素数やユークリッド互除法などの整数論も論じられている．

西洋文明の生んだあらゆる書物の中で，“ユークリッド原論”以上に熱心に吟味されたのは聖書しかないといわれており，20世紀以上にわたって全世界で学ばれ分析されてきた．また多くの書物に紹介され，命題の証明におけるいくつかの不備が指摘されている[5],[6]．巻Iでいえば，正三角形の作図に際して，2つの円の交点が存在することを保証する公準や公理がないことや，合同の証明に際して，一方の三角形を持ち上げて重ね合わせることの危険性（図形の変形や歪の危険性）などであり，D．ヒルベルト（1862～1943）はユークリッド幾何学の完全性を追求して，20個の公準（5分類され，公理と呼ばれている）から成る幾何学を構築している[1],[5]．

本論では，ユークリッド幾何学でなく“ユークリッド原論”を考察する．まず公理について考察し，5つの公理[3],[5]（または9個の公理[2],[6]）では命題の証明に不十分であると問題提起して追加公理を提案する．次に巻Iの前半の命題について考察し，各命題の証明において暗黙的に用いられている事実を命題として明示し証明する．さらに，命題I・7（三辺合同であるI・8の補助定理）とI・24を詳しく考察する．前者については場合分けが必要（つまり異なる場合での証明には異なる命題が必要）であり，後者では論理が飛躍しすぎていることを指摘する．

2．公準と公理と定義

“原論”の巻Ⅰは，いきなり点や線および円を含む図形などに関する23個の定義と，要請である公準と共通概念として公理を列挙することから始まっている．本章では，まずこれら5つの公準と5つの公理を列挙し[3],[5]（または9個の文献もある[2],[6]），次に公理について考察し最後に定義を述べる．なお付録を含めて本論において角括弧でくくった記述は，“原論”の記述をわかりやすくするために筆者が付け加えた説明である．

2．1　公準と公理

公準は幾何に関する要請であり，公理は一般的な共通概念である．なお“原論”を再構築したD．ヒルベルトは，これらを区別することなくすべて公理と呼んでいる[1]．

公準

1．任意の点から任意の点へ直線を引くこと（ができる）．
2．有限直線を連続して一直線に延長すること（ができる）．
3．任意の点と距離（半径）とをもって円を描くこと（ができる）．
4．すべての直角は互いに等しい．
5．平面上の1直線が2直線に交わり，同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば，この直線は限りなく延長されると，2直角より小さい角のある側において交わる．

公理（公理番号については次節参照）

1．同じものに等しいものはまた互いに等しい．
［つまり，$a=b$で$b=c$ならば，$a=c$．］
2．また等しいものに等しいものが加われば，全体は等しい．
［つまり，$a=b$で$c=d$ならば，$a+c=b+d$．］
3．また等しいものから等しいものがひかれれば，残りは等しい．
［つまり，$a=b$で$c=d$ならば，$a-c=b-d$．］
7．また互いに重なり合うものは互いに等しい．［幾何でいえば，合同なものは互いに等しい．］
8．また全体は部分より大きい．

公準1～3から分かるように，作図に際して利用できる道具は，目盛りのない定規（直線を引く機能のみ）とユークリッドのコンパスのみである．ユークリッドのコンパスとは，現代コンパスと異なり，紙面上で所定の長さにコンパスを開いても，紙から持ち上げると閉じてしまうコンパスのことである．現代コンパスの機能は，命題Ⅰ・2によって保証される（3章参照）．

2．2 公理に対する考察

公準についてはこれまで多くの議論がなされてきた．特に平行線公準は，簡潔さにおいて他の4つの公準とは明らかに異なっており，また自明の真理とも思えない（現在の公理主義では単なる要請でよいが，初期には自明の真理を要請していた）．そこで公準5は，公準でなく命題である，つまり他の公準や公理から証明できるのではないかという議論があり，多くの数学者を長い間悩ませてきた．そして，C．ガウス（1777～1855）やG．リーマン（1826～1866）らはそれぞれ独自の研究結果から，別種の幾何学である非ユークリッド幾何学を展開し，その創始者と呼ばれている．またD．ヒルベルトは，問題視された交点（例えば命題Ⅰ・1）や合同関係（例えば命題Ⅰ・4）などを公準化し，厳密な幾何学（幾何学基礎論）を構築した[1]．

一方公理については，公準ほどの研究は見当たらない．本節では公理について考察する．“原論”で与えられた証明（付録にあげた証明の例は式を使用しているが，理解しやすくするためだけの理由であり，展開自体は変更していない）は文章で記述されていることもあり，一見問題がないように見える[2]．しかし，命題Ⅰ・7を例にとると，付録における式(7-3)の導出は，前節で列挙した5つの公理だけからは導出できない．なぜなら不等関係は5つの公理のうちでは公理8しかなく，公理8では2つの値の不等関係は結果として得られる（全体をaとし部分をbとすると，$a>b$）のであり，条件として使われていない．つまり不等関係が条件文に現れる命題が，5つの公理から証明されることはないのである．例えば，

$a>b$で$c=d$ならば，$a+c>b+d$

などは，5つの公理だけからは導けない．

ところで，“原論”は長い年月の間に，さまざまな時代にさまざまな版を重ねて伝承されてきている．文献[2]において，「底本になったハイベルク版には5個の公理が存在する」と訳者は解説で述べているにも拘わらず，5つの公理の他に以下に挙げる4つの公理（4～6と9）を挙げている．上記の例が公理4であり，命題Ⅰ・21（付録参照）やⅠ・17の証明では公理4を暗黙的に用いている．訳者が勝手に追加する訳もなく，また追加された4つの公理には“［”と“］”をつけているので，これらはハイベルク版以外の版に載っていた公理と考えられる．多くの文献[3],[5]がなぜ5つの公理しか挙げていないのか不明であるが，最低限公理4が必要である．

公理

4．また不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である．
［つまり，$a>b$で$c=d$ならば，$a+c>b+d$．］

5．また同じものの倍は互いに等しい．［つまり，$2a=2a$．］

6．また同じものの半分は互いに等しい．［つまり，$a/2=a/2$．］

9．また2線分は面積をかこまない．

しかし，4個の追加された公理のうち不等関係に関する公理は4のみであり，この公理だけでは充分とは思われない．公理4は公理2に対応するものであり，公理1と3に対応する公理がないのである．公理1～3が冗長でないとすれば，不等関係についても同様に，少なくとも公理1と3に対応する公理が追加されるべきである．

追加公理

1'．また同じものに不等なものはなおさら不等である．

［つまり，$a>b$で$b>c$ならば，$a>c$．］

3'．また不等なものから等しいものがひかれれば，残りは不等である．

［つまり，$a>b$で$c=d$ならば，$a-c>b-d$．］

命題Ⅰ・7の証明における式(7－4)は，追加公理1'を適用して導出できる（付録参照）．公理の数を少なくするには，1'は1と4は2と3'は3と合わせた以下の変更公理としてもよい．

変更公理

1．同じものに等しいものはまた互いに等しく，同じものに不等なものはなおさら不等である．

［つまり，$a\geqq b$で$b\geqq c$ならば，$a\geqq c$（複号同順）．］

2．等しいものに等しいものが加われば全体は等しく，不等なものに等しいものが加われば全体はまた不等である．

［つまり，$a\geqq b$で$c=d$ならば，$a+c\geqq b+d$（複号同順）．］

3．等しいものから等しいものが引かれれば残りは等しく，不等なものから等しいものが引かれれば残りはまた不等である．

［つまり，$a\geqq b$で$c=d$ならば，$a-c\geqq b-d$（複号同順）．］

ここで公理1に対応するものは追加公理1'だけでなく，公理1における「同じもの」を「不等なもの」に変更した以下の追加公理1"が考えられる．命題Ⅰ・7の新たな証明を4章で述べるが，その証明における式(13)は追加公理1"の存在により導出できる．さらに，公理5や6と同類の公理として追加公理6'を追加する（同じものが互いに重なり合うならば，公理7で十分であり追加公理6'は冗長であるが，線分や角に対して明確に適用できるので追加しておく）．

追加公理

1"．また不等なものに等しいものは互いに不等である．

［つまり，$a>b$で$a=c$かつ$b=d$ならば，$c>d$．］

6'．また同じものは等しい．

［つまり，$a=a$．］

２．３　公理直後の命題の提案

公理１～３および追加公理１”に類似した，以下の４つの命題を提案する．これらは，幾何に関するユークリッドの命題と異なり（３章参照），公理といっても差し支えない一般的な命題であるが，公理や追加公理だけで証明できるので，公理直後の命題として提案する．

これらの命題は他の命題の証明において暗黙的に使用されているが，もしこれらが無くしかも論理を逐一展開するとすれば，論理展開を複雑にし見えにくくしてしまう恐れがある．例えば命題Ⅰ･0-4は，命題Ⅰ･7の証明における式(７－３)の導出に際し使用されている（付録参照）．

命題Ⅰ・０－１　等しいものに等しいものはまた互いに等しい．

［つまり，$a=b$で$a=c$かつ$b=d$ならば，$c=d$．］

証明）

条件より$a=b$で$a=c$だから，公理１より$b=c$．さらに条件より$b=d$だから，さらに公理１より$c=d$．

Q.E.D.

命題Ⅰ・０－２　同じものに等しいものが加われば全体は等しく，等しいものに同じものが加われば全体は等しい．［つまり，$b=c$ならば，$a+b=a+c$であり$b+a=c+a$．］

証明）

追加公理６’より$a=a$．さらに条件より$b=c$だから，公理２より$a+b=a+c$．同様に，$b=c$で$a=a$．よって公理２より$b+a=c+a$．

Q.E.D.

命題Ⅰ・０－３　同じものから等しいものが引かれれば残りは等しく，等しいものから同じものが引かれれば残りは等しい．［つまり，$b=c$ならば，$a-b=a-c$であり$b-a=c-a$．］

証明）

追加公理６’より$a=a$．さらに条件より$b=c$だから，公理３より$a-b=a-c$．同様に，$b=c$で$a=a$．よって公理３より$b-a=c-a$．

Q.E.D.

命題Ⅰ・０－４　不等なものの一方に等しいものはまた他方と不等である．

［つまり$a>b$で，$a=c$ならば$c>b$，$b=d$ならば$a>d$．］

証明）

条件より$a=c$で追加公理６’より$b=b$だから，追加公理１”より$c>b$．同様に追加公理６’より$a=a$で条件より$b=d$だから，追加公理１”より$a>d$．

Q.E.D.

2．4　定義

1．点とは部分をもたないものである．

2．線とは幅のない長さである．

3．線の端は点である．

4．直線とはその上にある点について一様に横たわる線である．

5．面とは長さと幅のみをもつものである．

6．面の端は線である．

7．平面とはその上にある直線について一様に横たわる面である．

8．平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互のかたむきである．

9．角をはさむ線が直線であるとき，その角は直線角とよばれる．

10．直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上に立つ直線はその下の直線に対して垂線と呼ばれる．

11．鈍角とは直角より大きい角である．

12．鋭角とは直角より小さい角である．

13．境界とはあるものの端である．

14．図形とは一つまたは二つ以上の境界によってかこまれたものである．

15．円とは一つの線にかこまれた平面図形で，その図形の内部にある１点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである．

16．この点は円の中心とよばれる．

17．円の直径とは円の中心を通り両方向で円周によって限られた任意の線分であり，それはまた円を２等分する．

18．半円とは直径とそれによって切り取られた弧とによってかこまれた図形である．半円の中心は円のそれと同じである．

19．直線図形とは線分にかこまれた図形であり，三辺形とは三つの，四辺形とは四つの，多辺形とは四つより多くの線分にかこまれた図形である．

20．三辺形のうち，等辺三角形とは三つの等しい辺をもつもの，二等辺三角形とは二つだけ等しい辺をもつもの，不等辺三角形とは三つの不等な辺をもつものである．

21．さらに三辺形のうち，直角三角形とは直角をもつもの，鈍角三角形とは鈍角をもつもの，鋭角三角形とは三つの鋭角をもつものである．

22．四辺形のうち，正方形とは等辺でかつ角が直角のもの，矩形とは角が直角で，等辺でないもの，菱形とは等辺で，角が直角でないもの，長斜方形とは対辺と対角が等しいが，等辺でなく角が直角でないものである．これら以外の四辺形はトラペジオンとよばれるとせよ．

23．平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である．

3．命題について

巻Ⅰは48個の命題から成っているが，前半の26個の命題では平行線公準を全く使用していない．本章では巻Ⅰ前半の命題について概観する．まず26個の命題を列挙し，それらの関係を示す．次にこれらの命題のいくつかについての簡単な考察と，“原論”における証明で暗黙的に使用されている事実を，明示的に命題として提案する．なお言及していない命題は，５つの公準と５つの公理およびその命題より前の命題によって容易に証明できる．

3．1　前半の命題

Ⅰ・1　与えられた有限な直線（線分）の上に等辺三角形をつくること．

Ⅰ・2　与えられた点において与えられた線分に等しい線分をつくること．

Ⅰ・3　二つの不等な線分が与えられたとき，大きいものから小さいものに等しい線分を切り取ること．［線分について，$a-b$の作成．］

Ⅰ・4　もし二つの三角形が2辺が2辺にそれぞれ等しく，その等しい２辺にはさまれる角が等しいならば，底辺は底辺に等しく，三角形は三角形に等しく，残りの２角は残りの２角に，すなわち等しい辺が対する角はそれぞれ等しいであろう．［二辺挟角による三角形の合同．］

Ⅰ・5　二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく，等しい辺が延長されるとき，底辺の下の角は互いに等しいであろう．［前半は，二等辺三角形の底角は等しい．］

Ⅰ・6　もし三角形の2角が互いに等しければ，等しい角に対する辺も互いに等しいであろう．［Ⅰ・5の前半の逆で，底角が等しければ二等辺三角形．］

Ⅰ・7　一つの線分を底辺として，三角形をなす２線分にそれぞれ等しく，同じ側に異なった点で交わり，最初の２線分と同じ端をもつ他の2線分をつくることはできない．

Ⅰ・8　もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく，底辺も底辺に等しければ，等しい辺にはさまれた角もまた等しいであろう．［三辺合同．］

Ⅰ・9　与えられた直線角を２等分すること．

Ⅰ・10　与えられた線分を２等分すること．

Ⅰ・11　与えられた直線にその上の与えられた点から直角に直線をひくこと．

Ⅰ・12　与えられた無限直線にその上にない与えられた点から垂線を下ろすこと．

Ⅰ・13　もし直線が直線の上に立てられて二つの角をつくるならば，二つの直角かまたはその和が２直角に等しい角をつくるであろう．

Ⅰ・14　もし任意の直線に対してその上の点において同じ側にない２直線が接角の和を２直角に等しくするならば，この２直線は互いに一直線をなすであろう．［Ⅰ・13の逆．］

Ⅰ・15　もし２直線が互いに交わるならば，対頂角を互いに等しくする．

Ⅰ・16　すべての三角形において辺の一つが延長されるとき外角は内対角のいずれよりも大きい．

Ⅰ・17　すべての三角形においてどの角をとってもその和は２直角より小さい．

Ｉ・18　すべての三角形において大きい辺は大きい角に対する．

Ｉ・19　すべての三角形において大きい角には大きい辺が対する．［Ｉ・18の逆．］

Ｉ・20　すべての三角形においてどの２辺をとってもその和は残りの１辺より大きい．

Ｉ・21　もし三角形の辺の一つの上にその両端から三角形の内部で交わる２線分がつくられるならば，つくられた２線分はその和が三角形の残りの２辺の和より小さいが，より大きい角をはさむであろう．

Ｉ・22　与えられた３線分に等しい３線分から三角形をつくること．ただしどの２線分をとってもその和は残りの線分より大きくなければならない．

Ｉ・23　与えられた直線上にその上の点において与えられた直線角に等しい直線角をつくること．

Ｉ・24　もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく，等しい線分によってはさまれる角の一方が他方より大きいならば，底辺も底辺より大きいであろう．

Ｉ・25　もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく，底辺が底辺より大きいならば，等しい線分にはさまれる角も一方が他方より大きいであろう．

Ｉ・26　もし二つの三角形において２角が２角にそれぞれ等しく，１辺が１辺に，すなわち等しい２角にはさまれる辺かまたは等しい角の一つに対する辺が等しければ，残りの２辺も残りの２辺に等しく，残りの角も残りの角に等しいであろう．［二つの三角形において，角－辺－角ならば合同であり，辺－角－角ならば合同である．］

これら26個の命題の関係を図１に示す．同図において数字nは命題Ｉ・nを表す．また関係を簡潔に表すために，親以外の祖先mをもつ命題には，(m)をつけて表示している．

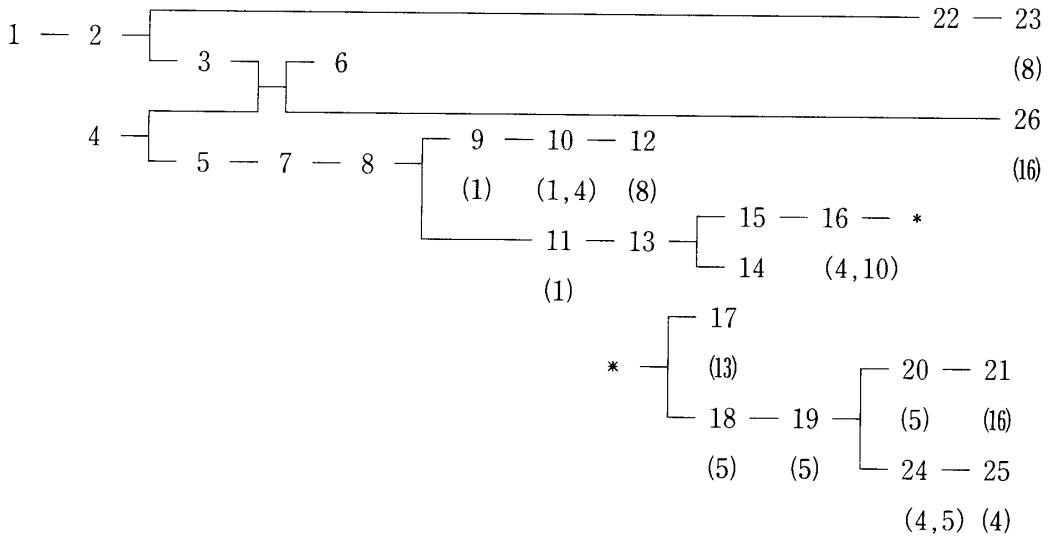


図１　26個の命題の関係

3．2　命題に対する考察

4章で詳しく考察する命題Ⅰ・7とⅠ・24以外の命題を簡単に考察する．

1）命題I・1について

2つの円の交点が存在するかどうかの保証が，5つの公準や5つの公理（または9個の公理やさらに本論で追加した公理）からは得られない，と指摘されている[5],[6]．交点は直線上の点の稠密性と関連している．D．ヒルベルトは，点や直線および平面を無定義用語とした[1]．一方，ユークリッドは定義4によって，直線上の点の稠密性を保証しようとしたと推測される．

ところで，高校までの数学では直線や平面の定義はなく，直線や平面の意味は初めからわかっているものとして，感覚的イメージに基づいて直線や平面上の点の座標を導入し，直線が数直線を表すR，平面が$R \times R$であることを示しただけなのである．しかしこれでは，無理数が実数（数直線上の点）であることが証明できず，実数が数直線上の至るところで稠密であることが保証できないのである．ユークリッドは約2300年も前の数学者であり，点や直線を感覚的イメージに基づいて考えたのはいたしかたない．実数の定義がJ．デデキンド（1831～1916）によって厳密になされたのは近年のことであり，やっと直線上の点の稠密性が保証されたのである[7]．

2）命題Ⅰ・3について

命題Ⅰ・3では2つの線分の差を作図するが，その対をなす2つの線分の和を作図する命題を提案する．さらに，線分の長さに関する交換則と結合則を提案する．2つの角の和と差を作図する命題および角度に関する交換則と結合則は，命題Ⅰ・23（角の作図）の後で提案する．

命題Ⅰ・3－1　二つの線分が与えられたとき，一つの線分に（または一つの線分に等しい線分に）もう一つの線分に等しい線分を付け加えること．［線分について，$a+b$の作成．］

証明）

2つの線分をABおよびCDとする．一般性を失うことなくCDに等しい線分を，まず線分ABに付け加えることができることを示す．

命題Ⅰ・2より，点Bにおいて線分CDに等しい線分BFをつくることができるから，中心をBとし半径をBFとする円と線分ABの延長との交点をEとすると，公理1よりBE（＝BF）＝CD．

すると，命題Ⅰ・0－2の前半より

$$AB+BE=AB+CD.$$

線分AEは線分ABとBEで構成されているから，上式の左辺は線分AEの長さである．

$$\therefore\ AE=AB+CD.$$

よって，一つの線分にもう一つの線分に等しい線分を付加した線分が作図できる．

また命題Ⅰ・2より，任意の点において線分ABに等しい線分をつくることができるから，この線分に対しても同様の展開により，CDに等しい線分を付け加えることができる．

Q.E.D.

ところで命題Ⅰ・21の証明では，式(21-2)と(21-3)の導出に際して，3線分の長さの和について暗黙的に結合則を使用している（付録参照）．そこで2つの線分を対象とした切り取り（命題Ⅰ・3）と付け加え（命題Ⅰ・3-1）が可能になったこの時点で，線分の長さに関する交換規と結合則を命題として提案する．交換則は当時としてはあえて命題とする必要がないとしても，関係子や演算子は2項演算子であり（公理参照），結合則を命題として与えておく必要がある．

命題Ⅰ・3-2　二つの線分が与えられたとき，線分1に線分2に等しい線分を付け加えた線分と線分2に線分1に等しい線分を付け加えた線分の長さは等しい［線分の長さに関する交換則］．

証明）

与えられた二つの線分をABとCDとする．命題Ⅰ・3-1により，線分ABにBE＝CDなる線分を付け加えた線分をAEとし，線分CDにDF＝ABなる線分を付け加えた線分をCFとすると，

$$AE=AB+CD,\quad CF=CD+AB. \tag{1}$$

点Aを中心として半径がAEおよびABの円と，線分EAの延長線とのそれぞれの交点をGおよびHとすると（図2参照），

$$GA=AE,\quad HA=AB. \tag{2}$$

式(2)の2つの式に対して，公理3よりGA－HA＝AE－AB．この式における左辺は線分GHの長さで右辺は線分BEの長さだから，GH＝BE．そしてBE＝CDだから，公理1よりGH＝CD．さらに式(2)の第2式だから，公理2より

$$GH+HA=CD+AB.$$

ここで線分GAは線分GHと線分HAで構成されているから，上式の左辺はGA．

$$\therefore\ GA=CD+AB. \tag{3}$$

式(3)と式(1)の第2式だから，公理1よりGA＝CF．そして式(2)の第1式だから，公理1よりAE＝CF．そして式(1)の2つの式が成り立つから，命題Ⅰ・0-1より

$$AB+CD=CD+AB.$$

Q.E.D.

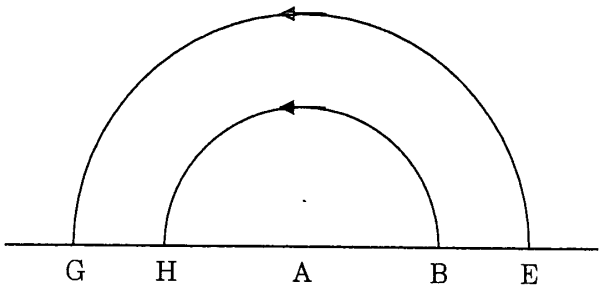


図2　コンパスによる点GとHの作成

命題Ⅰ・3－3　三つの線分が与えられたとき，線分の長さについて結合則が成り立つ．
［つまり，$(a+b)+c=a+(b+c)$．］
証明）
3つの線分の長さをa，b，cとする．任意の点をAとし，命題Ⅰ・2より点Aにおいてaの長さの線分ABを作成する．次に命題Ⅰ・3－1より，ABの延長上にbの長さの線分BCを付け加え，さらに命題Ⅰ・3－1よりBCの延長上にcの長さの線分CDを付け加える．
すると，線分ADは線分ACと線分CDで構成されているから，

$$AD=AC+CD.$$

ここで，線分ACは線分ABと線分BCで構成されているから，AC＝AB＋BC．したがって，

$$AD=(AB+BC)+CD. \tag{4}$$

一方，線分ADは線分ABと線分BDで構成されているから，

$$AD=AB+BD.$$

ここで，線分BDは線分BCと線分CDで構成されているから，BD＝BC＋CD．したがって，

$$AD=AB+(BC+CD). \tag{5}$$

すると式(4)と(5)に対して，公理1より

$$(AB+BC)+CD=AB+(BC+CD).$$

Q.E.D.

3）命題Ⅰ・4～Ⅰ・12について
命題Ⅰ・4は，三角形ABCと三角形DEFの二辺挟角による合同命題であり，その証明は，「三角形ABCが三角形DEFに重ねられ，～」で始まる．すなわちユークリッドは，三角形ABCを持ち上げて三角形DEFに重ね合わせている．しかし持ち上げたとき図形が歪んだり，変形する恐れがあるという議論があり，D．ヒルベルトは二辺挟角による合同を公理として与えている（彼は，要請を公準・公理の区別無くすべて公理と呼んでいる）．D．ヒルベルトの公理系は，結合公理，順序公理，合同公理，平行線公理および連続性公理の5分類から成っており，それぞれには8，4，5，1および2個の公理がある．そのうち二辺挟角による合同公理は，合同公理の5である[1]．なお命題Ⅰ・8（三辺合同）でも，一方の三角形を他方に重ね合わせている．
命題Ⅰ・5については，付録に示すように式(5－2)の導出の前の記述において，線分AHを半直線AEから命題Ⅰ・3を用いて切り取っているが，命題Ⅰ・3を使わなくても，中心をAとし半径をAFとする円と半直線AEとの交点をHとすればよい．これは命題Ⅰ・2や命題Ⅰ・3自身の証明においても使われているやり方である．それゆえ，図1において命題Ⅰ・3は命題Ⅰ・5における使用命題とはしていない．命題Ⅰ・9（付録参照）やⅠ・18も同様である．
命題Ⅰ・7については，次章で詳しく述べる．命題Ⅰ・9～Ⅰ・12の証明では，命題Ⅰ・10は二辺挟角（命題Ⅰ・4）を使用しているが，他の3つは三辺合同（命題Ⅰ・8）を使用している．しかしこれらは，三辺合同を使うよりも少々長くなるが，二辺挟角によっても証明できる．以下に命題Ⅰ・9を例にとり示す．

命題Ｉ・9の証明)

与えられた直線角をBACとする．半直線AB上に任意の点Dをとり，点Aを中心にして半径ADの円と半直線ACとの交点をEとすると，AD＝AEであり，三角形ADEは二等辺三角形だから，命題Ｉ・5の前半より

$$\angle ADE = \angle AED. \tag{6}$$

次に命題Ｉ・1により，線分DE上に点Aとは反対側に等辺三角形DEFを作図すると，DF＝EFであり，三角形FDEは二等辺三角形でもあるから，命題Ｉ・5の前半より

$$\angle FDE = \angle FED. \tag{7}$$

式(6)で式(7)だから，公理２より

$$\angle ADE + \angle FDE = \angle AED + \angle FED.$$

上式の左辺は角ADFで右辺は角AEFだから，

$$\angle ADF = \angle AEF. \tag{8}$$

すると三角形DAFと三角形EAFにおいて，AD＝AEでDF＝EFで式(8)だから，命題Ｉ・4より

$$\triangle DAF \equiv \triangle EAF.$$

$$\therefore \quad \angle DAF = \angle EAF.$$

Ｑ．Ｅ．Ｄ．

４）命題Ｉ・13とＩ・14について

命題Ｉ・13の証明における問題点は，式(13-９)の導出である（付録参照）．付録と重複するが議論を明確にするために，式(13-１)と(13-２)および式(13-９)を以下に再掲する．

$$\angle CBE + \angle EBD = (\angle CBA + \angle ABE) + \angle EBD. \tag{13-1}$$

$$\angle DBA + \angle ABC = (\angle DBE + \angle EBA) + \angle ABC. \tag{13-2}$$

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle ABC. \tag{13-9}$$

“原論”では，「式(13-１)と式(13-２)の右辺が同じものだから，公理１よりそれぞれの左辺が等しく，式(13-９)が導出される」とある．しかし右辺同士が同じと結論づけるにはかなりの飛躍があり，付録にあるように式(13-３)から式(13-８)までの展開が必要である．

ここでその展開において，角の大きさに関して後述する命題Ｉ・23-３（交換則）とＩ・23-４（結合則）を使用している．これらは，命題Ｉ・23（角の作図）の後の命題である．ところで図１に示すように，命題Ｉ・23はＩ・8とＩ・22を使用しているが，Ｉ・22（Ｉ・23の補助定理）はＩ・2しか使用していない．よって，Ｉ・23はＩ・9の直前で証明できる．したがって，２つの提案命題もＩ・9の直前で証明できるので，命題Ｉ・13の証明に際して使用しても問題はない．

“原論”では，式(13-１)や(13-２)の右辺は単に３つの角の和とある．例えば式(13-１)は，

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$$

と記述されている．加減算は一般的には前から行うので，上のように表された３つの角の和は，結局式(13-１)や式(13-２)の右辺と同じであるが，加減算は２項演算子でありまた命題Ｉ・０-２の適用結果を正しく表すには，式(13-１)や式(13-２)のように括弧をつけて記述すべきである．

命題Ⅰ・14はⅠ・13の逆命題である．“原論”での証明では最初に「もしBDがBCと一直線をなすのでないならば，BEをCBと一直線をなすとせよ」とあり，矛盾を導いた後「それゆえBEはCBと一直線をなさない．同様にしてBD以外の他のいかなる直線もそうならないことを証明しうる」とある．しかし最後の「同様にして～」は理解しづらい．命題Ⅰ・14は付録に示すように単純な背理法で証明しうる．つまり，半直線BDが半直線BCと一直線をなさないことだけを仮定しておいて，半直線CBの延長線上に点Eをとっておけば，矛盾を導くことによって仮定（結論の否定）が否定されることが明瞭になる．

5）命題Ⅰ・23と命題Ⅰ・24について

命題Ⅰ・23により，与えられた直線上に与えられた直線角を作図できるので，ここで2つの直線角の差（命題Ⅰ・3に対応）と和（命題Ⅰ・3－1に対応）を作図する命題を提案する．これらは命題Ⅰ・23を用いれば2つの角の差と和が作図でき，証明は容易なので省略する．

命題Ⅰ・23－1　直線と2つの直線角が与えられたとき，与えられた直線上に2つの直線角の和に等しい角を作図できる．

命題Ⅰ・23－2　直線と2つの不等な直線角が与えられたとき，与えられた直線上に大きい直線角から小さい直線角を切り取った角に等しい角を作図できる．

命題Ⅰ・13の考察で述べたが，その証明においては角の大きさに関する交換則と結合則を暗黙的に使用している（付録参照）．角の作図命題（命題Ⅰ・23）が証明されさらに2つの角の差と和を作図する命題が提案されたこの時点で，角の大きさに関する交換則と結合則を命題として以下に提案する．それぞれの証明は，命題Ⅰ・3－2（線分の長さに関する交換則）や命題Ⅰ・3－3（線分の長さに関する結合則）と同様の論理展開により証明できるので，証明は省略する．

命題Ⅰ・23－3　二つの直線角が与えられたとき，直線角1に直線角2に等しい直線角を付け加えた直線角と，直線角2に直線角1に等しい直線角を付け加えた直線角は等しい．［つまり直線角について交換則が成り立つことであり，∠A＋∠B＝∠B＋∠A．］

命題Ⅰ・23－4　三つの直線角が与えられたとき，直線角について結合則が成り立つ．［つまり直線角について，(∠A＋∠B)＋∠C＝∠A＋（∠B＋∠C）．］

命題Ⅰ・24については，証明の最初のパラグラフは「角BACは角EDFより大きいから」で始まるが，この文がかかる文がなく理解できない．さらに第2パラグラフでは論理展開にかなりの飛躍があるという問題がある．この命題は4章で詳しく考察する．

4．命題Ⅰ・7と命題Ⅰ・24に対する考察

本章では，命題Ⅰ・7と命題Ⅰ・24を詳しく考察する．前者では大別すると2つの異なる状況が生じ，2つの状況では異なる論理展開したがって異なる命題を用いる必要があることを示す．後者では，論理展開が飛躍しすぎていることを指摘する．

4．1　命題Ⅰ・7の証明

命題Ⅰ・7を現代風に分かりやすく述べると，三角形ABCが与えられたとき，底辺ABに対して点Cと同じ側にAD＝ACかつBD＝BCとなるような，点Cとは異なる点Dが存在することはない，という主張である．

図3に示すように点Dの存在し得る領域は4つあるが，付録に示すように“原論”で与えられた証明は，点Dが領域1に存在する場合しか考えられていない（ただし，領域2に存在する場合も同様の論理展開で証明できる）．つまり，式(7－1)の後の角括弧でくくった補足記述にあるように，点Dが三角形ABCの外部にあるとしてしまっている（付録では，外部にある場合とことわってから展開している）．

点Dが外部にあることは命題Ⅰ・21より正しいが，この時点では使えない命題である（図1に示すように，命題Ⅰ・21の証明には命題Ⅰ・7を祖先にもつ命題を用いている）．さらに，以下に証明を与えるが，四角形ABCDが凸である場合と凹である場合では，証明における展開が異なる（つまり異なる公理や命題を使用している）ので，場合分けをした証明が必要である．

証明）

背理法によって証明する．つまり，底辺ABに対して同じ側に異なる点CとDが存在して，AC＝ADかつBC＝BDと仮定する．

図4（または図5）に示すように，線分AC，BCおよびADのそれぞれの延長線を，半直線AE，BFおよびAGとすると，三角形ADCにおいてAC＝ADだから，命題Ⅰ・5より

$$\angle ACD = \angle ADC, \quad \angle DCE = \angle CDG \tag{9}$$

であり，三角形BDCにおいてBC＝BDだから，命題Ⅰ・5の前半より

$$\angle BCD = \angle BDC. \tag{10}$$

次に，点Cがある側の半平面を半直線AEとBFで4つの領域に分割し，点Dがどの領域に存在するかによって場合分けする（図3参照）．

(i)　点Dが領域1に存在する場合

図4に示すように四角形ABDCは凸であり（凸四角形は2．4に列挙したように“原論”では定義されていないが[2]，分かりやすくするために用いた），線分ADとBCは凸四角形ABDCの対角線である．それゆえ線分ADは∠BDCを内分し，∠BDCを全体とすると∠ADCは部分である．同様に線分BCは∠ACDを内分しているので，公理8より

$$\angle ADC < \angle BDC, \tag{11}$$

$$\angle BCD < \angle ACD. \tag{12}$$

すると式(11)であり，式(9)における第１式かつ式(10)だから，追加公理１”より

$$\angle ACD < \angle BCD. \tag{13}$$

ところが式(13)は式(12)と矛盾する．すなわち部分である∠BCDが全体である∠ACDより大きくなってしまい，公理８に反する．

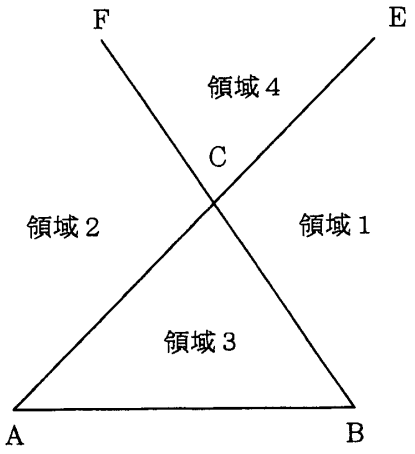


図３　点Dの存在領域

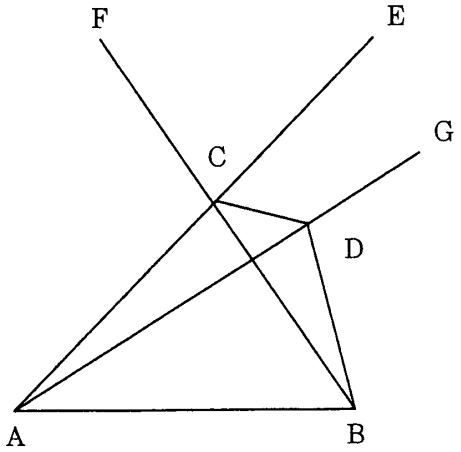


図４　凸四角形ABDC

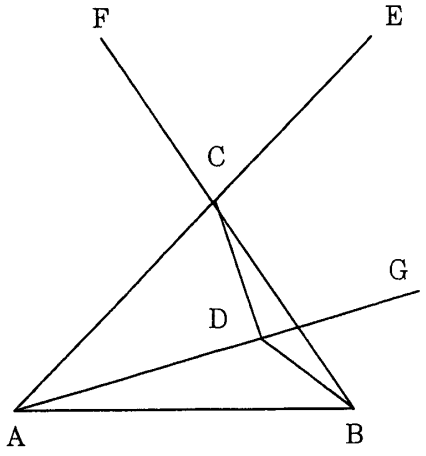


図５　凹四角形ABDC

(ii)　点Dが領域２に存在する場合

四角形ABCDは凸であり，(i)と同様の展開により矛盾が導ける．

(iii)　点Dが領域３に存在する場合

図５に示すように四角形ABDCは凹である（凹四角形も２．４に列挙したように“原論”では定義されていないが[2]，分かりやすくするために用いた）．

まず，式(9)における第１式と式(10)が成り立つから，公理２より

$$\angle ACD+\angle BCD=\angle ADC+\angle BDC.$$

上式の左辺は∠ACBを構成し，右辺は（図５では線分ADからBDまでの時計まわりの）角ADBを構成しているから，

$$\angle ACB=\angle ADB. \tag{14}$$

［式(14)は命題Ｉ・21に反するので，もし命題Ｉ・21が使用できるとすれば，このケースは考えなくてよいことになるが，残念ながらこの時点では使用できない．］

一方，式(9)における２つの式が成り立つから，公理２より

$$\angle ACD+\angle DCE=\angle ADC+\angle CDG.$$

上式の左辺は∠ACE（半直線AEの角）を構成し，右辺は∠ADG（半直線AGの角）を構成しているから，

$$\angle ACE=\angle ADG. \tag{15}$$

ところで，点Dは三角形ABCの内部にあるので，半直線AGは∠CABを内分している．つまり点CとBは半直線AG（したがって線分ADや半直線DG）に対して反対側にある．よって，線分ADからDBまでの時計まわりの角ADBを全体とすると∠ADG（半直線の角）は部分なので，公理８より

$$\angle ADG<\angle ADB. \tag{16}$$

すると，式(16)で式(15)かつ式(14)だから，追加公理１”より

$$\angle ACE<\angle ACB. \tag{17}$$

同様に，線分CAと半直線CEの成す∠ACE（図５では線分CAから反時計方向に線分CDとCBを経由して半直線CEまでの角）を全体とすると∠ACBは部分なので，公理８より

$$\angle ACB<\angle ACE$$

となるが，式(17)と矛盾する．

(iv)　点Dが領域４に存在する場合

四角形ABCDは凹であり，(iii)と同様の展開により矛盾が導ける．

したがっていずれの場合にも矛盾が導けるが，これは底辺ABに対して同じ側に異なる点CとDが存在して，AC＝ADかつBC＝BDと仮定したことによっている．

Ｑ．Ｅ．Ｄ．

４．２　命題Ⅰ・24の証明

この命題を意訳して分かりやすく述べると，三角形において頂角が大きいほど底辺が大きいという主張である．“原論”で与えられた証明には２つの問題点がある．

証明は次の文で始まる．「角BACは角EDFより大きいから，線分DE上にその上の点Dにおいて角BACに等しい角EDHがつくられ，DHがAC，DFのどちらかに等しくされ，EH，FHが結ばれたとせよ．」これは点Hを作図する文であり１つ目の問題は，「角BACは角EDFより大きい」という与えられた条件に対応する記述がなく，このままでは文章として理解できないことである．そこで，条件文から容易に導かれる事実（証明において後で使用するところの，線分DFが角EDHの内分線であるという事実）を付け加えて，以下に与える証明の２行目～５行目のように変更する．

２つ目は，展開における飛躍である．以下の証明における式(25)は，“原論”では式(19)からいきなり導出されている．点F（図６参照）が三角形の外部にある場合には若干の補足説明で足りるが，それは保障されていないので以下のように手間をかけて確認しておく必要がある．

証明）

２つの三角形をABCとDEFとし，AB＝DEでAC＝DF，∠BAC＞∠EDFとする．

［AB≦ACの場合には，］線分DE上の点Dにおいて，［命題Ⅰ・23より］∠EDH＝∠BACを作図し，DH＝DFとする．［ただし図６に示すように，線分DHは線分DEに対して線分DFと同じ側に作図する．すると，］∠BAC＞∠EDFだから，［３つの線分はDE，DF，DHの順に並んでいる．すなわち，線分DFは，∠EDHの内分線である．］

［三角形ABCとDEHにおいて，公理１より］AC（＝DF）＝DH．与えられた条件より，AB＝DEで∠BAC＝∠EDHだから，［命題Ⅰ・4よりΔABC≡ΔDEHであり，］

$$BC=EH. \tag{18}$$

またDH＝DFだから，［命題Ⅰ・5の前半より］

$$\angle DHF=\angle DFH. \tag{19}$$

［ところで点Fは，三角形DEHの外部に存在する．なぜなら，もし内部にあると仮定すると以下のように矛盾がおこる．

まず，内部にあるとすると次の２つのことがいえる．１つ目は，線分HFは∠DHEの内分線だから，公理８より

$$\angle DHF<\angle DHE. \tag{20}$$

２つ目は，命題Ⅰ・21より

$$\angle DFH>\angle DEH. \tag{21}$$

ところでAB≦ACでAB＝DEかつAC＝DHだから，追加公理１”よりDE≦DH．すると三角形DEHにおいて，命題Ⅰ・18およびⅠ・5の前半より

$\angle DHE \leqq \angle DEH.$ (22)

すると式(20)〜(22)だから，追加公理1'より

$\angle DHF < (\angle DHE \leqq \angle DEH) < \angle DFH.$ (23)

これは式(19)に矛盾する．

したがって点Fは三角形DEHの外部に存在する．しかも線分DFは∠EDHの内分線だから四角形DHFEは凸であり，線分HEは∠DHFの内分線である．これら2つのことから公理8より

$\angle EHF < \angle DHF, \quad \angle DFH < \angle EFH.$ (24)

式(24)の第1式で式(19)だから，命題Ⅰ・0－4より]

それゆえ

$\angle DFH > \angle EHF.$ (25)

式(24)の第2式で式(25)だから，追加公理1'より] ゆえになおさら

$\angle EFH > \angle EHF.$ (26)

三角形EFHにおいて式(26)だから，命題Ⅰ・19より

$EH > EF.$ (27)

式(27)で式(18)だから，したがって［命題Ⅰ・0－4より]

$BC > EF.$

［AB＞ACの場合には，線分DF上の点Dにおいて，∠FDH＝∠CABを作図し，DH＝DEとすれば，後の展開は上と同様にできる．]

Q.E.D.

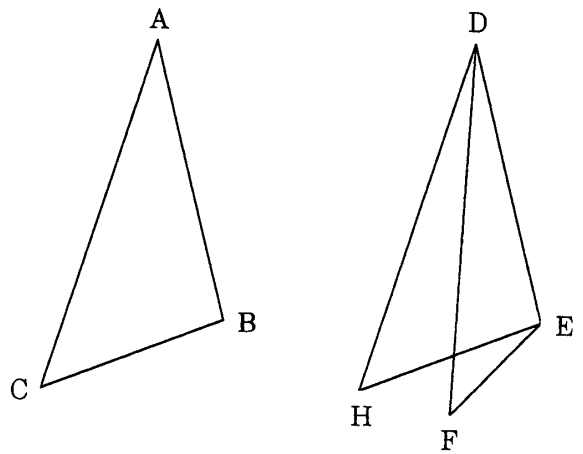


図6　点Hの作図（ΔDEH≡ΔABC）

5．おわりに

本論では，ユークリッド原論巻Ⅰの前半について考察した．巻Ⅰは公理主義の本質を如実に示す書物である．D．ヒルベルトはユークリッド幾何学を完全なものにして幾何学基礎論を著したが，本論での考察はユークリッド原論をより理解しやすくするためのものである．

まず公理について考察し，5つの公理（文献によっては9個の公理）では巻Ⅰの前半の26個の命題に対してもその証明に不十分であると問題提起し，新たに4個の公理を提案した．さらに幾何に関する命題ではないが，9個の公理および追加公理から証明できる共通概念に似た命題を4個提案し証明した．26個のうちのいくつかの命題の証明を付録に挙げ，4個の命題がその記述を簡潔にし論理展開を見通しよくすることを示した．

次に26個の命題を考察して，これらの関係（つまり各命題がどの命題を前提としているか）を明らかにするとともに，各命題の証明において暗黙的に使用されている事実（線分の長さに関する交換則や結合則など）を命題として明示し証明を与えた．さらにこれらのうち命題Ⅰ・7とⅠ・24を詳しく考察した．三辺合同の補助定理である前者については，点の存在領域が4通りありこれらの存在領域に対して異なる命題を前提としていることを示し，後者については証明の展開が飛躍しすぎていることを指摘した．

参考文献

[1] 数学辞典第3版，日本数学会編，岩波書店（1994）．
[2] ユークリッド（中村幸四郎他訳）：ユークリッド原論，共立出版（1996）．
[3] http://mis.edu.yamaguchi-u.ac.jp/kyoukan/watanabe/elements/hyousi/index.htm (2002).
[4] 上垣渉：アルキメデスを読む，日本評論社（1999）．
[5] ダンハム，W．（中村由子訳）：数学の知性，現代数学社（1998）．
[6] 一松信：数学概論，新曜社（1995）．
[7] 小平邦彦：解析入門，岩波書店（1991）．

付録

“原論”における命題の証明のいくつかを以下に引用する．ただし，文章で記述されている証明を分かりやすくするために現代風に式を使って記述するが，論理展開は変更していない．また“原論”では点の表示にはギリシャ文字を用いているが，なじみにくいのでアルファベットを使用する．さらに，論理展開をわかりやすくするための補足的な記述には角括弧をつけている．

命題Ⅰ・5の証明）使用命題：Ⅰ・4

［図A１に示すように］与えられた二等辺三角形ABCにおいて，

$$AB=AC \qquad (5-1)$$

とする．線分ABとACをそれぞれ延長し，半直線ADおよびAEとする．半直線BD上に任意の点Fをとる．大きい半直線AEから小さい線分AFに等しい線分AHを［，命題Ⅰ・3より］切り取る．［もしくは命題Ⅰ・3を使わず単に，Aを中心とし半径をAFとする円と半直線AEとの交点をHとする．］すると，

$$AF=AH. \qquad (5-2)$$

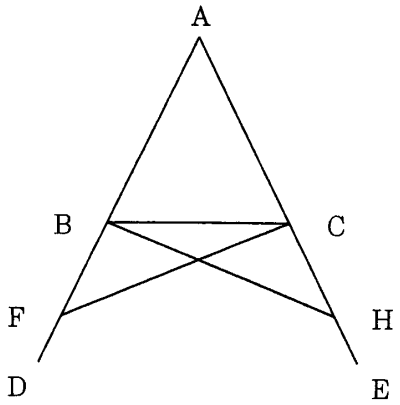
すると［三角形AFCとAHBにおいて，］式(5－1)と(5－2)で∠Aは共通だから，［命題Ⅰ・4より］ΔAFC≡ΔAHBであり，

$$\angle ACF=\angle ABH, \quad (\angle BFC=)\ \angle AFC=\angle AHB\ (=\angle CHB), \quad FC=HB. \qquad (5-3)$$

［つぎに三角形BFCと三角形CHBにおいて，］

$$BF=CH. \qquad (5-4)$$

なぜなら，AF＝AHでAB＝ACだから，線分AFから線分ABを切り取った残りの線分BFと，線分AHから線分ACを切り取った残りのCHは［公理３より］等しい．



図A１　二等辺三角形の底角

すると，式(５－４)と式(５－３)の第３式および第２式だから，［命題Ⅰ・4より］

$\Delta BFC \equiv \Delta CHB$.

$\therefore$　$\angle FBC = \angle HCB$,　$\angle BCF = \angle CBH$.　(５－５)

すると，式(５－３)の第１式で式(５－５)の第２式だから，［公理３より］残りは等しいので

$\angle ACB$ $(= \angle ACF - \angle BCF = \angle ABH - \angle CBH) = \angle ABC$.　(５－６)

式(５－６)が証明すべき前半であり，式(５－５)の第１式が後半である．

Q.E.D.

命題Ⅰ・7の証明）使用命題：Ⅰ・5

［図Ａ２に示すように，AC＝ADでBC＝BDなる点Dを，底辺ABに対して点Cと同じ側にとることが］可能ならば，AC＝ADだから，［命題Ⅰ・5の前半より］

$\angle ACD = \angle ADC$.　(７－１)

［ここで一般性を失うことなく，線分ADは∠BACの内分線とする．点Dが三角形ABCの外部にある場合には，三角形CBDは三角形ABCの外部に存在する．すると線分DAは三角形CBDの内角である∠CDBの内分線であり，線分CBは∠ACDの内分線である．したがって∠CDBが全体で∠ADCは部分であり，∠ACDが全体で∠DCBは部分なので，公理８より

$\angle CDB > \angle ADC$,　$\angle ACD > \angle DCB$.　(７－２)

すると式(７－２)の第２式で式(７－１)だから，］それゆえ［命題Ⅰ・０－４より］

$\angle ADC > \angle DCB$.　(７－３)

［すると式(７－２)の第１式で式(７－３)だから，追加公理１'より］したがってなおさら

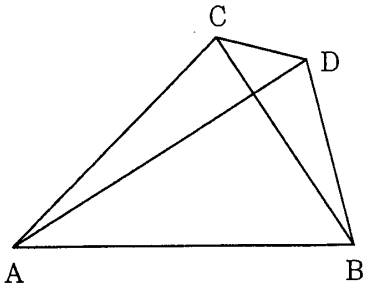
$\angle CDB > \angle DCB$.　(７－４)

またCB＝DBだから，［命題Ⅰ・5の前半より］

$\angle CDB = \angle DCB$.　(７－５)

ところが式(７－５)は式(７－４)と矛盾する．

Q.E.D.



図Ａ２　三辺相等しい２つの三角形

命題Ｉ・9の証明）使用命題：Ｉ・1，Ｉ・8

［図Ａ３に示すように］与えられた直線角をBACとする．半直線AB上に任意の点Dをとり，［命題Ｉ・3より］半直線ACから線分ADに等しい線分AEが切り取られると，［もしくは命題Ｉ・3を使わず単に，Aを中心とし半径をADとする円と半直線ACとの交点をEとすると，］

AD＝AE.　（9－1）

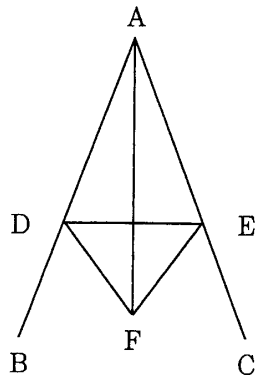
［命題Ｉ・1より，］線分DE上に点Aとは反対側に等辺三角形DEFを作図すると，

DF＝EF.　（9－2）

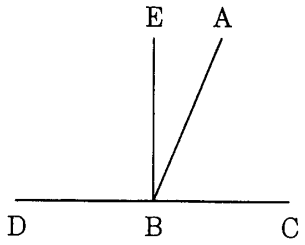
［すると三角形DAFと三角形EAFにおいて，］式（9－1）でAFは共通である．そして式（9－2）だから，［命題Ｉ・8より］ΔDAF≡ΔEAF.

∴　∠DAF＝∠EAF.

Q.E.D.



図Ａ３　角の２等分



図Ａ４　直線＝２直角

命題Ⅰ・13の証明）使用命題：Ⅰ・11

［図A 4に示すように］半直線BAが直線DCの上に立てられているとする．∠CBA＝∠ABDならば，［定義10より］それらは2つの直角である．

等しくなければ，［命題Ⅰ・11により］点Bにおいて直線DCに直角に半直線BEを作図する．すると，∠CBEと∠EBDは2つの直角である．そして［一般性を失うことなく，半直線BEは∠ABDの内分線とすると，∠CBEは∠CBAと∠ABEとで構成されているから，］

∠CBE＝∠CBA＋∠ABE

であり，双方に∠EBDを加えると［命題Ⅰ・0－2の後半より］

∠CBE＋∠EBD＝（∠CBA＋∠ABE）＋∠EBD.　(13－1)

また，［∠DBAは∠DBE＋と∠EBAとで構成されているから，］

∠DBA＝∠DBE＋∠EBA

であり，双方に∠ABCを加えると［命題Ⅰ・0－2の後半より］

∠DBA＋∠ABC＝（∠DBE＋∠EBA）＋∠ABC.　(13－2)

［ここで，命題Ⅰ・23－1（交換則）より

（∠DBE＋∠EBA）＋∠ABC＝∠ABC＋（∠DBE＋∠EBA）．　(13－3)

また，命題Ⅰ・23－1より∠DBE＋∠EBA＝∠EBA＋∠DBEだから，命題Ⅰ・0－2の前半より

∠ABC＋（∠DBE＋∠EBA）＝∠ABC＋（∠EBA＋∠DBE）．　(13－4)

式(13－3)と式(13－4)だから，公理1より

（∠DBE＋∠EBA）＋∠ABC＝∠ABC＋（∠EBA＋∠DBE）．　(13－5)

命題Ⅰ・23－2（結合則）より

∠ABC＋（∠EBA＋∠DBE）＝（∠ABC＋∠EBA）＋∠DBE.　(13－6)

すると，式(13－5)と式(13－6)だから，公理1より

（∠DBE＋∠EBA）＋∠ABC＝（∠ABC＋∠EBA）＋∠DBE.　(13－7)

すると，式(13－1)と式(13－7)だから，公理1より

∠CBE＋∠EBD＝（∠DBE＋∠EBA）＋∠ABC.　(13－8)］

それゆえ，［式(13－2)と式(13－8)だから，］公理1より

∠CBE＋∠EBD＝∠DBA＋∠ABC.　(13－9)

ところが式(13－9)の左辺における∠CBEと∠EBDは2つの直角だから，［公理1より］

∠DBA＋∠ABC＝2∠R.

Q.E.D.

命題Ｉ・14の証明）使用命題：Ｉ・13

任意の半直線BAに対して，その上にある点Bにおいて反対側にある２つの半直線をBCとBDとし，半直線BDと半直線CBが一直線をなさないと仮定する［図Ａ５参照］．

半直線BEが半直線CBと一直線をなすとする［と，仮定よりBDとBEは一致しないから∠ABDと∠ABEは等しくない．すなわち一方が小さく他方が大きい］．

すると半直線BAは直線CBEの上に立つから，［命題Ｉ・13より］

∠ABC＋∠ABE＝２∠R.

ところが［条件より］

∠ABC＋∠ABD＝２∠R.

［ここで公準４より∠R＝∠R．よって∠R＝∠Rと∠R＝∠Rだから，公理２より２∠R＝２∠R．したがって命題Ｉ・０－１］ゆえ

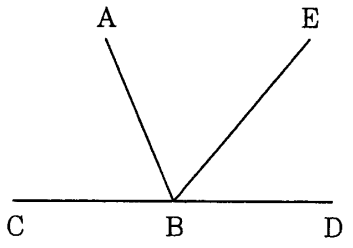
∠ABC＋∠ABE＝∠ABC＋∠ABD.

左右両辺から∠ABCを引くと，命題Ｉ・０－３の後半より残りは等しい．左辺の残りは∠ABEで右辺の残りは∠ABDだから，つまり

∠ABE＝∠ABD.

すると小さいものが大きいものに等しくなり，矛盾がおこる．［これは半直線BDと半直線CBが一直線をなさないと仮定したことに起因する．］

Ｑ.Ｅ.Ｄ.



図Ａ５　接角の和＝２直角

命題Ⅰ・21の証明）使用命題：Ⅰ・16，Ⅰ・20

［図A 6に示すように］三角形ABCの内部の点をDとし，線分BDの延長線と辺ACの交点をEとする．そうすると三角形ABEにおいて，［命題Ⅰ・20より］

AB＋AE＞BE.

［ここで追加公理6'よりEC＝ECだから，公理4より］

(AB＋AE)＋EC＞BE＋EC.　　(21-1)

［式(21-1)の左辺については，命題Ⅰ・3-3より(AB＋AE)＋EC＝AB＋(AE＋EC)で，線分AEの延長上に線分ECを追加した線分がACだから，(AB＋AE)＋EC＝AB＋AC．式(21-1)の右辺については，追加公理6'よりBE＋EC＝BE＋EC．これら2つと式(21-1)だから，追加公理1"より］

AB＋AC＞BE＋EC.　　(21-2)

また三角形EDCにおいて，［命題Ⅰ・20より］

EC＋ED＞DC.

よって［線分BDを両辺に加えると，追加公理6'と公理4より］

(EC＋ED)＋DB＞DC＋DB.

そうすれば［式(21-2)の導出と同様の展開により，］

EC＋EB＞DC＋DB.　　(21-3)

［式(21-2)と(21-3)だから，追加公理1'より］なおさら

AB＋AC＞DC＋DB.

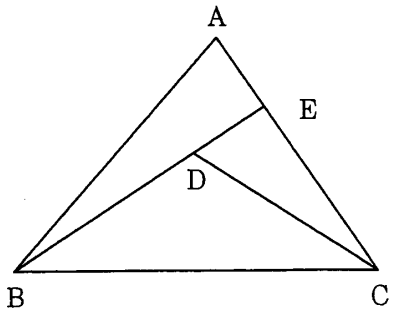
また三角形CDEおよび三角形ABEにおいて，［命題Ⅰ・16より］

∠BDC＞∠CED（＝∠CEB），　∠CEB＞∠BAC.

したがって［追加公理1'より］なおさら

∠BDC＞∠BAC.

Q.E.D.



図A 6　2辺の和