関西大学『社会学部紀要』第28巻第3号，1997，pp.105-137　　ISSN 0287-6817

郵送調査における返信パターンの数理モデル
——Huxleyモデルの検証とその拡張——

林　英夫・村田晴路

Mathematical Model for Estimating Response Patterns to Mail Surveys : Inspection and Improvement of Huxley's Exponential Growth Model

Hideo HAYASHI and Harumichi MURATA

Abstract

Although much has been written about various facets of the methodology of mail surveys, the purposes of most such studies have been to throw more light on mail surveys by showing how to get a high rate of returns and the extent to which a high return reduces bias in results. The general problem of analyzing patterns of responses to mail surveys has received relatively little attention from survey analysts. The purpose of this paper is to provide a statistical method to analyze the contention that response patterns to mailed surveys are stable and predictable.

Seventeen different mail surveys that provide records on daily or weekly returns of questionnaires, covering different subject matters, time periods, and populations surveyed, are examined. On the basis of this analysis, it is concluded that the specific mathematical function model that best fits the pattern described is the improved Huxley's exponential growth model: $R=N-ab^tc^{t^2}d^{t^3}$ (R=number of responses accumulated by day or by the end of the week, N=number of questionnaires mailed initially, t=elapsed time in days or weeks, and ***a, b, c,*** and ***d*** are parameters to be estimated empirically). Though there is some difference between the actual and model ogive curves before the maximum point of the first wave, subsequently, the conformity is surprisingly high and overall conformity attains $R^2=0.96\sim0.99$. The major contribution of our study is the discovery that various response patterns are attributed to the specific mathematical function model and the success to validate it across a great variety of respondents.

Key words : mail survey, non-response bias, response rate, cumulative return rate, response patterns, stability of response pattern, predictability of response pattern, exponential growth model

抄　録

郵送調査法の方法論的研究は、多方面から取り組まれ、多数の文献の蓄積が見られるが、それらの目的は、返信率をいかに高めるか、回答のバイアスをいかに減少させるかの問題に焦点を当てたものが多い。それに比べて、郵送調査における返信パターンに関しては、研究対象として注目されることが極めて少なかったといえよう。本研究の目的は、郵送調査における返信パターンが安定したものであるのか、返信率の予測が可能であるのかについての問題を分析するための統計的な手法を示すことにある。

本稿では、主題、期間、母集団など、計画が異なる調査で、日別あるいは週別の返信数の記録がとられた17件の調査事例を分析の対象とした。この分析の基礎として、Huxley (1980) の成長指数関数モデル (exponential growth model) を発展させた $R=N-ab^tc^{t^2}d^{t^3}$ (Rは日（週）別の返信数、Nは当初の質問紙の発送数、tは経過日（週）数、a，b，c，dは経験的に推定される係数）を適用して、それが返信パターンに最も適合する数理モデルであるという結論を得た。累積返信数曲線とモデル曲線との誤差は、返信がまとまって最初に訪れる第1波 (first wave) の返信数が極大になる時点までは両者の間にいくらか認められるが、それ以降は極めて高い一致を示し、全体としての適合度が決定係数 R^2値で0.96～0.99を達成した。本研究は、広範囲の異なる応答者による多種多様な返信パターンに対して、同一の数理モデルが成立することを見い出した点で成果を得たといえよう。

キーワード：郵送調査、無応答バイアス、返信率、累積返信率、返信パターン、返信パターンの安定性、返信パターンの予測可能性、成長指数関数モデル

はじめに

郵送調査法に関する方法論的研究は、返信率の向上を目的としたものが主流を占め、その蓄積も欧米を中心として膨大な数にのぼる。その中にあって、返信パターンの分析に関する研究は、返信率を予測する上で欠かせないものであり、研究者や実務家の関心も高かったと思われるが、研究事例が意外に少なく、研究の対象としてはあまり重視されてこなかったようである。この領域の先駆的研究としてはLindsay (1921)、Robinson and Agisim (1951)、Cox (1966)などがあり、数多くの郵送調査を実施して、日別返信数を克明に記録した貴重な資料を残している。だが、これらの研究は、統計的な分析の手法が初歩的であったり、得られた結論が経験的知見や根拠の乏しい仮説に基づくものが大部分であるといってよい。返信にみられる規則的なパターンの存在、それに基づく効果的な督促のタイミング、最終的な返信数の予測などについて、かなり古くからその可能性が指摘され、いくつかの試みもなされてはきたが、その結論の多くは帰納的な経験則の域を出ていない。

返信パターンの研究が郵送調査法の方法論的研究において主要なテーマとなりにくかった理由は、研究者の統計的知識や数学的知識の制約ばかりではない。郵送調査の返信数は、調査の主体、対象者、地域、時期、期間、テーマや内容、質問数、返信用切手の有無、謝礼の有無のような多種多様な要因が複雑に絡み合って、その総合的な帰結として決まるものである。したがって、本来、一定の返信パターンなど存在するはずはなく、したがって、返信数の予測などできるはずがないという根強い偏見が、多くの研究者の中にあったことは否定できない。おそらく、今日でも、そうした見方をしている研究者は少なくないものと思われる。

しかしながら、Huxley (1980) によって、非常に素朴ではあるが、説得力のある返信パターンに関する数理モデルが発表されて以来、これに刺激されて、Hill(1981)、Parasuraman(1982)などにより、次々に新しい数理モデルが提唱されてきた。これらの多くは、Robinson and Agisim (1951) やCox (1966) らが残したデータに最も適合する数理モデルを、数値解析の手法を用い、おそらくは試行錯誤によって帰納的に求めたものであろうと思われる。

本稿では、EXCELおよびSPSSなどの表計算、統計解析パッケージの曲線推定技術を用いて、Huxleyの数理モデルを追試、検証するとともに、その限界を探ることを意図している。さらに、そのモデルを拡張し、より適合度の高いモデルを開発することをも目指している。ここでわれわれが提唱する新しい返信パターンの数理モデルは、以下に示すとおりである。

$$R_t = N - ab^t c^{t^2} d^{t^3}$$

R_tは返信が始まってからt日（週）後の累積返信数、Nは質問紙の発送数、tは最初の返信が届いた時点または最初の返信の消印日を基点(1)とした経過日数(経過週数)、a，b，c，dは調査によって異なる媒介変数である。本稿では、返信パターンの数理モデルの開発に取り組

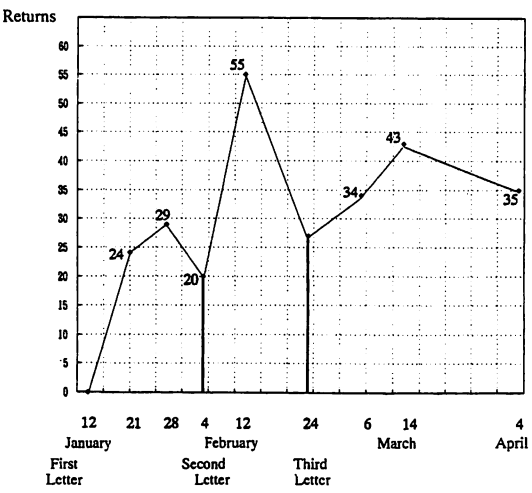
んだ先駆者たちの研究の成果を跡づけながら、われわれが提唱するこの新しい数理モデルの開発意義と問題点を明らかにする。

1．返信パターンに関する先駆的研究

郵送調査における返信数の継日変化に着目し、いち早く定量的な研究を行ったのはLindsay（1921）である。それは、郵送調査の返信率を向上させる効果的な督促のタイミングを知ることを目的とした実践的研究であった。当時、一般的に用いられていた郵便督促の方法は、質問紙を発送した直後に第1回目の督促状を発送し、その後、漸次、間隔を開けながら第2回目、第3回目の督促を繰り返すというものであった。そこで、Lindsayは、督促のタイミングを返信数の継日変化（実際には約1週間単位の集計値の変化）を見て判断する2種類の独自な方法を考案し、それらの有効性を実証している。

その一つは、質問紙を発送してから後、増加傾向にあった返信数が急に減少し始めた時点で第1回目の督促状を発送し、督促によって増加に転じた返信数が再び急激な減少を始めた時点で第2回目の督促状を発送するもので、同様な督促を返信数の減少傾向が緩やかになるまで繰り返すという方法である。Figure 1はLindsayの論文のグラフ1から引用したもので、督促状

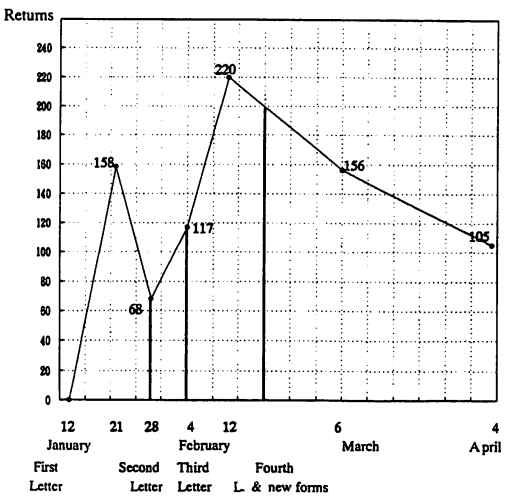
Figure 1 Effect of Follow-up Letters on Questionnaire Work (by method 1)



Note) The numbers on the figure indicate the total number of cumulative returns during each period of time.

Source) Quoted from Lindsay (1921), p.304.

Figure 2 Effect of Follow-up Letters on Questionnaire Work (by method 2)



Note) The numbers on the figure indicate the total number of cumulative returns during each period of time.

Source) Quoted from Lindsay (1921), p.306.

の発送日（縦の太線の真下の数字）と返信数（グラフの黒点の近傍に記された数字)、および返信数をカウントした日付（グラフの黒点の真下の数字）が示されている。1921年1月12日に質問紙を発送し、9日後の同月21日までに24通の返信を得ている。その後28日までの1週間に29通の返信を得ているが、29日から2月4日までの1週間の返信数が20通に減少したために第1回目の督促状が発送されている。この督促により次の1週間の返信数は55通に達している。しかしながら、その後12日間の返信数の集計値（グラフから約27通と読み取れる）が急速に減少したために、2月24日に第2回目の督促状が発送されている。このようにしてほぼ定期的に(土曜日や日曜日、祝日などが入るために必ずしも一定とはならない)返信数をカウントしながら、そこに急激な減少傾向を見いだした時に督促状を発送するというのがこの督促方法の特徴で、最終的な返信率として67.9%を得ている。

その二つは、質問紙の発送後、返信数が最初に急激な減少傾向を示し始めた時に第1回目の督促を行うという点では上述の方法と同じである。しかし、第2回目以降の督促を、返信数の継日変化とは無関係に、徐々に間隔を広げながら実施し、返信数の減少傾向が緩やかになるまで繰り返すというものである。具体的には、第1回目の督促は返信数が急激に減少した日に、第2回目の督促は第1回目の督促から1週間後に、第3回目の督促は第2回目の督促から2週間後に実施するのがよいとLindsayは述べている。Figure 2は、Lindsayの論文のグラフ2から引用したもので、質問紙の発送は1921年1月12日、第1回目の督促状は同月28日、第2回目の督促状は第1回目から1週間後の2月4日に発送されている。第3回目の督促状は第2回目の発送から2週間後の同月18日（グラフの縦実線が督促状の発送日を表わすことから判断きるが、グラフには明示されていない）に発送されており、Lindsayはこの方法を用いて最終的に91.5%の返信率を達成し、この第2の督促方法は、第1の督促方法に比べて、返信率向上の点ではるかに効果的であったと述べている。

また、Suchman and McCandless (1940) は、無応答によるバイアスを研究した論文の中で、日別返信数の実測によって郵便督促および電話督促のタイミングを決める新しい方式を考案している。Suchman and McCandlessは、アイオワ州にある2つの都市の電話帳から無作為に選んだ600名の女性を計画標本として質問紙を発送し、返信が始まってからそれが5日間以上途絶えた日までの期間を第1波 (first wave) と呼んでいる。次にその時点での未返信者の中から転居や病気などで到達不能だった人を除く490名に対して再び同じ質問紙に督促状を添えて発送し、返信が始まってからそれが5日間以上途絶えるまでの期間を第2波（second wave）と定義した。そして、最終的に、郵送調査における未返信者332名の中から無作為に141名を抽出し、郵送調査の中でキーとなる項目だけを選んで作成した質問紙を読み上げる方式で電話調査を行い、その実施期間を最終波 (last wave) とした。その結果、第1波の返信率16.8%、第2波の返信率34.1%、最終波の応答率97.2%を得ている。

日別返信数の継日変化を実測することによって、そこに一定の規則的なパターンを見出し、

Table 1 Day-By-Day Cumulative Returns of Nine Mail Surveys

No.Days After Mailing	1 April 1946	2 May 1947	3 Jan. 1949	4 Nov. 1944	5 Dec. 1944	6 Sept. 1948	7 April 1948	8 Dec. 1946	9 Nov. 1947
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	1.5	1.7	*	1.2	1.6	0.6	1.0
3	0.8	2.2	7.8	*	*	7.8	5.1	3.8	6.5
4	7.4	6.9	17.9	*	8.4	*	15.2	15.8	*
5	*	25.0	*	32.1	21.1	*	*	*	*
6	*	46.6	*	43.7	32.7	41.9	*	*	48.7
7	49.2	58.7	60.1	56.9	54.9	49.2	46.3	58.2	55.6
8	57.6	*	69.4	69.0	69.7	57.1	52.0	64.1	63.3
9	71.2	*	77.8	77.5	*	64.6	58.4	71.5	69.5
10	80.9	73.4	83.5	*	*	71.7	66.0	76.0	73.4
11	85.8	79.4	87.8	*	84.1	*	74.4	79.5	*
12	*	84.4	*	91.6	87.2	*	*	*	*
13	*	87.8	*	92.5	89.8	84.8	*	*	88.3
14	92.2	*	94.2	93.8	92.9	87.2	87.8	85.6	90.6
15	93.8	*	95.1	95.8	95.4	88.6	90.0	86.9	93.6
16	95.0	94.7	96.1	96.4	*	91.5	91.8	**	97.3
17	96.2	95.2	97.0	*	*	93.2	93.6	90.1	97.9
18	96.8	96.3	97.7	*	**	*	95.3	90.5	*
19	*	97.1	*	97.8	99.1	*	*	*	*
20	*	97.8	*	98.3	99.3	96.4	*	*	98.8
21	97.9	*	98.6	98.4	99.7	96.8	97.4	93.8	99.1
22	98.4	*	99.0	99.3	99.8	97.4	97.7	94.6	99.4
23	98.9	99.1	99.2	99.8	99.9	97.9	98.3	**	99.7
24	99.4	99.2	99.4	*	*	98.6	98.9	96.9	100.0
25	99.5	99.3	99.5	*	*	*	99.3	97.2	*
26	*	99.5	*	**	100.0	*	*	*	*
27	*	100.0	*	99.9		99.7	*	*	
28	100.0	*	100.0	100.0		100.0	100.0	100.0	
Total Returns	2783	1417	4750	1435	1513	1948	3334	2222	673
Per Cent Returns	70	71	81	72	76	65	67	74	67
Initial mailing	4000	2000	5864	2000	2000	3000	5000	3000	1000
Subject	Radio	Toilet-ries	Clothing	Food	Food	Travel	Variety	Smoking	Travel

Note) *Weekend, **Holiday. 100 Per Cent＝Total number of questionnaires received in four weeks.
Source) Adapted from Robinson and Agisim (1951), p.422, Huxley (1980), p.66.

Table 2 Average Day-By-Day Cumulative Returns of Nine Mail Surveys

No. Days After Mailing	Per Cent
1	-
2	1.3
3	4.9
4	11.9
5	26.1
6	42.7
7	54.3
8	62.8
9	70.1
10	75.0
11	81.8
12	87.7
13	88.5
14	90.5
15	92.4
16	94.7
17	94.8
18	95.3
19	98.0
20	98.1
21	98.2
22	98.3
23	99.1
24	99.3
25	99.5
26	99.8
27	99.9
28	100.0

Note) 100 Per Cent＝Total number of questionnaires received in four weeks.
Source) Quoted from Robinson and Agisim (1951), p.423.

最終返信数の予測や調査を打ち切る適切なタイミングを知ることに役立てようとする試みは、すでにRobinson and Agisim（1951）の研究に見られる。Robinson and Agisimは、雑誌3社が1944年から1949年にかけて消費者を対象に実施した商品やサービスに関する9種の郵送調査について日別返信数を克明に調べた結果、返信には一定のパターンがあるらしいことを見い出している。Table 1はRobinson and Agisimの行ったこれらの調査における累積返信率の継日変化を、Table 2はその平均値を示したものである。Robinson and Agisimは、返信のない土曜日、日曜日、祝日の累積返信率を欠損値(＊)として扱っており、日別平均値を計算する場合にも欠損値を除いた数で除している。ところで、Table 1のデータには理解に苦しむ部分がいくつか見られることを予め指摘しておきたい。たとえば、1947年5月のSurvey 2の10日目から13日目のように土・日を挟んで中5日あるべき平日が4日しかなかったり、1944年12月のSurvey 5の19日目から23日目のように土・日に祝日が続いていながら、次の土・日まで中4日あるべきところが中5日になっている。さらに、Table 2の数値とTable 1から計算された数値にも誤りが数カ所に見られ、なかには0.5%前後の食い違いを示す個所もある。計算違いか誤植なのかはわからないが、ここでは原データに手を加えることなく分析を進めることにした。

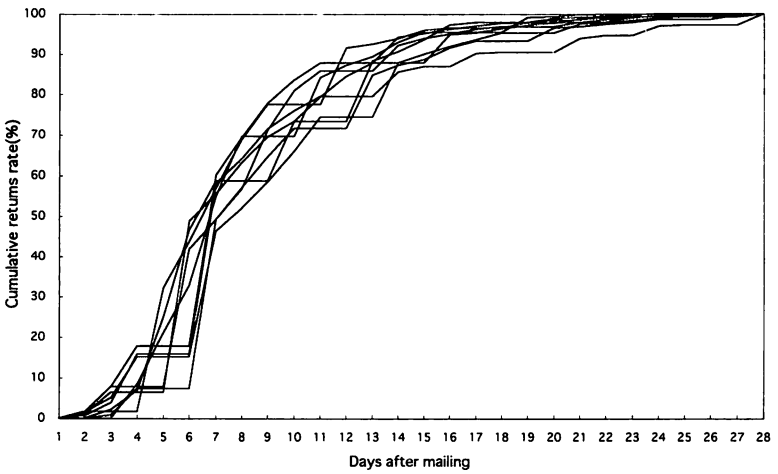
最終返信数を基数とした場合、質問紙の発送日から数えて最初の7日以内に50%から60%、2週間以内にほぼ90%、3週間以内にほぼ100%近くが返信されることから、郵送調査に関する限り、最初の質問紙を発送してから4週間で調査を打ち切っても問題ないとRobinson and Agisimは主張している。また、これら9種の郵送調査結果を見る限り、返信のパターンは非常に似通っており、質問紙を配布してから数日間の返信数に基づいて最終返信率を正確に予測することも不可能ではないと述べている。

Cox（1966）は、上記のRobinson and Agisimの郵送調査の結果に関し、それらが雑誌社を

スポンサーとした同質性の高い雑誌定期購読者を対象としており、調査内容も商品やサービスに関する消費者調査（consumer survey）であることを理由に、このデータだけでは、返信パターンの規則性や初期の数日間の返信状況に基づく最終返信率の予測可能性などの立証は不十分であると批判している。そして自らは、技術者を調査対象者として、石油製品、縫製用ファスナーなどの工業製品やサービスに関する6種の産業調査(industrial survey)を実施し、それらの返信パターンをRobinson and Agisimの消費者調査の結果と比較検討している。

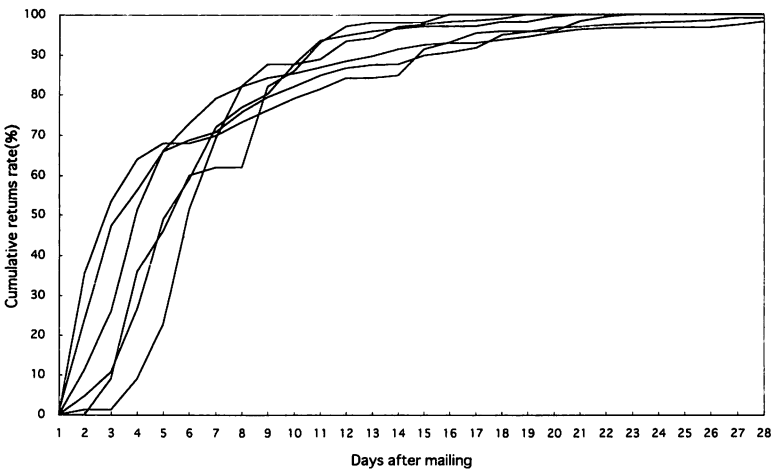
Robinson and Agisimによる9種の郵送調査と、Coxによる6種の郵送調査の結果を相互に

Figure 3 Cumulative Returns for Nine Mail Surveys of Consumer Goods and Services



Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 4 Cumulative Returns for Six Mail Surveys of Industrial Goods and Services



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

比較しやすいように、それぞれの累積返信率曲線を図示したものがFigure 3およびFigure 4である。なお、これらの図では、比較の便宜上、累積返信率の基数を最終返信数としてある。また、Table 3はCoxの論文による6種の産業調査の個々の累積返信率を示したものである。Coxは、Robinson and Agisimの9種の消費者調査と自らの6種の産業調査の結果を総合的に比較分析する目的で、両調査のそれぞれについて、全体を一つの調査と見なした全体累積返信

Table 3 Response Patterns for Six Mail Surveys of Industrial Goods and Services

Days after mailing	Per cent of total returns : Survey					
	1	2	3	4	5	6
1	0.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	23.8	11.3	4.7	1.2	0.0	35.5
3	47.3	25.8	10.6	1.2	9.0	53.5
4	56.3	51.3	26.5	8.9	36.0	64.0
5	66.0	66.1	49.0	22.5	46.0	68.0
6	68.8	72.9	59.1	51.5	60.0	68.0
7	70.8	79.2	72.1	69.2	62.0	69.8
8	75.7	82.1	76.9	82.2	62.0	73.3
9	79.5	84.2	80.2	87.6	82.0	76.2
10	82.1	85.3	87.6	87.6	86.0	79.1
11	84.9	86.8	88.8	93.5	93.0	81.4
12	86.7	88.4	93.3	94.7	97.0	84.3
13	87.5	89.7	94.2	95.9	98.0	84.3
14	87.7	91.3	96.9	96.4	98.0	84.9
15	89.8	92.4	97.5	97.0	98.0	91.3
16	90.5	92.9	98.2	97.0	100.0	93.0
17	91.6	92.9	98.4	97.0	—	95.3
18	94.9	93.7	98.9	98.2	—	95.9
19	95.7	94.5	100.0	98.2	—	95.9
20	96.7	95.5	—	99.4	—	95.9
21	96.9	96.3	—	100.0	—	98.3
22	97.4	96.6	—	—	—	99.4
23	97.7	96.8	—	—	—	100.0
24	98.0	96.8	—	—	—	—
25	98.2	96.8	—	—	—	—
26	98.5	96.8	—	—	—	—
27	99.0	97.4	—	—	—	—
28	99.0	98.2	—	—	—	—
more than 28	100.0	100.0	—	—	—	—
Total returns	391	380	446	169	100	172
Response rate	30.3%	32.0%	22.3%	30.3%	26.1%	53.1%
Base	1290	1189	2000	558	383	324

Source) Adapted from Cox (1966), p.394.

率（total return rate）と標準偏差値を算出し、後者を前者で除した変動係数（coefficient of variation）を採用している。そしてこの測度が返信率の相対的なバラツキの大きさを比較したり、累積返信率の安定性を調べるために重要であり、最適な督促のタイミングを決定する上で客観的な基準になりうると述べている。両調査結果のそれぞれの全体累積返信率を示した結果がTable 4、標準偏差値と変動係数を図示した結果がFigure 5 およびFigure 6 である。

Coxは、消費者調査では7日目に変動係数が激減していることから、7日目より前に督促状を出すのは賢明ではないと述べている。また、変動係数は8日目、9日目と増加した後、10日目から減少傾向を示し、さらに14日以降3％台へと低下していることから、消費者調査においては、質問紙の発送日より数えて7日目から14日目の間に督促状を出すのが適切であるとも指摘している。

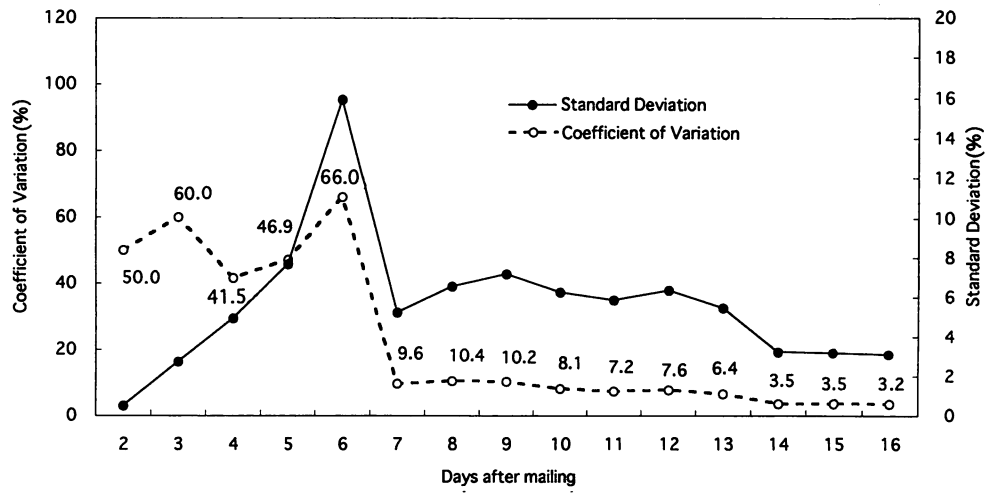
一方、Coxは、自らの産業調査では、最初の数日間を除けば、概して変動係数の値が消費者調査のそれよりも低い傾向にあることから、最初の督促のタイミングは6日以内が適切である可能性が高いと述べている。また、Figure 7 に示したように、消費者調査と産業調査における全体累積返信率を、返信総数を基数として比較すると、産業調査の方が消費者調査に比べて高く、5日目および6日目の時点で開きが40％と最も大きくなり、7日目から14日目にかけてその差が次第に小さくなるものの、14目目以降はいずれの累積返信率も90％を上回り、両者の累積返信率曲線のパターンに差が見られなくなると指摘している。

Table 4 Total Cumulative Returns for Nine Consumer Surveys and Six Industrial Surveys

Days After Mailing	Nine Consumer Surveys	Six Industrial Surveys
1	—	0.2%
2	1.0%	13.1
3	4.5	26.1
4	11.8	41.9
5	16.2	56.0
6	24.1	64.8
7	54.4	72.3
8	62.4	77.1
9	69.8	81.4
10	76.1	84.8
11	81.1	87.4
12	82.7	90.0
13	85.0	90.9
14	90.5	92.2
15	92.0	93.8
16	93.7	94.6
17	94.9	95.2
18	95.6	96.4
19	96.0	97.1
20	96.5	97.7
21	97.6	98.2
22	98.1	98.6
23	98.5	98.7
24	99.0	98.8
25	99.2	98.9
26	99.2	98.9
27	99.4	99.2
28	100.0	99.3
More than 28	—	100.0
Total Return	20,075	1,657
Response Rate	72.2%	28.8%

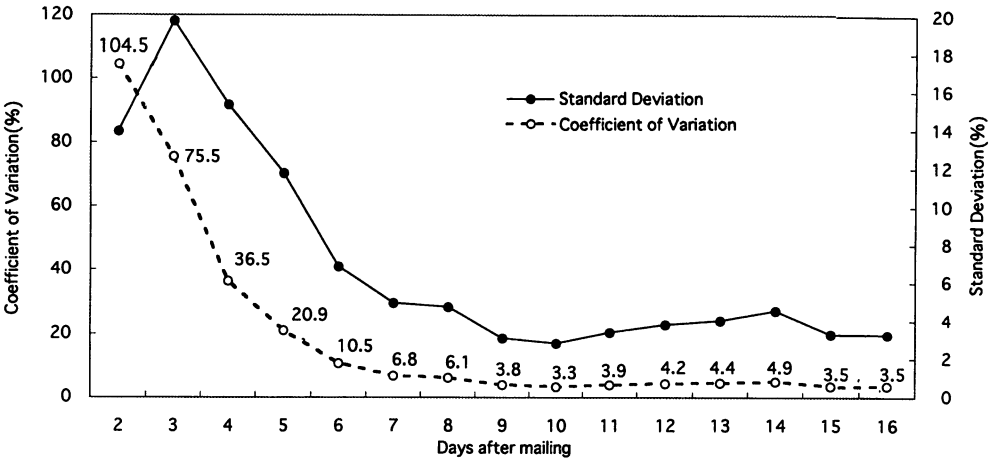
Source) Quoted from Cox (1966), p.393, p.395

Figure 5 Analysis of Total Cumulative Returns for Nine Consumer Surveys



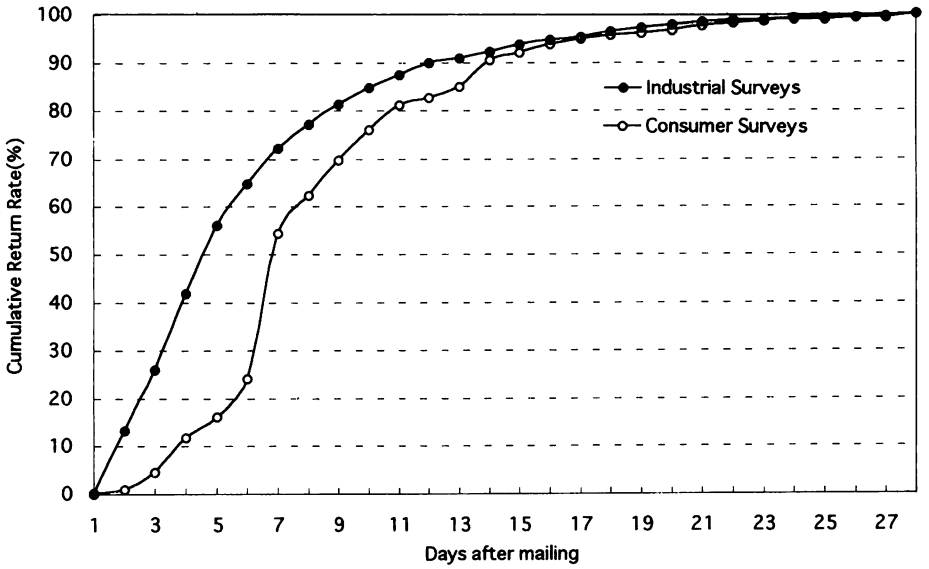
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.393.

Figure 6 Analysis of Total Cumulative Returns for Six Industrial Surveys



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.395.

Figure 7 Total Cumulative Response Curves for Mail Surveys of Consumer vs. Industrial Goods and Services



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.393, p.395, p.396.

2．Huxley による返信パターンの数理モデル

郵送調査における返信パターンの研究は、督促の効果的なタイミングを知る目的で返信数の継日変化に注目した Lindsay (1921) の研究に始まり、Robinson and Agisim (1951) による消費者調査の分析によって返信に一定の規則的なパターンがあるらしいことが見出された。そして Cox (1966) は、その産業調査の結果を Robinson and Agisim による消費者調査の結果と対比し、統計的手法を用いて返信の継日変化を定量的に分析することで、何回かにわたって反復して行われる督促状発送の最適なタイミングや効果的な実査期間などを検討している。

しかしながら、これらの研究では、返信パターンの規則性に数理モデルを具体的に適用するまでには至っていない。郵送調査における返信パターンが、調査地域、調査主体、調査対象者の特徴、調査のテーマや内容、謝礼の有無、返信用封筒と切手や便箋の種類のようなさまざまな要因の影響を受けるために、実際の事例に対して最終返信率を予測することは難しいと Cox は述べている。

いろいろな条件のもとで実施された郵送調査の累積返信数の継日変化が、パラメーターを変えるだけで、近似的にではあるが、同じ関数式を満たすことを最初に示したのは Huxley (1980) であった。Huxley は、「返信に及ぼす外的刺激が無数にあっても、返信パターンには基本的な数理モデルが存在し、それは返信が始まってからの時間という単一の独立変数で説明できる」

という仮定のもとに、過去の研究で明らかにされた日別返信数のデータを丹念に調べて、その大部分に高い水準で適合する数理モデルとして、以下に示す成長指数関数モデル(exponential growth model)を提示した。

$$R_t = N - ab^t \quad \cdots\cdots(1)$$

R_t = t 週後の累積返信数

N = 当初の質問紙の発送数

t = 質問紙を当初に発送した後の週単位の経過時間

a, b = 調査によって異なる係数

数理モデル式(1)における項 ab^tは、t 週後の未返信数である。Huxley によれば、係数 a は当初の質問紙の発送数Nの大きさよって変わる scaling factor であり、理論的に重要な意味はもたないが、b は理論的な解釈が可能な重要な意味を持つ係数で、週ごとの未返信数の減少の割合を表している。ある週の未返信数が前週の$100b$ %であること、つまり、未返信数が各週あたり$100(1-b)$%ずつ減少していることを意味する。係数 b は、「調査対象者が質問紙を返信することへの抵抗の度合いを表わす測度」と解釈でき、0と1の間にあって、この数値が1に近いほど未返信数が多く、したがって返信速度が遅く、0に近いほど未返信数が少なく、それだけ返信速度が速いことになる。Huxley は、この係数を resistance factor と名付けている。数理モデル式(1)を変形した$(N-R_t)=ab^t$の両辺の自然対数をとると以下の(2)式のようになる。

Table 5 Cumulative Weekly Returns

Week	Number of returns	Return rate	Proportion of total returns by week
1	5	0.1%	0.2%
2	100	2.3	4.5
3	649	15.0	29.1
4	937	21.7	41.9
5	1,194	27.7	53.4
6	1,330	30.8	59.5
7	1,523	35.3	68.2
8	1,659	38.5	74.3
9	1,738	40.3	77.8
10	1,918	44.5	85.9
11	2,067	47.9	92.5
12	2,121	49.2	94.9
13	2,177	50.5	97.4
14	2,205	51.1	98.7
15	2,214	51.3	99.1
16	2,228	51.6	99.7
17	2,234	51.8	100.0
N	4,314	100.0	

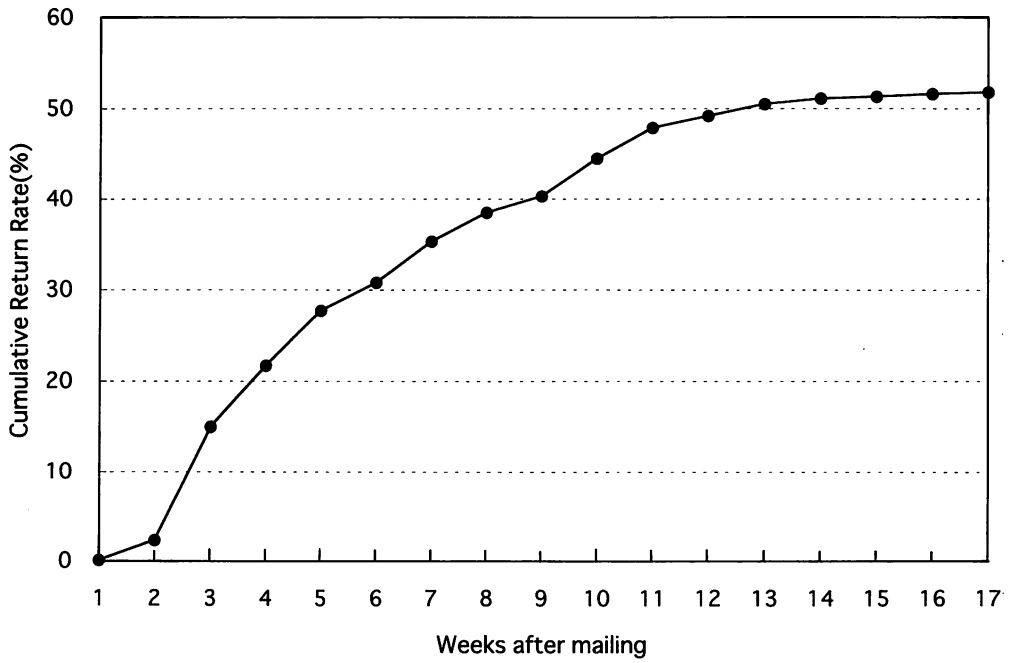
Source) Quoted from Huxley (1980), p.64.

$log_e(N-R_t)=ct+d$　ただし c，d は定数で、$c=log_e(b)$，$d=log_e(a)$ ……(2)

Huxley は、$log_e(N-R_t)$ が t の一次関数として近似できることを見い出したのである。Table 5 は、Huxley が自らの提唱する数理モデル式(1)の検証に用いた郵送調査のデータである。この調査はオーストラリアのクイーンズランド州当局の財政的支援を受けて1973年に行われたもので、その実施目的は同州の経済活動の地理的分散を分析する工業モデルを作成することにあり、調査対象は同州内の従業員 3 人以上の製造業4,314社であった。質問紙は 4 ページであり、その内容は各企業の売上高、従業員数、床面積などを問うもので、回答責任者には、記入が済んだら署名した上で、返信用封筒に封入することが求められた。Figure 8 は Table 5 に基づいて作成された累積返信率曲線である。

Huxley は t を独立変数、$y=log_e(N-R_t)$ を従属変数とした線形回帰を、(例えば、最初の区間は $1 \leqq t \leqq 3$、次の区間は $1 \leqq t \leqq 4$ というように) 区間ごとに行い、それぞれの回帰式の当てはまりの程度を示す決定係数 r^2値 (従属変数 y の実測値と当てはめた回帰直線による y の予測値 $\hat{y}$ との Pearson の積率相関係数 r の 2 乗) を求めている。また、t と y が線形関係にない、つまり $r^2=0$ という帰無仮説を分散分析によって検定した上で、区間ごとに求めたそれぞれの決定係数 r^2値の有意水準を算出している。Huxley の論文では有意差検定の結果のみが示されているが、Table 6 は Huxley が行った回帰分析をわれわれが追試した結果を示したもので、

Figure 8　Cumulative Weekly Returns



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

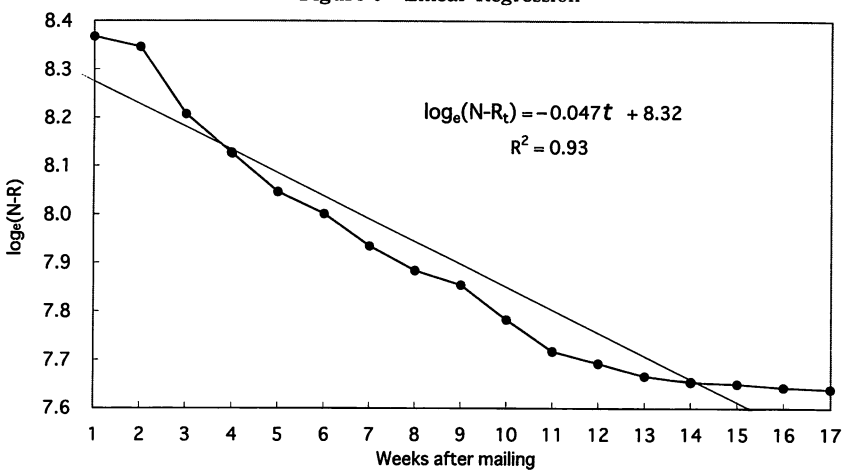
Table 6 Regression Results

Week(t)	$log_e(N-R_t)$	Interval of Regression	c $=log_e(b)$	d $=log_e(a)$	a	b	r^2	Significance level for r^2
1	8.368							
2	8.346							
3	8.207	$t \leqq 3$	-0.081	8.47	4760	0.922	0.85	0.253
4	8.125	$t \leqq 4$	-0.087	8.48	4810	0.917	0.94	0.031
5	8.046	$t \leqq 5$	-0.087	8.48	4807	0.917	0.97	0.002
6	8.001	$t \leqq 6$	-0.081	8.46	4740	0.922	0.97	0.000
7	7.934	$t \leqq 7$	-0.077	8.45	4695	0.926	0.98	0.000
8	7.884	$t \leqq 8$	-0.074	8.44	4643	0.929	0.98	0.000
9	7.854	$t \leqq 9$	-0.068	8.43	4572	0.934	0.97	0.000
10	7.782	$t \leqq 10$	-0.066	8.42	4536	0.936	0.98	0.000
11	7.717	$t \leqq 11$	-0.065	8.41	4513	0.937	0.98	0.000
12	7.693	$t \leqq 12$	-0.063	8.40	4468	0.939	0.98	0.000
13	7.667	$t \leqq 13$	-0.060	8.39	4415	0.942	0.98	0.000
14	7.654	$t \leqq 14$	-0.058	8.38	4349	0.944	0.97	0.000
15	7.650	$t \leqq 15$	-0.054	8.36	4274	0.947	0.96	0.000
16	7.643	$t \leqq 16$	-0.050	8.34	4196	0.951	0.94	0.000
17	7.640	$t \leqq 17$	-0.047	8.32	4118	0.954	0.93	0.000

Note) N=4,314

Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

Figure 9 Linear Regression



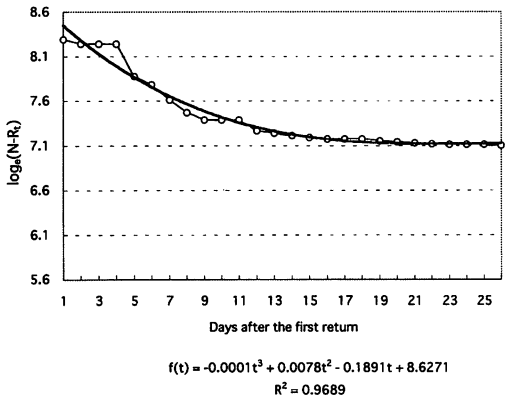
Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.65.

有意水準が小数第3位まで示されている。またFigure 9は、区間 $1 \leqq t \leqq 17$ について回帰した場合の実測値と回帰直線を図示したものである。

3．返信パターンに関する探索的モデル

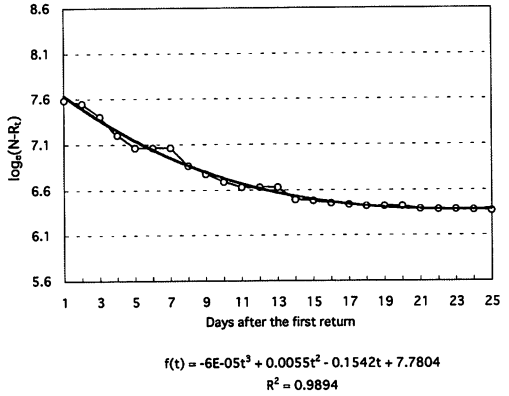
Robinson and Agisim（1951）は累積返信数の継日変化に一定の規則性があるらしいと述べているが、返信パターンについて具体的には言及していない。それを調べるために、Table 1のデータを基に、最初に質問紙が返送されてきた日からの経過日数 t を横軸に、当初の質問紙の

Figure 10 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 1



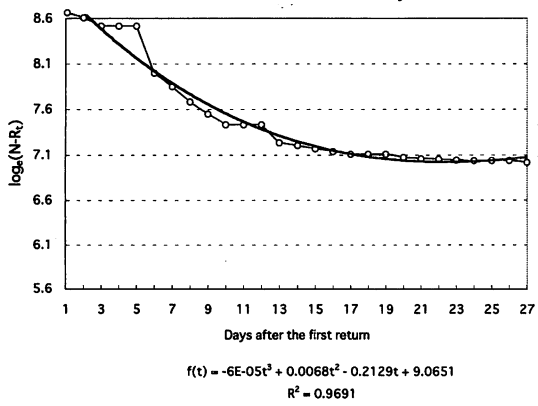
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 11 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 2



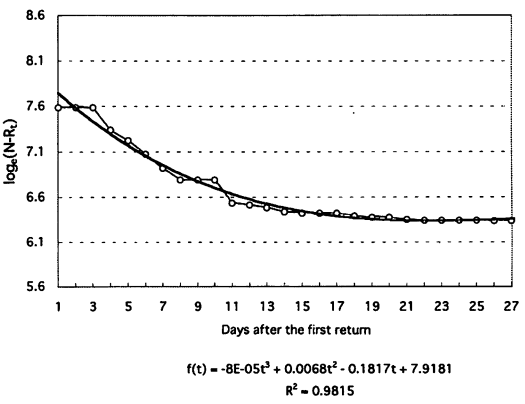
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 12 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 3



Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 13 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 4



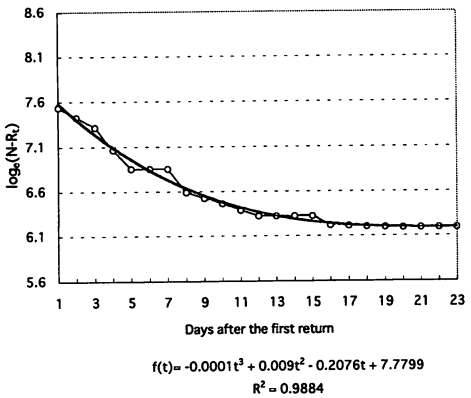
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

発送数（計画標本数）N から日別累積返信数 R_t を引いた差（未返信数）の自然対数 $f(t)=log_e(N-R_t)$ を縦軸にとったグラフを描くと、Figure 10～18の細い折れ線のようになる。$f(t)=log_e(N-R_t)$ は t を独立変数、a，b，c，d をパラメーターとする3次曲線 $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ で近似され、近似曲線は太い実線で示されている。この近似曲線を用いると、累積返信数 R_t は以下の数理モデル式(3)を用いて一般化することができる。

$$R_t=N-e^{at^3+bt^2+ct+d} \quad \cdots\cdots(3)$$

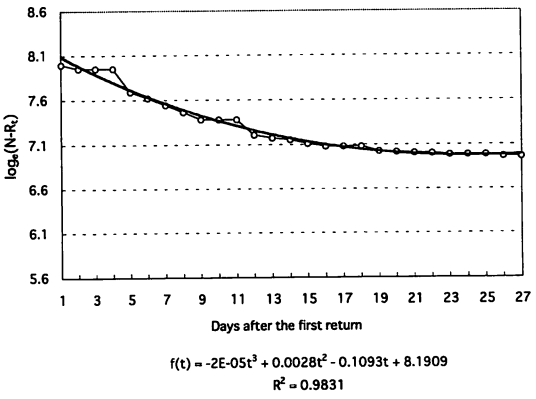
3次曲線 $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ の係数 a，b，c，d、および当てはまりの程度の指標となる決定係数 R^2 値を表にまとめたのが Table 7 である。

Figure 14 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 5



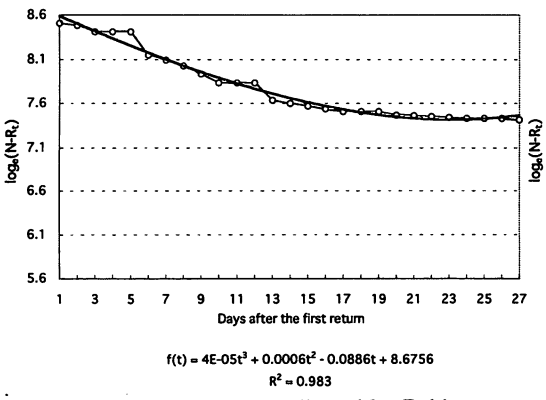
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 15 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 6



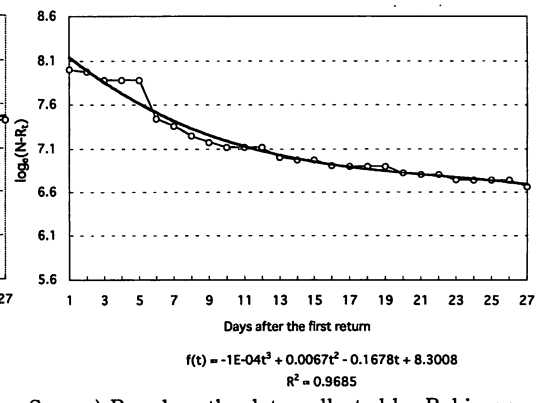
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 16 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 7



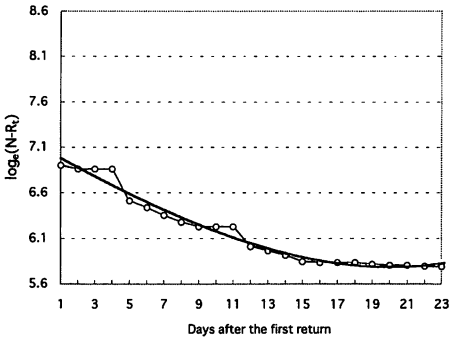
Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 17 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 8



Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 18 Pattern of Cumulative Returns for Consumer Survey 9



Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

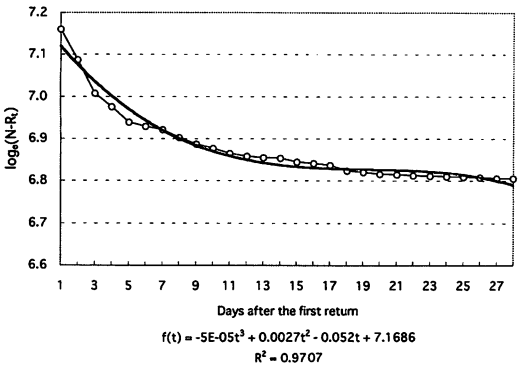
Table 7 Coefficient of f(t) for Nine Consumer Surveys

	a	*b*	*c*	*d*	R^2
Survey 1	-0.00010	0.0078	-0.189	8.63	0.969
Survey 2	-0.00006	0.0055	-0.152	7.78	0.989
Survey 3	-0.00006	0.0068	-0.213	9.07	0.969
Survey 4	-0.00008	0.0068	-0.182	7.92	0.982
Survey 5	-0.00010	0.0090	-0.208	7.78	0.988
Survey 6	-0.00002	0.0028	-0.109	8.19	0.983
Survey 7	0.00004	0.0006	-0.089	8.68	0.983
Survey 8	-0.00010	0.0067	-0.168	8.30	0.969
Survey 9	0.00006	0.0007	-0.104	7.08	0.975
Mean	-0.00005	0.0052	-0.157	8.16	0.979

Source) Based on the data Collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

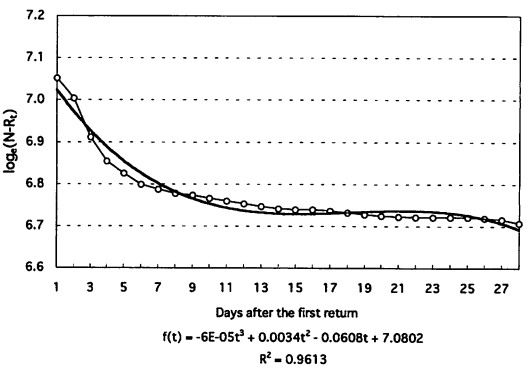
すでに Figure 7 で示したように、Robinson and Agisim (1951) の行った 9 種の消費者調査と Cox (1996) の行った 6 種の産業調査のそれぞれの全体累積返信率曲線のパターンには明らかに差異が認められる。では、9 種の消費者調査データの決定係数の R^2値がいずれも 0.97～0.99という高水準で適合した前述の数理モデル式(3)は、産業調査のデータに対してどの程度に当てはまるであろうか。Cox による 6 種の産業調査データについて、Table 3 のデータを基に、Robinson and Agisim の場合と同様、最初に質問紙が返送されてきた日からの経過日数 t を横軸に、当初の質問紙の発送数（計画標本数）Nから日別累積返信数 R_tを引いた差（未返信数）の自然対数 $f(t)=log_e(N-R_t)$ を縦軸にとったグラフを描くと Figure19～24の細い折れ線のようになる。これらはいずれも 3 次曲線（太い実線）で近似され、この近似曲線 $f(t)=at^3+bt^2+ct+d$ のパラメーターおよび決定係数 R^2値を求めた結果が Table 8 である。

Figure 19 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 1



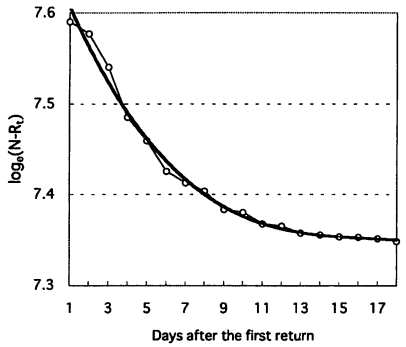
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

Figure 20 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 2



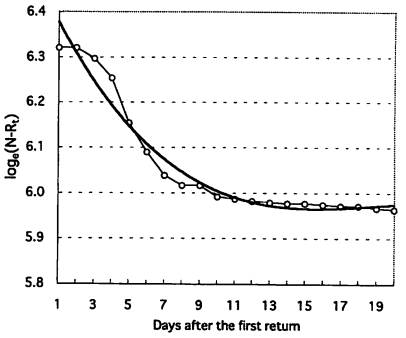
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

Figure 21 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 3



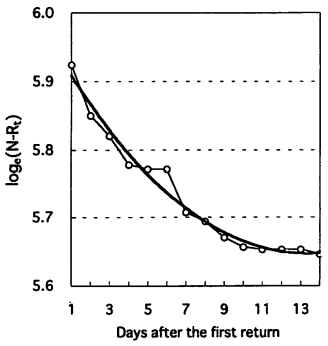
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

Figure 22 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 4



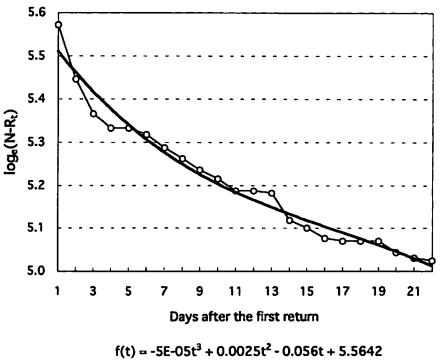
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

Figure 23 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 5



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

Figure 24 Pattern of Cumulative Returns for Industrial Survey 6



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

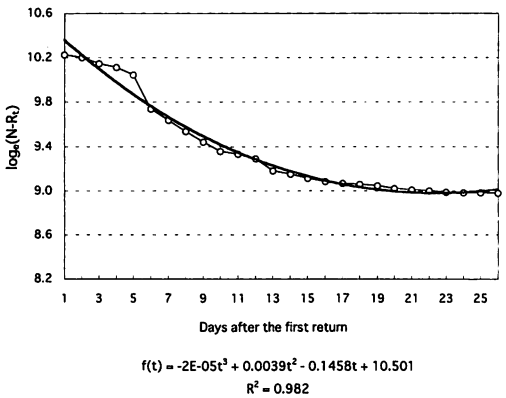
Table 8 Coefficient of *f(t)* for Six Industrial Surveys

	a	*b*	*c*	*d*	R^2
Survey 1	-0.00005	0.0027	-0.052	7.17	0.971
Survey 2	-0.00006	0.0034	-0.061	7.08	0.961
Survey 3	-0.00006	0.0032	-0.053	7.66	0.991
Survey 4	-0.00008	0.0044	-0.082	6.45	0.961
Survey 5	-0.00001	0.0020	-0.048	5.95	0.977
Survey 6	-0.00005	0.0025	-0.056	5.56	0.972
Mean	-0.00005	0.0030	-0.059	6.65	0.972

Source) Based on the data Collected by Cox (1966), p.394.

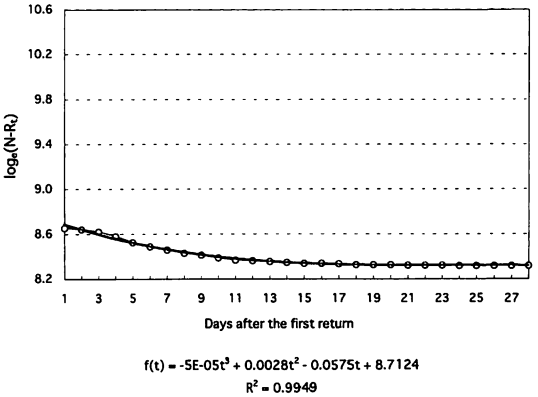
Robinson and Agisim による9種の消費者調査データに適用した Table 7 の結果と比較すると、パラメーターの値に違いはあっても、決定係数 R^2 値はいずれの調査でも、ほぼ0.96～0.99の範囲にあり、数理モデル式(3)との適合性が高いことがわかる。全体累積返信率を示す Table 4 のデータを用い、消費者調査と産業調査について $log_e(N-R_t)$ と経過日数 t との関係を図示した結果を Figure 25と Figure 26に示す。

Figure 25 Pattern of Total Cumulative Returns for Nine Consumer Surveys



Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.393.

Figure 26 Pattern of Total Cumulative Returns for Six Industrial Surveys



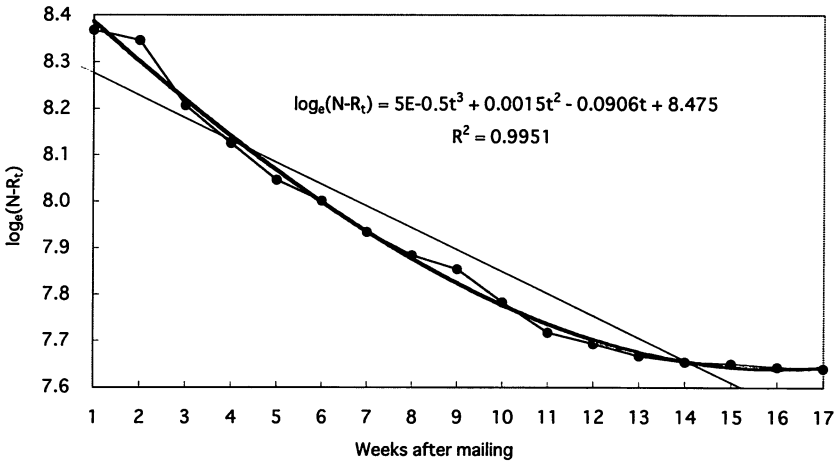
Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.395.

両方の調査データはともに決定係数 $R^2=0.98$ 以上であり、数理モデル式(3)によく適合している。つまり、Robinson and Agisim による消費者調査のデータと Cox による産業調査のデータの累積返信率は、累積返信率曲線の形状がたとえ異なろうと、まったく同一の数理モデルで表現可能であることが示されたことになる。

Huxley の提唱した数理モデル式(1)は、われわれが提唱する数理モデル式(3)の係数 a, b の値を0近似したものにほかならない。Table 5 に示された Huxley の返信数データを数理モデル式(1)に当てはめた場合のグラフを Figure 27に、また係数 a, b, c, d の値と決定係数 R^2 値

を Table 9 に示す。なお、Figure 27の図中の細い直線は、数理モデル式(3)に当てはめた場合の回帰直線（Figure 9 に同じ）である。

Figure 27 Non Linear Regression



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.65.

Table 9 Coefficient of Non Linear Regression

a	b	c	d	R^2
0.00005	0.0015	-0.0906	8.48	0.995

Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

4．返信パターンに関する Huxley の数理モデルの拡張

Figure 27およびその決定係数からも明らかなように、Huxley の返信数データは、その数理モデル式(1)よりも、われわれの数理モデル式(3)に対する適合度がはるかに高い。ここで、数理モデル式(3)に次の2つの恒等式を代入して式(3)'を得る。

$$log(\alpha\beta^t\gamma^{t^2}\delta^{t^3}) = log\alpha + (log\beta)\,t + (log\gamma)\,t^2 + (log\delta)\,t^3$$

$$e^{\log\alpha + t\log\beta + t^2\log\gamma + t^3\log\delta} = \alpha\beta^t\gamma^{t^2}\delta^{t^3}$$

$$R_t = N - \alpha\beta^t\gamma^{t^2}\delta^{t^3} \quad \cdots\cdots(3)'$$

この式(3)'は Huxley の数理モデル式(1)、$R_t = N - ab^t$を拡張したものであり、より高い水準で適合する新しい累積返信数曲線の数理モデルである。なお、数理モデル式(3)と式(3)'は数学的には等価である。したがって、数理モデル式(3)で求めた係数 a，b，c，d から式(3)'を得るには、数理モデル式(3)の e^d，e^c，e^b，e^a を式(3)'の α，β，γ，δ に代入すればよい。つまり以下のよう

な拡張されたモデル式(3)"になる。

$$R_t = N - (e^d)(e^c)^t (e^b)^{t^2} (e^a)^{t^3} \quad \cdots\cdots(3)"$$

また数理モデル式(1)は、式(3)'の係数 γ, δ を 1 に、換言すれば拡張モデル式(3)"の a, b を 0 に近似したものである。ここで、Table 7, Table 8 で求めたパラメーター a, b, c, d について e^d, e^c, e^b, e^aを求めたものをそれぞれ Table 10, Table 11に示す。Huxley はその数理モデル式(1)における定数項 a を当初の質問紙の発送数Nの大きさによって変わる scaling factor と呼び、理論的に重要な意味はもたないと述べているが、拡張モデル式(3)"における e^dも意味は同じであり、当初の質問紙の発送数Nの大きさに依存する定数項である。また、Huxley は e^b, e^aをいずれも 1 と見なして e^c のみに注目し、それを resistance factor と呼んだが、拡張モデル式(3)"では e^c, e^b, e^a の 3 つの定数が resistance factor となる。Table 10, Table 11を見てもわかるように e^bはかなり 1 に近く、e^aはさらに 1 に近い。しかしながら、拡張モデル式(3)"

Table 10 Exponential of Coefficient for Nine Mail Surveys of Consumer Goods and Services

	e^d	e^c	e^b	e^a
Survey 1	5597.1	0.828	1.0078	0.99990
Survey 2	2392.3	0.859	1.0055	0.99994
Survey 3	8690.6	0.808	1.0068	0.99994
Survey 4	2751.8	0.834	1.0068	0.99992
Survey 5	2392.3	0.812	1.0090	0.99990
Survey 6	3604.7	0.897	1.0028	0.99998
Survey 7	5884.0	0.915	1.0006	1.00004
Survey 8	4023.9	0.845	1.0067	0.99990
Survey 9	1188.0	0.901	1.0007	1.00006
Mean	4058.3	0.855	1.0052	0.99995

Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

Table 11 Exponential of Coefficient for Six Mail Surveys of Industrial Goods and Services

	e^d	e^c	e^b	e^a
Survey 1	1298.0	0.949	1.0027	0.99995
Survey 2	1190.3	0.941	1.0034	0.99994
Survey 3	2114.8	0.948	1.0032	0.99994
Survey 4	635.7	0.922	1.0044	0.99992
Survey 5	385.3	0.953	1.0020	0.99999
Survey 6	260.9	0.946	1.0025	0.99995
Mean	980.8	0.943	1.0030	0.99995

Source) Based on the data collected by Cox (1966), p.394.

から明らかなように、t 値が小さい区間では $(e^c)^t$ の影響力が大きく、t 値が大きくなるにつれて $(e^b)^{t^2}$, $(e^a)^{t^3}$ 各項の影響力が大きくなる。それを具体的に示したのが Table 12で、Table 10における e^c, e^b, e^a の平均値を用いて、t値の変化に伴う $(e^c)^t$, $(e^b)^{t^2}$, $(e^a)^{t^3}$ 各項の値および $(e^b)^{t^2}$ と $(e^a)^{t^3}$ の2項の積、さらにこれら3項を掛け合わせた積の値を計算した結果が示されている。$t=1$ の時点では $(e^b)^{t^2}$ と $(e^a)^{t^3}$ の積は1.01でしかないが、$t=28$ の時点では19.46に達している。

Table 12 Effect of the Resistance Factor for Nine Mail Surveys of Consumer Goods and Services

t	$(e^c)^t$	$(e^b)^{t^2}$	$(e^a)^{t^3}$	$(e^b)^{t^2}\times(e^a)^{t^3}$	$(e^c)^t\times(e^b)^{t^2}\times(e^a)^{t^3}$
1	0.855	1.0052	0.99995	1.0051	0.8594
2	1.710	1.0210	0.99960	1.0206	1.7451
3	2.565	1.0478	0.99865	1.0464	2.6839
4	3.420	1.0865	0.99681	1.0831	3.7040
5	4.275	1.1384	0.99377	1.1314	4.8365
6	5.130	1.2053	0.98926	1.1923	6.1167
7	5.985	1.2894	0.98300	1.2674	7.5856
8	6.840	1.3937	0.97472	1.3584	9.2917
9	7.695	1.5221	0.96421	1.4676	11.2935
10	8.550	1.6798	0.95123	1.5978	13.6615
11	9.405	1.8731	0.93561	1.7525	16.4818
12	10.260	2.1104	0.91723	1.9357	19.8601
13	11.115	2.4025	0.89597	2.1526	23.9260
14	11.970	2.7637	0.87179	2.4093	28.8399
15	12.825	3.2122	0.84472	2.7134	34.7998
16	13.680	3.7725	0.81481	3.0739	42.0509
17	14.535	4.4768	0.78219	3.5017	50.8973
18	15.390	5.3679	0.74706	4.0101	61.7161
19	16.245	6.5035	0.70967	4.6153	74.9756
20	17.100	7.9614	0.67031	5.3367	91.2569
21	17.955	9.8479	0.62935	6.1978	111.2818
22	18.810	12.3084	0.58719	7.2273	135.9455
23	19.665	15.5440	0.54424	8.4596	166.3590
24	20.520	19.8348	0.50097	9.9366	203.8985
25	21.375	25.5741	0.45782	11.7084	250.2678
26	22.230	33.3178	0.41527	13.8359	307.5731
27	23.085	43.8589	0.37375	16.3922	378.4131
28	23.940	58.3370	0.33366	19.4648	465.9881

Note) $e^c=0.855$, $e^b=1.0052$, $e^a=0.99995$

Source) Based on the data collected by Robinson and Agisim (1951), p.422.

5．返信パターンに関する Huxley 拡張モデルの問題点

Table 9 のパラメータ a，b，c，d について e^d, e^c, e^b, e^a を求め、それをわれわれの数

理モデル式(3)'に代入して返信数を算出し、実測返信数との一致度を Table 13および Figure 28に示す。

また、比較のため、Table 4 に示されている Robinson and Agisim の消費財に関する 9 種の郵送調査および Cox の産業財に関する 6 種の郵送調査のそれぞれの全体累積返信率と最終返信数を基に算出した累積返信数と、それぞれのモデル式から算出された累積返信数との一致度を Table 14, 15および Figure 29, 30に示す。なお、ここで誤差比（Error Ratio）とは、返信数とそのモデル値との差の絶対値を返信数で除した値の％である。点線は、Figure 28では週別、Figure 29, 30では日別の返信数を表している。なお、Robinson and Agisim の 9 種の消費者調査には返信期間が最短24日から最長28日のものが含まれ、Cox の 6 種の産業調査では最短17日のものから最長28日のものが含まれている。これらをそれぞれについて一つの総合調査としてまとめる際には、返信期間が最短のものを総合調査の返信期間とみなすことが必要である。なぜならば、すでに調査が完了しているものを継続中であるかのようにみなすと、累積返信率に歪みが生じるからである。

Huxley、Robinson and Agisim および Cox いずれのデータにおいても、返信初期段階におけるモデルの適合度に問題があることは共通している。返信開始後、返信数の第 1 波が週別または日別の最多返信数（極大値）に達するまでは誤差比が非常に大きく、逆に返信数の第 1 波が最多数に達してから後の誤差比は非常に小さい。Parasuraman (1982) は、Huxley のデータでは 4 週目と 7 週目に督促状が出されているにもかかわらず、その事実が論文の脚注に記されているだけで、とりたてて重視されていない点を指摘しており、Figure 28にも督促の影響により週別返信数が 4 週目で減少傾向に歯止めがかかり、7 週目で盛り上がる様子が確かに認められる。しかしながら、モデル値と実測値のずれには督促による変動は認められない。同様のことは Figure 29についてもいえる。返信開始後13日目に日別返信数の小さなピークが見られるが、モデル値と実測値とのずれは無視できるほど小さい。Parasuraman は、Huxley のデータに 2 回の督促がなかったとした場合の返信数の予測モデルは異なるはずだと主張しているが、Figure 28の誤差比から明らかなように、第 1 波後の数理モデル式(3)'の適合度は、督促の有無にかかわらず高いものといえる。逆に、郵送調査において、まったく督促を受けなかった調査対象者の返信状況はどのようなものとなるのであろうか。われわれが実施した調査で得た無督促者だけの返信データについての分析結果を以下に述べる。

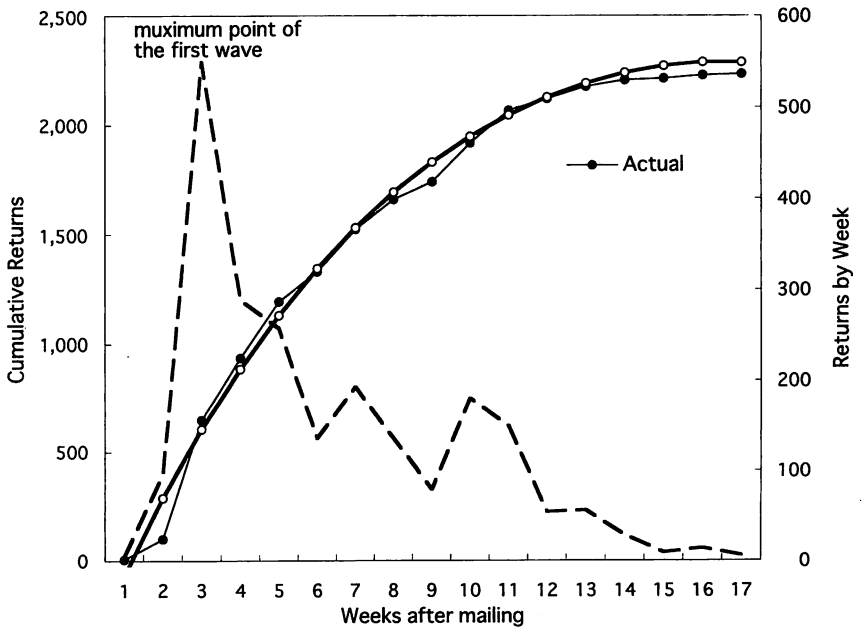
この調査は、1995年11月から12月にかけ山口県萩市において、55歳以下の成人女性11,322名を母集団とし住民基本台帳から無作為抽出した500名を対象に、衣料品に関する通信販売の利用実態を明らかにすることにあったが、この機会を活用して郵便や電話による督促の効果を測定する準実験的研究が実施された。すなわち、督促をいっさいしなかった調査対象者（統制群）と、郵便や電話で督促をした調査対象者（実験群）のうち、返信が先着したため結果的に督促をしないのと同じことになった人たちを合わせた258名を無督促者とし、その返信状況が調べら

Table 13 Actual and Model Data

Week	Actual	Model	Returns by Week	Error Ratio %
1	5	-71	5	1520.0
2	100	290	95	-190.0
3	649	607	549	6.5
4	937	886	288	5.4
5	1,194	1,131	257	5.3
6	1,330	1,344	136	-1.1
7	1,523	1,531	193	-0.5
8	1,659	1,692	136	-2.0
9	1,738	1,830	79	-5.3
10	1,918	1,948	180	-1.6
11	2,067	2,047	149	1.0
12	2,121	2,127	54	-0.3
13	2,177	2,191	56	-0.6
14	2,205	2,239	28	-1.5
15	2,214	2,271	9	-2.6
16	2,228	2,287	14	-2.6
17	2,234	2,288	6	-2.4

Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

Figure 28 Actual Curve and Model Fit



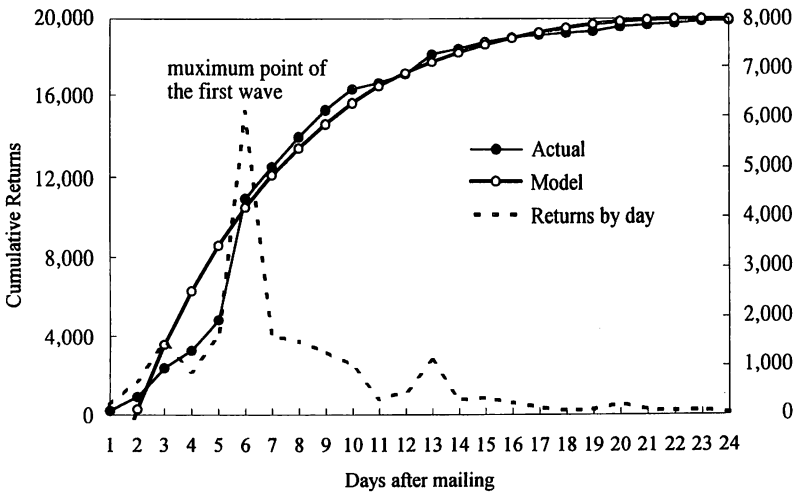
Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

Table 14 Actual and Model Data

Day	Actual	Model	Returns by Day	Error Ratio %
1	201	-3682	201	1931.8
2	903	278	702	69.2
3	2,369	3,557	1,466	50.1
4	3,252	6,286	883	93.3
5	4,838	8,568	1,586	77.1
6	10,921	10,484	6,083	4.0
7	12,527	12,099	1,606	3.4
8	14,012	13,463	1,485	3.9
9	15,277	14,619	1,265	4.3
10	16,281	15,600	1,004	4.2
11	16,602	16,434	321	1.0
12	17,064	17,141	462	0.5
13	18,168	17,740	1,104	2.4
14	18,469	18,246	301	1.2
15	18,810	18,670	341	0.7
16	19,051	19,023	241	0.1
17	19,192	19,312	141	0.6
18	19,272	19,544	80	1.4
19	19,372	19,724	100	1.8
20	19,593	19,856	221	1.3
21	19,694	19,942	101	1.3
22	19,774	19,987	80	1.1
23	19,874	19,990	100	0.6
24	19,914	19,954	40	0.2

Source) Adapted from Robinson and Agisim (1951), p.422.

Figure 29 Actual Curve and Model Fit



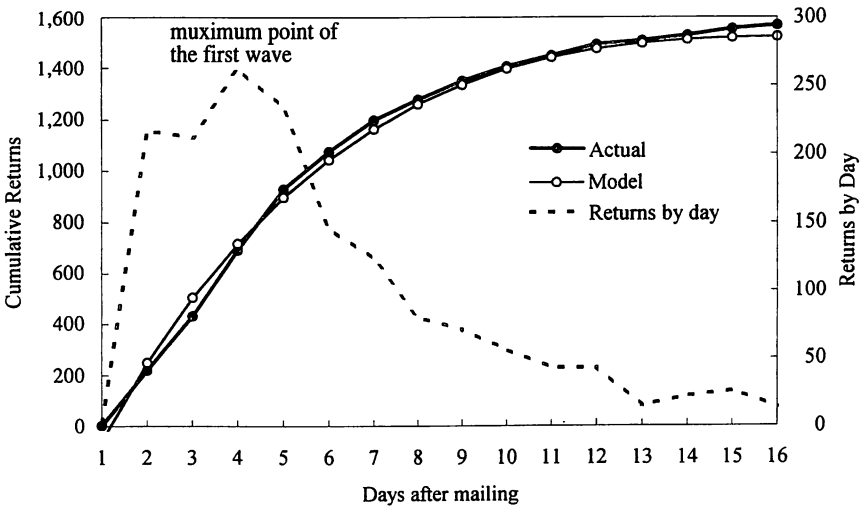
Source) Adapted from Robinson and Agisim (1951), p.423.

Table 15 Actual and Model Data

Day	Actual	Model	Returns by Day	Error Ratio %
1	3	-58	3	2033.3
2	220	249	217	-13.2
3	432	505	212	-16.9
4	694	719	262	- 3.6
5	928	897	234	3.3
6	1,074	1,043	146	2.9
7	1,198	1,163	124	2.9
8	1,278	1,260	80	1.4
9	1,349	1,336	71	1.0
10	1,405	1,396	56	0.6
11	1,448	1,442	43	0.4
12	1,491	1,475	43	1.1
13	1,506	1,497	15	0.6
14	1,528	1,512	22	1.0
15	1,554	1,519	26	2.3
16	1,568	1,523	14	2.9

Source) Adapted from Cox (1966), p.394.

Figure 30 Autual Curve and Model Fit



Source) Adapted from Cox (1966), p.394.

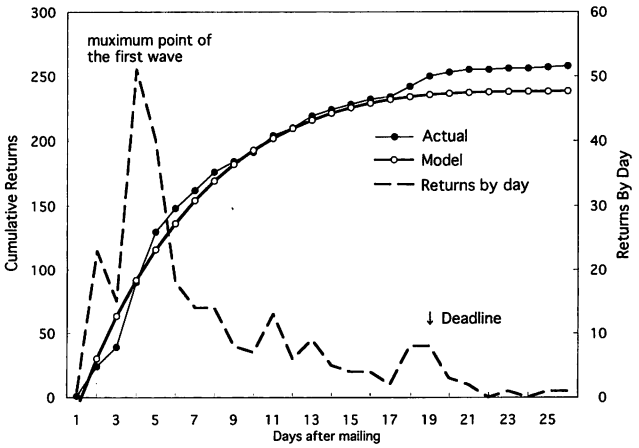
Table 16 Actual and Model Data (Hagi City's Data without Follow-up)

Date (1995)	Day	Actual	Model	Returns by Day	Error Ratio %
11/24	1	1	-9	1	1000.0
11/25	2	24	30	23	25.0
11/26	3	39	63	15	61.5
11/27	4	90	92	51	2.2
11/28	5	130	116	40	10.8
11/29	6	148	137	18	7.4
11/30	7	162	154	14	4.9
12/01	8	176	169	14	4.0
12/02	9	184	182	8	1.1
12/03	10	191	193	7	1.0
12/04	11	204	202	13	1.0
12/05	12	210	209	6	0.5
12/06	13	219	216	9	1.4
12/07	14	224	221	5	1.3
12/08	15	228	226	4	0.9
12/09	16	232	229	4	1.3
12/10	17	234	232	2	0.9
12/11	18	242	234	8	3.3
12/12	19	250	235	8	6.0
12/13	20	253	237	3	6.3
12/14	21	255	237	2	7.1
12/15	22	255	238	0	6.7
12/16	23	256	238	1	7.0
12/17	24	256	238	0	7.0
12/18	25	257	238	1	7.4
12/19	26	258	238	1	7.8

Note) ····· Deadline

Source) Hayashi and Murata (1996), Unpublished data.

Figure 31 Actual Curve and Model Fit (Hagi Ctiy's Data without Follow-up)



Source) Hayashi and Murata (1966), Unpublished data.

れた。なお、返信の締め切り日は12月12日(火)と質問紙の表紙に明記されていた。Table 16は、これらの無督促者全体の日別返信数および累積返信数、ならびに数理モデル式(3)'から算出された累積返信数を表示した結果であり、それらを図示したものがFigure 31である。

返信初期段階での傾向はHuxleyおよびRobinson and Agisimの場合と同様であり、返信第1波が極大値に達した後の誤差比は全般に小さく、モデルの適合度は高い。しかしながら、返信が始まってから18日目と19日目の返信数がその前後と比べて多いことの影響が、その後の返信数の実測値とモデル値との差となって現れている。19日目が返信の締め切り日であり、同日と前日の返信数がその前後と比べて異常に多いのは、締め切り日前日および当日の駆け込み投函が原因と考えられる。このことからすると、締め切り日自体が督促効果をもち、それを明示すれば、なにがしかの返信数の向上につながることが示唆される。われわれの提示する数理モデルは、返信初期段階での督促による突発的な返信数増加の影響はあまり受けないものの、返信末期段階における突発的な返信数増加の影響を受けやすいものと考えられる。しかしながら、この段階では実測曲線、モデル曲線ともに安定しており、誤差比は18日目から21日目まで増加するが、22日目以降は「実測値－モデル値≒締め切り日直前の駆け込み投函数」の関係がほぼ維持されている。

6．Huxley拡張モデルによる返信数の予測可能性

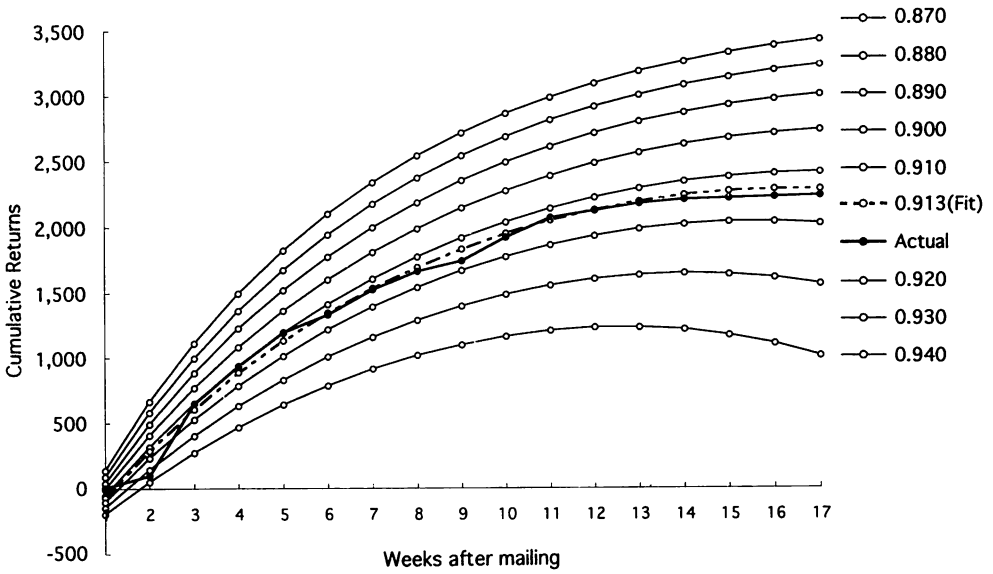
累積返信数 R を返信開始後の経過時間 t で表す数理モデル式(3)'において、係数 α，β，γ，δ の値を返信初期における返信数の経時変化から求めることができれば、このモデル式を用いて、それ以降の返信数を予測することが可能となる。ただし、既に述べたように、数理モデル式(3)'は返信が始まってから第1波の返信数が最多となる日を過ぎる区間の適合度が非常に低いため、予測の可能性が見込まれるのはそれ以降の段階ということになる。

そこでHuxleyのデータを用いて、scaling factorである α を除く各係数の増減が予測値に及ぼす影響を調べてみた。γ，δ の値を一定にして β 値を変化させた累積返信数をFigure 32，週別返信数をFigure 33に、β，δ を一定にして γ を変化させた累積返信数をFigure 34に、β，γ を一定にして δ を変化させた累積返信数をFigure 35に示す。

既に述べたように、拡張された数理モデル式(1)'では、β，γ，δ のどれもがresistance factorであり、t 値が大きくなった場合に強い影響力がある。例えば、Figure 34において、$\delta=1.00005$ と $\delta=1.00000$ とでは、予測された最終返信数に約1400通余りの差異があり、$\delta=1.00000$ とした場合の予測値は実測値の約1.6倍になってしまう。このように γ，δ 値の決定には高い精度が要求される。

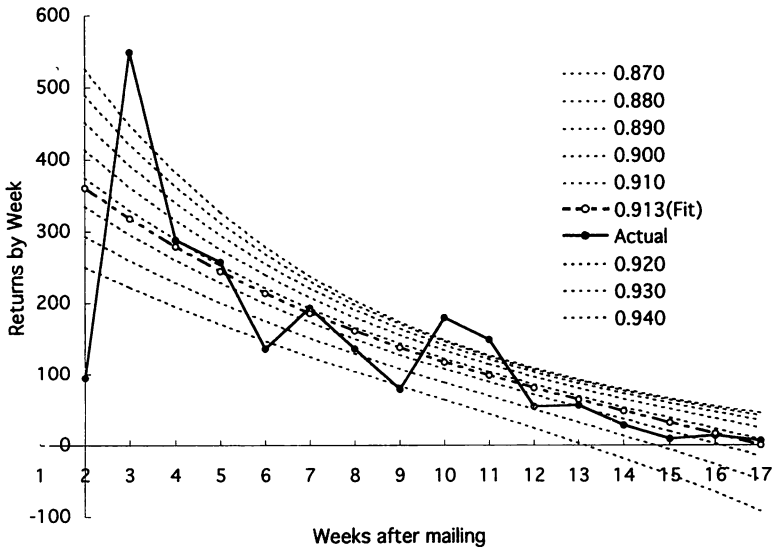
係数 α，β，γ，δ の値は、当初の質問紙の発送数(計画標本数)、返信が始まって第1波が最多返信数となる日までの日数、その時点での返信数、および累積返信数、さらにその時点以後

Figure 32 The Difference of Cumulative Returns Curves as the Variation of the Resistance Factor β



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

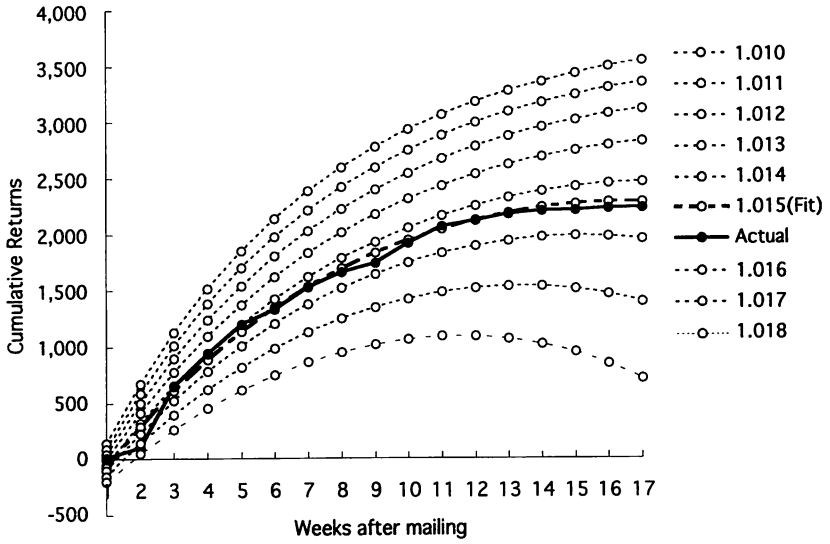
Figure 33 The Difference of Returns by Week as the Variation of the Resistance Factor β



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

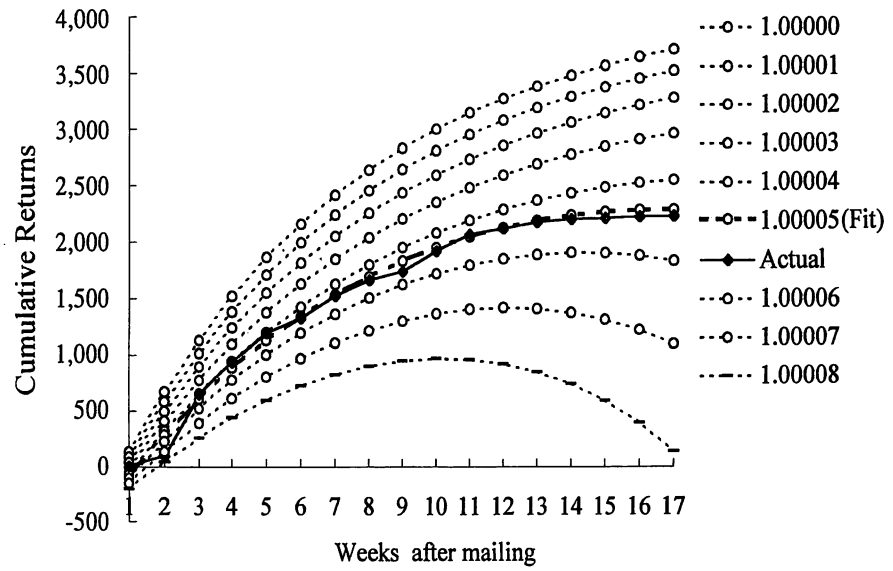
の数日間の返信状況などの初期条件から理論的に算出可能であると考えられるが、現在、この点については未だ研究途上にあり、今後の課題となっている。返信開始から第1波が最多返信数に達するまでの予測モデルは、数理モデル式(1)や(3)'を導出する基礎となった「経過日数 t と $f(t)=log_e(N-R_t)$ の関係」とは基本的に異なった見地から考察する必要があるかもしれない。

Figure 34 Cumulative Returns Curves Following γ



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

Figure 35 Cumulative Returns Curves following δ



Source) Based on the data collected by Huxley (1980), p.64.

7．返信初期段階における返信パターンの数理モデル

Vigderhouse (1977) は、返信のパターンが比較的安定しており、予測可能であることを前提として、38種の調査における経過日数ごとの返信数データを詳細に分析し、返信の日別分布の予測モデルを作成して、ガンマ関数（後述の式(4)'）を含む方程式（式(4)）によって作られる曲線が、日別返信数の分布に非常によく適合することを見出している。式(4)で、t は当初に質問紙を発送してからの経過日数、$f(t)$ は返信数、α, β は確率密度関数の右方向への歪みを決定する係数で、α が大きくなると歪みは小さくなる。α, β は日別返信数の分布の平均値と分散値から直接に求まる。すなわち、次の通りである。

$$\text{mean}=\alpha\beta \qquad \text{variance}=\alpha\beta^2$$

また、この確率密度関数の極大値を与える t の値、すなわち日別返信数がピークになる日は、式(4)を微分した $f'(t\ ;\ \alpha,\ \beta)=0$ より $t_{\max}=\beta(\alpha-1)$ となる。

しかしながら、日別返信数の平均値と分散値は調査ごとにさまざまである。また、返信の中途段階で電話や郵便などによる督促があると、ガンマ関数は必ずしも適合しなくなるというのが Vigderhouse の数理モデル式の弱点である。式(4)は、督促刺激のない自然な状態での日別返信数の推移を表わしていると考えるべきである。しかしながら、Vigderhouse によれば、式(4)は、返信が始まってから第1波の返信数が最多になるまでの適合性に関していえば、これまで提唱されてきたどの数理モデル式よりも実測返信数と予測返信数の一致率が高いという。また、現実には、質問紙の発送直後5日から1週間以内に督促状を発送すると効果的だという経験則を適用する場合があるとはいえ、一般に第1波の返信数が最多になるまでの間に督促を行うことは稀であるから、その信頼区間を返信が始まってから第1波の返信数が最多になるまでと考えれば、Vigderhouse の数理モデル式は十分に実用的な妥当性をもつものといえよう。Figure 36 は、mean＝5.0, variance＝5.0, 10.0, 15.0, 20.0とした場合、つまり、$(\alpha, \beta)=(5.00,\ 1.0)$, $(2.50,\ 2.0)$, $(1.67,\ 3.0)$, $(1.25,\ 4.0)$ の場合の式(4)の表わす曲線である。variance＝5.0のときグラフは最も右に歪み（点線）で、逆に variance＝20.0のとき最も左に歪む（実線）。

$$f(t\ ;\ \alpha,\ \beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}t^{\alpha-1}e^{-t/\beta} \qquad t>0,\ \alpha,\ \beta>0 \quad \cdots\cdots(4)$$

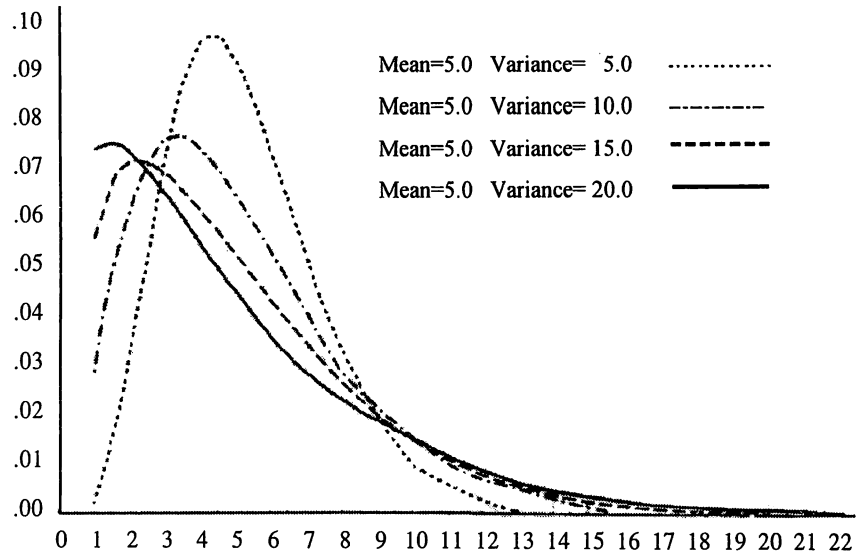
$$\text{ただし、}\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx \quad \cdots\cdots(4)'$$

返信が始まってからの累積返信数 R_t は

$$R_t=\int_{t-.05}^{t+.05}f(t) \quad \cdots\cdots(5)$$

Vigderhouse (1977) は、このガンマ関数の分析から、1日あたりの返信数が最大になるピーク日が1回訪れ、1日あたりの平均返信数が5の場合には、返信が始まってピークに達するまでの日数がほぼ4日であること、また、督促を開始する日は、1日あたりの返信数が極度に少

Figure 36 Daily Probabilities of Questionnaire Returned



Source) Quoted from Vigderhous (1977), p.208.

なくなる12日目か13日目がふさわしいと述べている。しかしながら、返信数の1日あたりの平均値は初期の数日の値から推定ができるのに対して、返信数の分散値は、長期にわたる実測によらなければ得られないため、式(4)における α および β の値は、経験的知見に基づいて代入することになる。その意味では、日別返信数の予測度が高いとされる式(4)といえども、結局は過去の類似した調査結果の援用による帰納的要素を含んでおり、完全な予測モデルとはいえない。

8. おわりに

本稿でわれわれが数理モデル式(3)'の検証に使用したデータは、Robinson and Agisim (1951) の1944年から1949年にかけて実施された消費財に関する9種の郵送調査、Cox (1966) が実施した技術者を対象とする産業財に関する6種の郵送調査、Huxley (1980) が製造業を対象として1972年に実施した郵送調査、われわれが1995年に山口県萩市民を対象に実施した通信販売に関する郵送調査など、あわせて17種の調査データである。これらの調査は実施された国々が米・豪・日と異なり、調査時期もほぼ半世紀にわたるものであったのみならず、調査の主体、対象者、期間、テーマや内容、質問量、謝礼の有無などの諸条件がまったく異なるものであった。それにもかかわらず、郵送調査における返信パターンが、少なくとも第1波の返信数が極大値に達した時点以降に関しては、同一の数理モデルで再現することができ、しかも実測値に対する数理モデルの当てはまりの程度を示す決定係数 R^2 値が0.98前後という極めて高い水準にあったことは予想外の成果であった。「多種多様な郵送調査に共通した一定の返信パターンなど存在するはずはない」という固定観念を覆す第一歩として本研究の意義は大きいものといえよう。

累積返信数の実測値と数理モデルに基づく理論値の間の誤差からみた適合性は、返信の初期から中期段階にかけての督促による一時的な返信数の増加によってほとんど影響を受けないが、返信後期段階における締め切り日前後の駆け込み投函というような突発的な返信数の増加の影響を受けやすいことなども今回の研究で明らかにされた。

さらに、第1波の返信数が最多になる時点で前後2段階に分けて、それぞれで異なる返信パターンに適合する数理モデルが必要であること、また、返信が始まってから第1波の返信数が最多になるまでの日別返信数の数理モデルには、Vigderhouse (1977) によるガンマ関数モデル式(4)の適合度が高いことなども示された。数理モデル式(3)'と(4)が第1波の返信数が最多になる時点で滑らかに接続するかどうかの検証は今後の課題である。

本稿で主として取り上げたわれわれの数理モデル式(3)'において、返信初期段階の情報からその後の予測に必要な係数値(α、β、γ、δ)を算出する方法も今後に残された重要な課題となる。一方、本稿で扱ったすべての数理モデルに共通していえることではあるが、それらは過去の調査データの数値解析から得られたものであり、例えば、resistance factor のような係数の決定に関しては、過去の類似した結果から得られた値を援用して代入する方法がとられているために、真の意味での予測モデルとはいえず、実用性という観点からは、まだ不十分な点が多い。理想的には、既に述べたように、返信初期段階で得られた返信数や返信パターンに関するデータに基づいて、返信中期および後期段階の返信数、最終返信数をできるだけ正確に予測できることが望ましい。そのためには、過去のデータへの適合度を高める工夫を基礎として、予測の精度を高め、より実用性の高い数理モデルを開発していくことが必要である。

引 用 文 献

Cox, William E., Jr. 1966, Response Patterns to Mail Surveys, *Journal of Marketing Research,* Vol.3, No. 4 (November), pp.392-397.

Hill, Richard. W. 1981, Using S-Shaped Curves to Predict Response Rates, *Journal of Marketing Research,* Vol.18, (May), pp.240-242.

Huxley, Stephen. J. 1980 , Predicting Response Speed in Mail Surveys, *Journal of Marketing Research,* Vol. 17, No.1 (February), pp.63-68.

Lindsay, E. E., 1921, Questionnaires and Follow-up Letters, *Pedagogical Seminary,* Vol.28, No.3 (September), pp.303-307.

Robinson, R. A. and Philip Agisim, 1951, Making Mail Surveys More Reliable, *Journal of Marketing,* Vol. 15, No.4 (April), pp.415-424.

Parasuraman, A. 1982, More on the Prediction of Mail Survey Response Rates, *Journal of Marketing Research,* Vol.19, No.2 (May), pp.261-268.

Norusis, Marija J./SPSS Inc., 1995, *SPSS Base System* 統計編 *Release 6.x J* (日本語版), pp.13-1-13-10.

Suchman, Edward A. and Boyd McCandless, 1940, Who Answers Questionnaires?, *Journal of Applied Psychology,* Vol.24, No.6 (December) pp.758-769.

Vigderhouse, Gideon, 1977, Analysis of Patterns of Response to Mailed Questionnaires, *Sociological Methods & Research,* Vol.6, No.2, (November), pp.205-213.

—— 1997. 1 .31受稿 ——