改良代理制約法における等式制約問題

塩村　尊*，岩崎　彰典**

要　旨

Nakagawaによる改良代理制約法は大規模離散最適化問題を効率良く解くために提唱されたアルゴリズムであるが，これは目的関数，及び制約条件を規定する関数が全て加法的分離可能であることを要求することに加えて，等式制約の存在を許さない．特に2番目の要求は変数の最適比率を求めることを目的とした問題に標的アプローチを適用するための大きな障害となっている．本稿の目的は，ポートフォリオ選択問題を例として，ペナルティ関数法と標的アプローチを組合せることにより上述した等式制約問題に対処できることを示す点にある．

An Improved Surrogate Constraints Method for Solving a Problem with Equality constraints

Takashi SHIOMURA，Akinori IWASAKI

Abstract

An improved surrogate constraint(ISC) method developed by Nakagawa effectively solves large scale optimization problems. The method, however, requires a problem to consist of separable and summable functions. In addition, equality constraints are not permitted in the problem. We thus cannot directly apply the ISC method to a typical nonlinear optimization problem, such as a quadratic programming problem, nor that of finding a solution for a problem that sums to a constant. The purpose of this paper is to suggest an approach overcoming these difficulties with the aid of orthogonal transformation and penalty functions, and to show an application of the ISC method to a portfolio selection problem.

*関西大学総合情報学部教授

**岡山理科大学情報処理センター助教授

1．はじめに

Nakagawa［2］による改良代理制約法(以下，ISC法と略記する)は大規模離散最適化問題を効率良く解くために提唱されたアルゴリズムであるが，これは目的関数，及び制約条件を規定する関数が全て加法的分離可能であることを要求することに加えて，等式制約の存在を許さない．特に2番目の要求は，例えばポートフォリオ選択問題のように，変数の最適「比率」を求めることを目的とした問題にISC法を適用するための大きな障害となっている．

一方，等式制約を含む最適化問題の古典的解法として，ペナルティ関数法と呼ばれるものがある（Luenberger［1］参照）．これは最小化問題

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Min}_{x}\ f(\boldsymbol{x})\\&\text{subject to } g_i(\boldsymbol{x})=0,\ i=1,2,\ldots,m\end{aligned}$$

を直接扱う代わりに，大きな正定数に対して上の近似問題

$$\operatorname*{Min}_{x}\ f(\boldsymbol{x})+K\sum_i g_i^2(\boldsymbol{x})$$

を考えるものである．十分大きなKに対してこれら2つの最適解がほぼ等しいことは容易に予想される．本稿の目的は，ポートフォリオ選択問題を例として，ペナルティ関数法とISC法を組合せることにより上述した等式制約問題に対処できることを示す点にある．合わせて，塩村［3］で考察した等式制約問題への対処法の数値実験結果も挙げておく．

2．ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオ選択問題は$\boldsymbol{x}$をn種類の証券に対する投資比率，即ちポートフォリオを表すベクトルとし，Cを分散共分散行列とした時，最小化問題

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Min}_{x}\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x}\\&\text{subject to } \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}=1,\\&\qquad\qquad \mu^T\boldsymbol{x}\geq R,\\&\qquad\qquad \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0},\end{aligned}\qquad \mathrm{I}$$

に帰着する．ここで，$\boldsymbol{e}^T\equiv(1,1,\ldots,1)$，$\mu^T\equiv(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$であり，後者は期待収益率ベクトルを表している．又，Rは投資家が最低限保証されることを望む収益率である．ここで塩村［3］と同様に，Cが正則であると仮定すると，適当な直交行列Pにより対角化することができる．そこで，n個の固有値を対角要素に持つ対角行列

$$\Lambda\equiv diag\ [\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]$$

を定義し，$P^TCP=\Lambda$なる関係があるものとする．

この時，$\boldsymbol{y}\equiv P^T\boldsymbol{x}$とすると，問題Ｉは最小化問題

$$
\begin{aligned}
&\underset{y}{\mathrm{Min}}\ \ \boldsymbol{y}^T\Lambda\boldsymbol{y} \\
&\text{subject to}\ \ (\boldsymbol{e}^TP)\,\boldsymbol{y}=1, \\
&\qquad\qquad (\mu^TP)\,\boldsymbol{y}\geq R, \\
&\qquad\qquad\qquad P\boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{0},
\end{aligned}
\qquad \text{II}
$$

と同値であることが分かる．ここで，$P^T\equiv[p'_{ij}]$，$\alpha\equiv\underset{k}{\min}p'_{ik}$，$\beta\equiv\underset{k}{\max}p'_{ik}$と定義した時，$\alpha_i\leq y_i\leq\beta_i$，$i=1,2,\ldots,n$と仮定して良い．

さて，問題IIには等式制約が含まれるが，$K_t>0$，かつ$K_t\to\infty$なる数列$\{K_t\}$を与え，補助的な問題

$$
\begin{aligned}
&\underset{y}{\mathrm{Min}}\ \ \boldsymbol{y}^T\Lambda\boldsymbol{y}+K_t(\boldsymbol{e}^TP\boldsymbol{y}-1) \\
&\text{subject to}\ \ (\boldsymbol{e}^TP)\,\boldsymbol{y}\geq 1, \\
&\qquad\qquad (\mu^T\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{y}\geq R, \\
&\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{0},
\end{aligned}
\qquad \text{III}
$$

を考えると，十分大きなtに対しては制約条件$\boldsymbol{e}^TP\boldsymbol{y}\geq 1$は，ほぼ等号で満たされると推測される．従って，問題Ｉを解く手順は次のようになる．

Step 1：$K_t>0$，許容誤差$\boldsymbol{\varepsilon}$，及び最大反復計算回数Mを与え，区間$[\alpha_i,\ \beta_i]$，$i=1,2,\ldots,n$を適当に分割する．

Step 2：この分割から作られた格子点の集合を基に問題IIIを解き，その解を$\boldsymbol{y}^*$で表す．この時，$\boldsymbol{e}^TP\boldsymbol{y}^*-1$が$\boldsymbol{\varepsilon}$より小さいならば，計算を停止して$\boldsymbol{x}^*\equiv P\boldsymbol{y}^*$を問題Ｉの最適解と見なす．そうではない場合は$t+1\leq M$ならば$K_{t+1}>K_t$なる$K_{t+1}$を与えてStep 2を繰り返す．$t+1>M$ならば，計算を停止する．

3．数値例

以下の数値例は津野（［4］，pp.124−5）による．

$$
C=\begin{pmatrix}
69.24223 & 36.43225 & 27.18174 & 7.227213 & -5.014241 & 29.79836 \\
 & 111.5581 & 52.50199 & -15.80629 & -16.49178 & 0 \\
 & & 70.44837 & 8.856301 & 11.38357 & 23.38342 \\
 & & & 114.8152 & -42.24579 & 1.657492 \\
 & & & & 91.35562 & -37.80582 \\
 & & & & & 164.9612
\end{pmatrix}
$$

$\mu^T=(2.936458,\ 2.752708,\ 2.27917,\ 1.551458,\ 1.475417,\ 4.525625)$

$R=0.25$

とする．この時，

$$P=\begin{pmatrix} 0.867728 & 0.22583 & 0.149534 & 0.092952 & 0.235119 & 0.331314 \\ -0.144313 & 0.636378 & -0.497212 & 0.311245 & -0.349079 & 0.32901 \\ -0.448623 & 0.374717 & 0.602509 & 0.144315 & 0.426217 & 0.304663 \\ -0.077982 & -0.459808 & -0.322159 & 0.685583 & 0.424118 & 0.169731 \\ -0.027574 & 0.338684 & -0.458824 & -0.324571 & 0.673784 & -0.338648 \\ -0.134605 & -0.278354 & -0.230427 & -0.546159 & 0.085677 & 0.738697 \end{pmatrix}$$

$\Lambda=diag\,[44.0173,\ 158.044968,\ 11.520776,\ 129.163208,\ 73.95179,\ 205.682678]$

となる．又，

$\alpha^T=(-0.448623,\ -0.459808,\ -0.497212,\ -0.546159,\ -0.349079,\ -0.338648)$

$\beta^T=(0.867728,\ 0.636378,\ 0.602509,\ 0.685583,\ 0.673784,\ 0.738697)$

である．

我々が数値計算により得た解は表1の通りであった．表中，第2列は津野（[4]，p.125）がパラメトリック2次計画法により得た最適解であり，第3列は塩村[3]で考察を行った方法（便宜上，これを「挟み撃ち法」と呼ぶ）により解を算出した結果である．第4列は$K=100$に対してペナルティ関数法により計算を行った結果である．但し，これらの計算結果は小数点4位で丸められている．又，最終行の誤差は問題IIIを解いた時の等式制約のズレ，$\boldsymbol{e}^T P\boldsymbol{y}^*-1$の値を意味するものである．

表1　ペナルティ関数法による計算結果：津野の数値例

変数	津野数値解	挟み撃ち法	ペナルティ関数法
x_1	0.0066	0.0068	0.0059
x_2	0.2032	0.2031	0.2020
x_3	0.0000	0.0000	0.0001
x_4	0.2695	0.2694	0.2707
x_5	0.3646	0.3644	0.3645
x_6	0.1562	0.1563	0.1567
誤差	0.0000	0.0000	0.0000

実は，津野の例では$K=0$に設定してもほぼ同じ解に到達する．そこで，Rを6銘柄期待収益率の平均値2.5865972に設定し，上と同じく挟み撃ち法，及び$K_0=0$，$K_1=10$，$K_2=100$に対して計算を行った結果は表2の通りである．表中，網掛けの列はペナルティ関数法により得た計算結果であり，そうではない列はExcelのソルバー（準Newton法）で計算した結果である．この表によりペナルティ関数法の有効性が確認される．

表2　Rを平均収益率で与えた場合の計算結果

変数	挟み撃ち法	K_0		K_1		K_2	
x_1	0.0501	0.0390	0.0395	0.0504	0.0476	0.0516	0.0519
x_2	0.2055	0.2142	0.2143	0.2068	0.2089	0.2060	0.2067
x_3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
x_4	0.1946	0.2266	0.2275	0.1977	0.1991	0.1928	0.1913
x_5	0.3018	0.3354	0.3360	0.3059	0.3066	0.3011	0.3018
x_6	0.2489	0.2290	0.2280	0.2455	0.2454	0.2485	0.2480
誤差	0.0009	0.4410	0.0454	0.0064	0.0076	0.0000	0.0000

4．結語

冒頭に述べたようにISC法は等式制約の存在を許さないため，これを最適配分問題に直接適用することはできない．しかしながら，ISC法とペナルティ関数法を組合せることにより，ほとんどプログラムを変更することなく最適配分問題にこれを適用することができることは上に示した通りである．本稿では更に，塩村［3］で考察した等式制約問題への対処方法の数値実験も試みた．これら2つ数値実験の結果はほぼ満足できるものであったが，いずれがより優れているかについては更なる検討が必要である．

現実の非線形問題の多くは2次計画問題として定式化せざるを得ない．この事実を考えると，これまで提唱してきた直交変換による分離可能な問題への変換，及び挟み撃ち法，或はペナルティ関数法による等式制約への対応はISC法の応用可能性を確実に広げることになるであろう．

参考文献

［1］Luenberger, D. G.：Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, NY (1969).

［2］Nakagawa, Y.：An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.46 No.2, pp.145−163 (2003).

［3］塩村尊：離散最適化アルゴリズムのポートフォリオ選択問題への応用，情報技術と最適化アルゴリズム研究報告書，pp.43−50，関西大学工業技術研究所（2002）．

［4］津野義道：ポートフォリオ選択論入門，共立出版株式会社（1991）．