3種類のプロクラステス回転法の関係について¹⁾

— 因子間相関についての拘束条件をおかない方法、
直交と斜交を拘束条件とする方法 —

清水 和 秋

Relationships among oblique constrained Procrustes, orthogonal
constrained Procrustes, and unconstrained Procrustes.

Kazuaki SHIMIZU

Abstract

To confirm the factors among two samples the Procrustes rotation methods were used in the psychological research. Mosier (1939) proposed a method to obtain the approximate solution between the hypothesized pattern matrix constructed from the first research and the orthogonal factor loading matrix from the second one. This method was named Procrustes by Hurley & Cattell (1962). Orthogonal constrained approximation method for this Procrustes problem was developed by Green (1952). Hakstian (1975) proposed the obliquely constrained method using a different approach developed for orthogonal problem by Schönemann (1966).

In this paper, oblique constrained Procrustes is originally developed by applying the approach of Green (1952) to the approximation problem between factor matrices from two research studies. It is also revealed that orthogonal approach for the Procrustes problem is included in the oblique method proposed in this paper. To demonstrate the differences among the two methods with and without constraints on factor correlations, factor score estimation methodologies were utilized. These methods for the Procrustes problem are classified in two groups: Unconstrained method and oblique constrained method.

Keywords: Procrustes rotation, exploratory factor analysis, oblique constrained rotation, factor score estimation

抄 録

2つのサンプル間の因子を確認するために、心理学研究ではプロクラステス回転法が使用されてきた。Mosier (1939) は、第1の研究から構築された仮説パターン行列と第2の研究からの直交因子負荷行列の間の近似解を得る方法を提案した。この方法は、Hurley & Cattell (1962) によってProcrustesと命名された。このプロクラステス問題の直交制約付き近似法は、Green (1952) によって開発された。Hakstian (1975) は、Schönemann (1966) によって直交問題のために開発された異なるアプローチを使用して、斜交に制約された方法を提案した。

1) 本稿の一部は、関西大学社会学部学舎 B501A で開催した応用測定研究会第3回会合 (2020年2月22日) で発表した。

この論文では、斜交制約付きプロクラステスが、2つの研究からの因子行列間の近似問題にGreen (1952) のアプローチを適用して開発された。また、本論文で提案した斜交の方法に、プロクラステス問題に対する直交アプローチが含まれていることが明らかにされた。因子相関に制約がある場合とない場合の2つの方法の違いを、因子スコア推定方法論を利用して、プロクラステス問題のこれらの方法が、非拘束法と斜交拘束法の2つのグループに分類された。

キーワード：プロクラス回転、探索的因子分析、斜交拘束回転、因子得点の推定

0. はじめに

探索的因子分析の枠組みの中で、因子の不変性を確認する方法として使われてきたプロクラステス法は、Mosier (1939)、Tucker (1944) や Hurley and Cattell (1962) の斜交回転の方法と Green (1952) や Schönemann (1966) による直交プロクラステスの2種類に分類されることがある (たとえば、市川 (2010)、Lorenzo-Seva & Ferrando (2020)、芝 (1978) など)。不思議なことに、因子間の相関を直交とする Schönemann (1966) の展開を応用して、斜交の因子間相関を拘束条件とした Hakstian (1975) の提案が紹介されることがまったくと言っていいほどにない。

Mosier (1939) らの方法は、因子行列だけを対象とした近似を求めるものであり、因子間の関係はその結果として得られる。言い換えると、近似の目標は因子行列だけに向けられ、因子間の関係については、一切の拘束を置かない。これに対して、直交プロクラステス法は、因子行列の近似を求める際に、因子間の関係に直交 (単位行列) という条件を挿入している。Hakstian (1975) が挿入した条件は因子間を斜交とするものであり、彼の論文にあるように、この条件は直交を含むものではあったが、実際の計算の手続きは複雑なものとなった。

本稿では、Hakstian (1975) の斜交因子間相関を拘束したプロクラス方法の理論的展開を、Green (1952) の直交プロクラステス法を、芝 (1979) や市川 (2010) による展開を参考にしながら検討を加えてみることにする。ここでの目的は、清水 (1981) が因子得点の推定法で直交条件の因子得点の推定方法を斜交に因子間相関を固定した推定法が包摂するという関係を明らかにしていることも応用して、斜交因子の拘束が直交因子の拘束を包含するものであることをより統一的な立場から明らかにすることにある。そして、ここで紹介する3種類のプロクラステス法を、先行研究の因子間相関行列の値を拘束条件とするか、拘束しないかの2つに分けてみることも提案してみたい。

プロクラステス法が心理学の研究で使用されるのは、先行研究で開発された尺度の信頼

性が十分なレベルに達していることを報告することに加えて、因子の構造を確認し、その結果を報告するためではないだろうか。尺度の得点は、因子分析結果で高く負荷した項目の合計点として計算される。この計算では、因子パターンあるいは負荷量の値の大小とは独立に項目得点の単純加算の手続きがとられることが多く、項目に1.0の重みを与えていると考えることができる。なお、尺度の採点の対象にならない場合には0.0が重みとなる。この尺度得点の算出手順を行列に置き換え因子を列に項目を行に配置するとプロクラステス法の目標行列となる。

このような1.0と0.0で構成された行列によって、先行研究の因子の構造を確認したという確信が得られない場合には、1.0に代わるより適切な値を探索することになる。1.0と0.0で構成された完全な単純構造の行列を目標行列とするのではなく、より適切な値を探索する不完全プロクラステス法を芝（1968）が提案している。この目標行列の構成の仕方については、いろいろな提案が行われてきた（たとえば、柏木（1989）、Lorenzo-Seva & Ferrando（2020）、Moore, Reise, Depaoli, & Haviland（2015）、Tucker（1944）など）。

因子パターンあるいは因子負荷量から仮説的行列を作成する際には、研究者の主観的な判断要素が大きな割合を占めることになる。これを回避する方法として、清水・辻岡（1978, 1979）は、因子行列ではなく、因子得点に焦点を当てたFACTORMAX法を提案している。ここでは、尺度得点と因子得点との近似という展開において、この方法を応用することにより、拘束のないプロクラステス法と拘束のあるプロクラステス法との関係に新しい視点から検討を加えてみたい。

1. 古典的プロクラステス法

プロクラステス法が利用されるのは、先行研究の因子の構造を、新しく収集した標本で確認する必要がある場合である。このような因子構造の確認については、構造方程式モデリングの発展の中で因子的不変性を検証する方法が、確認的因子分析法として確立している（清水，2013）。本稿での議論は、探索的因子分析の文脈に限定する。

Mosier（1939）は、探索的因子分析の研究段階とこれに続く第2の研究段階とにわけ、第1段階で得られた因子負荷量行列を既知として、これに近似した因子の構造を、第2段階の研究で抽出した因子負荷行列に因子軸の回転を適用することによって求める方法を提案した。なお、この二つの研究は、同じ観測変数を対象にして調査が行われ、因子の数も同じという仮定の下で展開されたことになる。

仮説的な因子行列に近似する因子行列を因子軸の回転によって得ようとするこの方法に、ギリシャ神話のプロクリステスという名称を与えたのは Hurley and Cattell (1968) であった。通りかかった旅人を寝台に寝かせ、足が寝台からはみ出せば切り、足りなければ足を伸ばしたという話を因子分析の用語に置き換えると、寝台が先行研究の因子構造であり、プロクリステスの暴力的な行為がこの仮設構造への近似を軸の回転という方法で行うということになる。

因子分析には、準拠軸体系での回転と因子軸体系での回転とがある。多因子分析法を体系化した Thurstone (1935) は、主因子法あるいはセントロイド法のような数学的な基準により因子解を計算し、次に単純構造を求めて視覚的回転を準拠軸体系の下で行うことを提案した。因子に関して、primary factor という用語を使用していた Thurstone に対して、Holzinger and Harman (1941) は、因子と変数との関係について、因子パターン行列と因子構造行列を定義した。芝 (1978) は、仮説的因子行列を因子構造行列と因子パターン行列の2つを斜交プロクリステス法の下位に位置づけている。このように、伝統的なプロクリステス法の解を求める方法にはいくつかの立場が併存しているが、これらの中でも、準拠軸の下で回転により得られた準拠構造行列は、Mulaik (2010) も指摘しているように、比例関係にある因子パターン行列でも同じ結果として解釈することができる (清水, 2003a, 2014)。

1.1 回転を対象とした最小二乗法

観測変数の数を n とし、因子の数を m とし、そして、 n の数が m の数よりも大きいとして、観測変数と因子に関する仮説を $(n \times m)$ 次の仮説的因子行列 $\mathbf{H}$ と表す。ここで、仮説は、高く負荷すると判断した場合には 1 を、負荷しないと判断した場合には 0 を与えることで特定することにする。新しく収集したデータから抽出された因子行列 (直交解) をここでは $\mathbf{V}$ と表す。この行列の次数も $(n \times m)$ 次である。ここで、観測変数の数と因子の数とが同じとして、仮説的因子行列への近似を最小二乗法により求めることにする。ただし、一般的な重回帰分析とは異なり、このプロクリステス法では、因子行列の回転により仮説的因子行列へ因子行列を近似させる。ここで未知の因子の変換行列 $(n \times m)$ 次を $\mathbf{T}_h$ とし、仮説的因子行列と変換によって得られる因子行列との差を次のように表す。

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} - \mathbf{V}\mathbf{T}_h \quad (1.1.1)$$

この差を最小化するために、まず、差の平方和の関数を次のように表す。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}_h) &= \text{tr}(\mathbf{E}'\mathbf{E}) = \text{tr}\left[(\mathbf{H} - \mathbf{V}\mathbf{T}_h)'(\mathbf{H} - \mathbf{V}\mathbf{T}_h)\right] \\ &= \text{tr}(\mathbf{H}'\mathbf{H} - \mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{T}_h - \mathbf{T}_h'\mathbf{V}'\mathbf{H} + \mathbf{T}_h'\mathbf{V}'\mathbf{V}\mathbf{T}_h) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

この関数を $\mathbf{T}_h$ の要素で偏微分し、その結果をゼロとする。

$$\frac{\partial f(\mathbf{T}_h)}{\partial \mathbf{T}_h} = -2\mathbf{V}'\mathbf{H} + 2\mathbf{V}'\mathbf{V}\mathbf{T}_h = \mathbf{0} \quad (1.1.3)$$

これを移項して整理すると次のようになる。

$$\mathbf{V}'\mathbf{V}\mathbf{T}_h = \mathbf{V}'\mathbf{H} \quad (1.1.4)$$

以上から、未知の変換行列である $\mathbf{T}_h$ を次のように表すことができる。

$$\mathbf{T}_h = (\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{H} \quad (1.1.5)$$

なお、 $\mathbf{V}'\mathbf{V}$ は、Mosier (1939) によれば、Sylvester's Law of Nullity から正則の行列と考えることができる (たとえば、Harville, 1997)。

ここでは、回転が展開される軸の体系を準拠軸か因子軸かを明らかにしなかった。具体的に近似した解の推定は、準拠軸か因子軸のいずれかで行われる。次の1.2では、 $\mathbf{T}_h$ を準拠軸体系で求めてみることにする。そして、準拠軸において定義される準拠構造行列と準拠パターン行列、そして、因子軸において定義される因子パターンと因子構造との関係についても整理をおこなってみることにする。

1.2 準拠軸での古典的プロクラステス回転

Mosier (1939) による提案を実用的な手法として普及させることに貢献した Hurley and Cattell (1964) は、準拠構造行列を対象とした方法をまとめた。ここでは、準拠軸の変換行列を $\mathbf{T}_r$ とし、準拠軸に関して、各種の因子行列を導き出してみることにする。まず、(1.1.1) 式の変換行列 $\mathbf{T}_h$ を準拠軸の変換行列 $\mathbf{T}_r$ に置き換えて、次のように表す。

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} - \mathbf{V}\mathbf{T}_r \quad (1.2.1)$$

このようにすることで、(1.1.5) 式を次のように置くことができる。

$$\mathbf{T}_{hr} = (\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{H} \quad (1.2.2)$$

この行列を準拠軸の変換行列とするには、次のような規準化が必要となる (Mulaik, 2010)。

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{T}_{hr} \text{diag}\left(\mathbf{T}_{hr}'\mathbf{T}_{hr}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.2.3)$$

この結果により、準拠軸の相関行列を得ることができる。そして、準拠軸の構造行列とパターン行列もまた計算することができる。

$$C_r = T_r' T_r \quad (1.2.4)$$

$$V_{rs} = V T_r \quad (1.2.5)$$

$$V_{rp} = V_{rs} C_r^{-1} \quad (1.2.6)$$

上の(1.2.4)式で得られた準拠軸の相関行列から因子軸の体系を導くことができる。まず、準拠軸の相関行列の逆行列の対角項からなる行列を $\mathbf{K}$ とする(清水, 2014)。なお、芝(1978)は、準拠軸を相反系とし、この $\mathbf{K}$ を $\mathbf{D}$ と表記している。

$$\mathbf{K} = \text{diag}(C_r)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.7)$$

この行列の対角線の値は、準拠軸と因子軸との相関係数でもあるので、この関係を利用することによって、因子軸の変換行列は次のように計算することができる。

$$T_f = (T_r')^{-1} \mathbf{K} \quad (1.2.8)$$

以上から、因子間相関行列、因子構造行列、そして、因子パターン行列は、それぞれ次のように計算することができる。

$$C_f = T_f' T_f \quad (1.2.9)$$

$$V_{fs} = V T_f \quad (1.2.10)$$

$$V_{fp} = V_{rs} C_r^{-1} \quad (1.2.11)$$

1.3 因子軸での古典的プロクラステス回転

因子軸でのプロクラステス回転法を Gruvaeus (1970) が提案している。ここでは、芝(1979)の因子パターンを対象とした展開も参考にする。この場合、(1.1.1)式を因子軸とし、この時点では未知である因子軸の変換行列を T_f とする。(1.2.1)式は準拠構造行列の変換であったが、ここでは、因子パターン行列の変換となるので、変換行列の転地の逆行列を掛けることになる。なお、ここでは、仮説的行列もある種の因子パターン行列であるとする。

$$E = H - V (T_f)^{-1} \quad (1.3.1)$$

そして、(1.2.2)式を次のように置くことにする。

$$T_{hf} = (V V)^{-1} V H \quad (1.3.2)$$

芝(1979)は、この場合には、規準化は次のようになるとしている。

$$T_{hf_n} = T_{hf} \left(\text{diag} (T_{hf}' T_{hf})^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.3)$$

そして、因子軸の変換行列が次のように計算できるとしている。

$$\mathbf{T}_f = \left(\mathbf{T}'_{hfn} \right)^{-1} \quad (1.3.4)$$

以上から、因子に関する行列を次のように計算することができる。

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{T}'_f \mathbf{T}_f \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{V} \mathbf{T}_f \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{V}_{fp} = \mathbf{V}_{fs} \mathbf{C}_f^{-1} \quad (1.3.7)$$

この因子軸の変換からも準拠軸へは、(1.2.7) 式のように計算することができる。

$$\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{C}_f)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.8)$$

そして、(1.2.8) 式より、次のように準拠軸の変換行列を計算することができる。

$$\mathbf{T}_r = (\mathbf{T}'_f)^{-1} \mathbf{K} \quad (1.3.9)$$

なお、斜交の4種類の因子行列の関係は、清水 (2003a, 2014) で紹介したように、次のように整理することができる。

$$\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{V} \mathbf{T}_f = \mathbf{V}_{fp} \mathbf{C}_f = \mathbf{V}_{rs} \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{V}_{rp} \mathbf{K} \quad (1.3.10)$$

$$\mathbf{V}_{fp} = \mathbf{V} (\mathbf{T}'_f)^{-1} = \mathbf{V}_{fs} \mathbf{C}_f^{-1} = \mathbf{V}_{rs} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}_{rp} \mathbf{C}_r \mathbf{K}^{-1} \quad (1.3.11)$$

2. 因子間相関を拘束したプロクラステス法

仮説的因子行列 $\mathbf{H}$ に、新しい標本の因子行列 $\mathbf{V}$ を近似させることは、古典的プロクラステス法と同じである。違いは、因子パターン行列 $\mathbf{V}_{fp}$ を回転によって近似させる際に、回転のための変換行列に拘束条件を与えることにある。拘束条件には、先にも記したように、一般的な因子の回転と同じように、直交と斜交の二つがある。

Green (1952) は、Mosier (1939) が検討していなかった直交という条件の下で近似を求める方法を提案した。この論文で、彼は、 $\mathbf{V}'\mathbf{H}$ が正則であることを、この方法で解を得るための条件としている。古典的プロクラステス法でも紹介したように、一般的な因子分析では $\mathbf{V}'\mathbf{V}$ は正則であった (Harville, 1997)。因子に一つの変数も負荷しない、列の要素がすべてゼロであるような特殊な仮説的行列を構成しなければ、 $\mathbf{V}'\mathbf{H}$ は正則な行列となると考えられる。

ところが、 $\mathbf{V}'\mathbf{H}$ の非対称行列の分解をめぐって、いくつかの提案があった。その一つが Gibson (1962) の Eckart and Young (1936) の定理よる方法である。この提案に検討を加えて、 $\mathbf{V}'\mathbf{H}$ が正則という条件を満たさない非特異な場合の解を「直交プロクラステス法」として提案したのが Schönemann (1966) であった。そして、この非対称行列の分解の方

が、Gibson (1962) の Eckart and Young (1936) の定理よりも、一般的な解を得ることが
できる方法であると主張している。

Schönemann による「直交プロクラステス法」は、その後、代表的な方法であるとみな
され、この分野の理論的研究では、Green (1952) よりも広く引用されてきた。ここでの疑
問は、 $V'H$ が正則ではなく、特異ということが、プロクラステスを適用しようとする研究
で頻繁に遭遇することなのかどうかということである。ここで Schönemann が指摘してい
る行列 V と H のランクについてみてみることにする。この中で V の大きさは {観測変数×
因子数} であり、因子数は観測変数の数よりも小さい。一般的には、 $rank(V) = m$ である。
仮説的因子行列 H も同じく {観測変数×因子数} であり、もし、仮説が設定できない因子
があればその因子の列はゼロベクトルとなるかもしれないが、ここでも先行研究で m 個の
因子が抽出され、解釈されているのであれば、一般的には $rank(H) = m$ である。このよ
うに考えると、 $rank(V'H)$ が m を下回ることはないと言言できるのではないだろうか。この
2つの行列のいずれかの列がゼロ要素からなるという Schönemann (1966) が例としてい
るような特殊な状況に尺度構成の研究では遭遇することはないと考え、 $V'H$ のランクが m
を下回る特異行列となることをここでは検討の対象としないことにする。

2.1 斜交因子間相関を拘束したプロクラステス法

ここでは、Hakstian (1975) の因子間相関行列を拘束したプロクラステス回転法を、Green
(1952) と芝 (1979) や清水 (1981) を参考にしながら展開してみることにする。そして、
Hakstian (1975) や Schönemann (1966) の方法と比較してみることにする。

上で展開した古典的プロクラステス法と同じく仮説的因子行列と同じく近似させる新し
い因子行列が得られているとする。これに加えて、因子間相関行列も得られているとして、
次に、準備として、基本的な定義を確認しておくことにする。まず、因子パターン行列は、
直交の因子行列に因子軸の変換行列の転地の逆行列を掛けることによって次のように計算
される。

$$V_{fp} = V(T_f')^{-1} \quad (2.1.1)$$

因子軸の変換行列から、次の計算で因子間相関行列を計算することがができる。

$$C_f = T_f' T_f \quad (2.1.2)$$

ここで、因子間相関を固有分解し、固有値から対角行列 Λ と対応する固有ベクトルか
らな行列 Q を次のように表す。

$$C_f = Q\Lambda^2 Q' \quad (2.1.3)$$

以上の関係を応用して、因子軸の変換行列 T_f を、未知の直交の変換行列 T と因子間相関行列の固有分解から得られる固有値と固有ベクトルを利用して、次の様に定義してみることにする。

$$T_f = T\Lambda Q' \quad (2.1.4)$$

ここで、

$$T'T = TT' = I \quad (2.1.5)$$

である。この (2.1.4) 式の転置の逆行列を次のように展開してみる。

$$\begin{aligned} (T_f')^{-1} &= (T')^{-1} \Lambda^{-1} (Q')^{-1} \\ &= T\Lambda^{-1} Q' \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

この T や Q は、正方行列の直交行列であるので、直交行列の逆行列は転置行列となることから上のように展開できる。そして、

$$U = \Lambda^{-1} Q' \quad (2.1.7)$$

として、因子パターン行列を次の様に表してみることにする。

$$V_{fp} = VTU \quad (2.1.8)$$

仮説的因子行列と因子パターン行列との差の行列は、以上から次のようになる。

$$E = H - VTU \quad (2.1.9)$$

この差を最小とする変換行列 T を求めるために、この差の行列の積のトレースの関数を次のようにする。

$$\begin{aligned} g(T) &= tr(E'E) \\ &= tr[(H - VTU)'(H - VTU)] \\ &= tr(H'H) - 2tr(T'U'V'H) + tr(U'T'V'VTU) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

この右辺の第1項は T には関係しない。また、第3項は、次のようにも書きかえることができる (たとえば、Harville, 1997)。

$$tr(U'T'V'VTU) = tr(VTUU'T'V') = tr(VV') \quad (2.1.11)$$

以上から差を最小化する項だけを取り出して、次のように (2.1.10) 式を書きかえることにする。

$$g'(T) = tr(T'U'V'H) \quad (2.1.12)$$

ここで、 T の正規直交行列としての条件を、 Λ をラグランジュの未定乗数行列として、次のように関数を書きかえることにする。

$$f(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{U}'\mathbf{V}'\mathbf{H}) - \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{T}'\mathbf{T} - \mathbf{I})] \quad (2.1.13)$$

この関数を未知の $\mathbf{T}$ の要素によって偏微分し、その結果をゼロとする。

$$\frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}' - \mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{A}') = \mathbf{0} \quad (2.1.14)$$

ここで、ラグランジュの未定乗数に関して、次のようにおくと、

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} + \mathbf{A}' \quad (2.1.15)$$

この $\mathbf{L}$ は、対称行列となる。(2.1.14) 式を移項して

$$\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}' = \mathbf{T}\mathbf{L} \quad (2.1.16)$$

この (2.1.16) 式の両辺に左からそれぞれの転置行列をかけると次の様になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}' &= \mathbf{L}'\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{L} \\ &= \mathbf{L}^2 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

この結果を次のように置き換えてみることにする。

$$(\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{\frac{1}{2}} = \mathbf{L} \quad (2.1.18)$$

ここで (2.1.18) 式に右から $\mathbf{L}^{-1}$ をかけると次のようになる。

$$\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}'\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{T} \quad (2.1.19)$$

この式に (2.1.18) 式の逆行列を代入すると、次のようになる。

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1.20)$$

ここで、この結果が直交の変換行列であるかを確認してみると

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'\mathbf{T} &= (\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}' (\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

となる。以上を (2.1.4) 式の $\mathbf{T}$ に代入することによって因子の変換行列を計算することができる。

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}\mathbf{Q}' \quad (2.1.22)$$

そして、因子構造行列は、(1.2.10) 式から次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{fs} &= \mathbf{V}\mathbf{T}_f \\ &= \mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{H}'\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{H}\mathbf{U}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}\mathbf{Q}' \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

因子間相関行列は、因子の変換行列から計算することができる。そして、(1.3.11) 式から

因子パターン行列を次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} V_{fp} &= V(T_f')^{-1} \\ &= VC_f^{-1} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

ここで、斜交の因子間相関行列の拘束条件を直交行列としてみるには、 U を単位行列として、(2.1.8)式から(2.1.22)式を展開することになる。この場合には、 T は T_f と同じとなり、次のように、直交因子の変換行列を計算することができる。

$$T = V'H(H'VV'H)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1.23)$$

この式は、 U を単位行列とすれば明らかなように、(2.1.22)式に含まれる。

2.2 Hakstian (1975) の計算の手順

以上の式の展開はHakstian (1975) をベースとしたものであり、(2.1.1)式から(2.1.15)式までは同じである。異なるのは、(2.1.16)式の両辺に左から未知の直交の変換行列 T の転置をかけ、直交行列に性質を利用して、次の対称行列である L を取り出すことである。

$$T'V'HU' = L \quad (2.2.1)$$

この右辺は対称であるので、左辺も対称となる。ここで、 $S = V'HU'$ とおくと

$$T'S = S'T \quad (2.2.2)$$

となる。ここで、変換行列 T は正規直交行列であったので、これを両辺に左から掛けると(2.2.2)式は

$$S = TS'T' \quad (2.2.3)$$

となる。ここで、 S の基底構造 (basic structure) とし、この分解を次のように表す。

$$S = XDY' \quad (2.2.4)$$

ここで、 X と Y はそれぞれ正規直交行列であり、 D は対角行列とする。これらの行列は、次のように計算することができる。

$$S'S = YD^2Y' \quad (2.2.5)$$

$$SS' = XD^2X' \quad (2.2.6)$$

ただし、実際の計算で、(2.2.3)式の D の対角線に負の要素がある場合には、対応する X の列ベクトルの反転が必要となる。

ここで、 SS' を(2.2.3)式で表し、(2.2.5)式の関係から

$$SS' = TS'T'TST' = TS'ST' = TYD^2Y'T' \quad (2.2.7)$$

となる。ここで、上の式は、(2.2.6)式でもあったので、

$$TYD^2Y'T' = XD^2X' \quad (2.2.8)$$

となる。これにより

$$TY = X \quad (2.2.9)$$

となり、 Y は正規直交行列であったので、未知の直交の変換行列 T は、次のように計算することができる。

$$T = XY' \quad (2.2.10)$$

ここで紹介したように、Hakstian (1975) による S の基底構造の計算の過程は複雑であり、(2.1.22) 式のような一つの式で計算の全容を示すことができない。なお、この直交の変換行列 T は (2.1.20) 式と計算結果としては、同じとなるので、(2.1.8) 式により、因子パターン行列を計算することができる。そして、(1.3.10) 式や (1.3.11) 式で、斜交の4つの因子行列を計算することができる。

Hakstian (1975) が指摘しているように、(2.1.7) 式や (2.2.1) 式の U を単位行列とすれば、この展開は直交因子を対象としたものとなり、Schönemann (1966) の直交プロクラステスに一致する。すなわち、因子間の斜交拘束は、直交拘束を含むといえる。

3. 尺度採点の確認法：FACTORMAX 法の応用

プロクラステス法は、先行研究で報告された因子の構造を新しいデータで確認するための方法として使われてきた。この役割は、構造方程式モデリングの普及により、確認的因子分析や多集団同時分析が担うようになり、適合度の評価を下にした複数集団間での心理尺度の因子不変性についての知見が蓄積されてきている。そして、因子を対象として、構造方程式モデリングによる妥当性についての検討が行われている。

その一方で、因子分析から尺度を構成する場面では、当該因子にだけ負荷を示した項目得点の単純総和が尺度得点として扱われる。この操作では、因子分析の結果において、0.8の値を示した項目も、0.4の値の項目も尺度に含めると判断すれば、選ばれた項目に同じ重みが与えられることになる。 α 係数のような尺度の信頼性の推定でも、同様の重みが選択された項目に与えられる。そして、妥当性研究は、このような操作から算出された尺度を対象に行われる。心理検査を実施した後の尺度の採点でも同様である。

単純総和による尺度採点の方式は、実は、プロクラステス法の仮説行列を素点に掛けることと同じである。ここでは、因子行列にだけ焦点を当て、プロクラステス法を考えることから、実際に行われる尺度の採点という操作において、因子の近似を求めることへと発

想を転換してみることにする。

プロクラステス法の仮說的行列は $\{1,0\}$ のいずれかの値を要素して構成されることが多い。因子を確認したという確信を得るために、この仮說的行列の要素に適切な値を探索することが行われてきた。この仮說的因子の構成には、結果として研究者の主観的な判断が介在することになる。この主観性を回避する方法として、先行研究の因子得点を推定するための重み行列を、因子の回転に導入した清水・辻岡（1978, 1978）は FACTORMAX 法を提案している。これは、真の因子得点と因子得点の推定値と差を最小化することで因子得点推定の重み行列を算出する方法を、大きな標本（結絆サンプル）に含まれる下位サンプルの因子得点と結絆サンプルの因子得点との差を最小化する問題へと展開したものであった。その際、回帰法の因子得点の推定を利用し、因子軸の回転では、直交の因子軸の変換行列を未知として、因子の回転問題へと結果を導いている。この方法は、標準得点を対象とした因子得点の推定を行うものであったために、結絆サンプルと下位サンプルの標準偏差の違いが結果に影響を与えることになった。

よく知られているように、 $\{1,0\}$ の仮說的行列を項目得点に掛け合わせると尺度得点となる。Beauducel & Leue（2013）は、この操作によって構成される尺度を unit-weighted scales とし、その有用性を論じている。ここでは、この尺度得点と因子得点との差を最小化する方法を、FACTORMAX 法を応用して、展開してみることにする。その際、2つの方法を探り上げてみることにする。

ここで説明してきたように項目の素点に $\{1,0\}$ の仮說的行列を掛けることで尺度得点が得られる。もう一つの得点は、項目の素点に因子パターン行列を掛けたものである。この2つの得点の近似を求めることから因子の変換行列を因子パターン行列で展開してみることにする。これとは別に、回帰法による因子得点の推定値を得点として、これと尺度得点との近似を、FACTORMAX 法を応用して因子間相関を拘束してみることにする。

3.1 尺度採点の確認：因子パターン行列による方法

項目得点を確率ベクトル $\mathbf{x}$ として、尺度得点の採点を (3.1.1) 式のように表す。

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}'\mathbf{x} \quad (3.1.1)$$

$$E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}, \quad E(\mathbf{xx}') = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.1.2)$$

ここで、 $\mathbf{s}$ は m 次の尺度得点ベクトル、 $\mathbf{x}$ は n 次の項目得点ベクトル、 $\mathbf{H}$ は $(n \times m)$ 次の尺度採点のための重み行列である。一般的な尺度の採点では、当該尺度に含まれる項目には1が、含まれない項目にはゼロが与えられる。この重み行列は Procrustes 法では、仮説

の行列あるいは target 行列と呼ばれることもある。

因子パターン行列をこれまでと同じように $(n \times m)$ 次とし、 V_{fp} と表す。回転の対象となる $(n \times m)$ 次の直交の因子行列を V 、そして、 $(m \times m)$ 次の因子軸の変換行列を T_f と表す。これまでのように因子パターン行列は次のように表すことができる。

$$V_{fp} = V(T_f')^{-1} \quad (3.1.3)$$

ここでは、因子軸の変換行列を未知の変換 T_h とおくことにする。

$$T_h = (T_f')^{-1} \quad (3.1.4)$$

以上から推定される得点ベクトルを次のように表す。

$$\begin{aligned} g &= V_{fp}'x \\ &= T_h'V'x \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

次にここで定義した2つのベクトルについて、市川（2010）を参考にしながら、平均2乗誤差（MSE）を次のようにおいてみる。

$$\begin{aligned} MSE(g) &= E(s-g)(s-g)' \\ &= E(H'x - T_h'V'x)(H'x - T_h'V'x)' \\ &= E(H'xx'H) - 2E(H'xx'VT_h) + E(T_h'V'xx'VT_h) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

この結果を T_h の関数とし、 Σ を項目の共分散行列 $(n \times n)$ 次とし、全体をトレースで表現する。

$$f(T_h) = tr(H'\Sigma H - 2H'\Sigma VT_h + T_h'V'\Sigma VT_h) \quad (3.1.7)$$

次に、この関数を T_h の要素で偏微分し、その結果をゼロとする。

$$\frac{\partial f(T_h)}{\partial T_h} = -2V'\Sigma H + 2V'\Sigma VT_h = 0 \quad (3.1.8)$$

これを移項して整理すると次のようになる。

$$V'\Sigma H = V'\Sigma VT_h \quad (3.1.9)$$

ここでまず、この両辺に左から V' のムーア・ペンローズ型の一般化逆行列を掛けて、整理してみる。

$$\Sigma H = \Sigma VT_h \quad (3.1.10)$$

次に、この両辺に Σ^{-1} を左から掛けるとその結果は次の様に表すことができる。

$$H = VT_h \quad (3.1.11)$$

ここに両辺に左から $(V'V)^{-1}V'$ を掛けて移行すると

$$\mathbf{T}_h = (\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}'\mathbf{H} \quad (3.1.12)$$

となる。これは (1.1.5) であり、古典的プロクラステス法に一致する。ここでは、(3.1.4) 式で因子軸の変換行列として展開してきた。これは、1.2で示したように、準拠軸でも展開することができるが、ここでは割愛する。

3.2 尺度採点の確認：因子間相関を拘束

ここでも、項目を確率ベクトル $\mathbf{x}$ とし、(3.1.1) 式のように $\mathbf{H}$ を尺度採点の $(n \times m)$ 次の行列とする。そして、尺度得点のベクトルも同じように $\mathbf{s}$ とする。

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}'\mathbf{x} \quad (3.2.1)$$

次に、因子分析モデルを次のように表す。

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{V}_{fp}\mathbf{f} + \mathbf{u} \quad (3.2.2)$$

$$E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}, \quad E(\mathbf{f}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{x}\mathbf{x}') = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\mathbf{f}$ を m 次の因子得点のベクトル、 $\mathbf{u}$ を n 次の独自性ベクトルとする。 $\mathbf{V}_{fp}$ は、因子パターン行列で、 $(n \times m)$ 次である。

回帰法で推定される因子得点の推定値ベクトルを次のように表す。 $\boldsymbol{\Sigma}$ は項目の共分散行列 $(n \times n)$ 次であり、 $\mathbf{V}_{fs}$ は因子構造 $(n \times m)$ 次である。

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{V}_{fs}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} \quad (3.2.4)$$

因子間相関を拘束したプロクラステス法と同じように、この行列を既知として、(2.1.3) 式のように、

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{Q}\mathbf{A}^2\mathbf{Q}', \quad \text{そして、} \quad \mathbf{C}_f^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}' \quad (3.2.5)$$

とする。ここで、 $\mathbf{Q}$ は因子間相関行列を固有分解して得られる固有ベクトルからなる行列であり、 $\mathbf{A}^2$ は対角線が固有値からなる対角行列とする。なおそれぞれの次数は $(m \times m)$ とする。

以下では、(3.2.4) 式の因子構造行列を対象にして、未知の直交変換行列を求めてみることにする。まず、 $(m \times m)$ 次の直交変換行列 $\mathbf{T}$ を、次のように定義しておくことにする。

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{I} \quad (3.2.6)$$

そして、因子の変換行列をこの (3.2.5) 式と (3.2.6) 式により

$$T_f = TC_f^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.7)$$

とする。これにより、因子構造行列は次のように表すことができる。

$$V_{fs} = VT_f = VTC_f^{\frac{1}{2}} \text{ あるいは } V_{fs}' = T_f'V' = C_f^{\frac{1}{2}}T'V' \quad (3.2.8)$$

以上から因子得点の推定値ベクトルも次のように表すことができる。

$$\hat{f} = C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}x \text{ あるいは } \hat{f}' = x'\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.9)$$

次にここで定義した2つのベクトルについて、平均2乗誤差 (MSE) を次のようにおいてみる。

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}) &= E(s - \hat{f})(s - \hat{f})' \\ &= E\left(H'x - C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}x\right)\left(H'x - C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}x\right)' \\ &= E(H'xx'H) - 2E\left(H'xx'\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}}\right) + E\left(C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}xx'\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

さらに、項目の共分散行列を Σ として整理してみる。

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}) &= H'\Sigma H - 2H'\Sigma\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}} + C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}} \\ &= H'\Sigma H - 2H'VTC_f^{\frac{1}{2}} + C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

この結果を、未知の直交変換行列を対象として、全体をトレースで表現する。

$$f(T) = tr(H'\Sigma H) - 2tr(H'VTC_f^{\frac{1}{2}}) + tr(C_f^{\frac{1}{2}}T'V'\Sigma^{-1}VTC_f^{\frac{1}{2}}) \quad (3.2.12)$$

ここで、右辺の第1項は T の変換には関係がない。第3項は T が直交変換行列という条件を満たせば、因子間相関行列も変数間の相関行列は逆行列であっても T の変換には関係しない。また、直交の因子行列を直交回転しても、因子の全体寄与率は、因子負荷量平方和の合計であるので、その値は変わらない。そこで、この関数の最小化に關係する項だけを取り出して整理し、ラグランジェの未定行列 A により直交変換行列の条件を挿入する。

$$f'(T) = tr(H'VTC_f^{\frac{1}{2}}) - tr[A(T'T - I)] \quad (3.2.13)$$

この関数を T の各成分で偏微分し、結果をゼロとおくことにする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(T)}{\partial T} &= V'HC_f^{\frac{1}{2}} - T(A+A') \\ &= V'HC_f^{\frac{1}{2}} - TL = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

この結果を移行すると次のようになる。

$$V'HC_f^{\frac{1}{2}} = TL \quad (3.2.15)$$

ここで、両辺に左からそれぞれの転置行列をかける。

$$C_f^{\frac{1}{2}}H'VV'HC_f^{\frac{1}{2}} = LTTL = L^2 \quad (3.2.16)$$

この結果を次のようにおくことにする。

$$L^{-1} = (C_f^{\frac{1}{2}}H'VV'HC_f^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.17)$$

これを (3.2.15) 式の両辺に右から掛け整理すると次のようになる。

$$T = V'HC_f^{\frac{1}{2}}(C_f^{\frac{1}{2}}H'VV'HC_f^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.18)$$

そして、(3.2.7) 式から斜交の因子軸の変換行列は次のようになる。

$$T_f = V'HC_f^{\frac{1}{2}}(C_f^{\frac{1}{2}}H'VV'HC_f^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}C_f^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.19)$$

この展開から、(2.1.22) と同じ結果を導くことができた。ただし、先の2.1で展開した斜交因子間相関を拘束したプロクラステス法では、因子間相関行列を固有分解し、 $4Q'$ とし、その後の展開を行った。ここでは、これを $C_f^{\frac{1}{2}}$ としている。

いずれにおいても、直交を拘束条件とする場合には、これらの行列は単位行列と置くことによって計算が可能である。直交と斜交のいずれの因子間相関行列においても、正則行列であることを条件としている。特異行列であっても処理は可能であるが、実際の応用場面で遭遇することはないと考え、ここでは、この点については、これ以上の言及はしないことにする。

4. おわりに

先行する研究から得られた因子の構造を確認する方法を提案した Mosier (1939) は、高い正で負荷を示す要素には、0.3から0.9の数値を、負で高い値の場合には、-0.5や-0.6の

数値を回転の目標行列の要素としている。高いと判断できなかった要素は、すべてゼロとすることによって、目標行列を単純構造として、次の研究から得られた直交因子行列をこの目標行列に近似させる変換行列を計算する方法を提案した。この仮説的目標行列の構成方法は、その後、Tucker (1944) や Hurley & Cattell (1962) などにも引き継がれた。

Hakstian (1975) のように、単純に $\{1,0\}$ で目標行列を構成している例もあるが、芝 (1972, 1979) は、 $\{1,0\}$ とすることに加えて、通常は1とする高い値の行列の要素について、高い値を期待するが1という値を固定して与えないで、プロクラステス法を繰り返すことによって、より適切な値を探索する方法を提案している。柏木 (1989) もまた高い値については、これを推定する方法を検討している。このような方法論を Brwone (2001) は、Target 回転法として整理している。清水・山本 (2020) では *Mplus* で Target 回転法を使用した。仮説的目標行列の構成については、Lorenzo-Seva & Ferrando (2020) もまた検討を加えており、より柔軟性のある方法と計算プログラムを提供している。

構造方程式モデリングの測定モデルを対象として確立してきた因子の不変性の検証には、4つのレベルがある (たとえば、清水 (2003b, 2013) など)。ここで検討したプロクラステス法の中で、因子間相関を拘束しない古典的プロクラステス法は、布置不変性のレベルを探索的に検討する方法であると考えられる。ここで「探索的」としたのは、回転による方法では、因子パターンの値をゼロに固定することができないからであり、回転結果の因子パターン行列のすべての要素に何らかの値が計算されるからである。そして、結果の適合度の評価ができないからでもある。因子間相関を拘束する方法は、先行研究とまったく同じ値の因子間相関の因子軸の枠組みの中で、布置不変性のレベルで因子と項目との関係を探的に検討することになる。

古典的プロクラステス法は、この仮説的構造を Varimax 回転結果から構成し、斜交に因子を回転する Promax 法に基礎的展開を提供した方法としての評価は高い (Mulaik, 2010)。しかしながら、ここで紹介したような仮説的行列の構成についての試みはあっても、因子的不変性を確認する役割は、構造方程式モデリングに道を譲ったと言わざるを得ない。

本稿では、清水 (1981) が因子得点の推定方法に関して展開したように、直交という枠組みが斜交に含まれることを拘束プロクラステス法においてもまとめることができた。そして、プロクラステス法について、直交と斜交という分類ではなく、先行研究の因子間相関を拘束条件とするかしないかで分類することができることを提案した。

これに加えて、因子行列だけを対象としてきたプロクラステス法を因子得点の推定方法を応用して検討を加えてみた。尺度得点は素点に尺度採点の行列を掛けることで行われる。

この採点行列は、先行研究の因子分析結果で高い負荷を示し、尺度に含めると判断した項目には1を、尺度から除外した項目には0を重みとして与えたものと同じであり、プロクラステス法での仮説的行列に相当する。

そこで、本稿では、プロクラステス法で伝統的に検討されてきた仮説的行列の構成という問題から離れ、尺度得点に焦点を当てることにした。目標行列を置かないFACTORMAX法を応用して、この尺度得点行列に近似するような因子得点の推定について、2つの方法を試みた。

その一つは、尺度得点に因子パターン行列を掛けるという方法である。これは、尺度得点の採点で使用される行列（仮説的行列）は、この尺度が構成された先行研究の因子パターンにある意味では $[1, 0]$ で象徴的に表現したものと考えたからである。新しいデータから得た直交行列を、これに近似させることを試みた。その結果は、古典的プロクラステス法に一致するものであった。これに対して、もう一つの回帰法による因子得点の推定法を適用したところ、この場合には、斜交条件付きのプロクラステス法に一致する結果を得た。このように尺度得点という切り口からもプロクラステス法を拘束の有無で2つに分けることができるといえそうである。

Nesselroade, Gerstorf, Hardy, & Ram (2007) は、多人数を対象とした動的因子分析において、因子間相関を固定して、個人間の違いを因子パターンにおいて検討する方法を提案している。今回の因子間相関を拘束したプロクラステス法は、集団を対象として、同じような方向を探るものであるともいえそうである。不変性を検討する枠組みを因子間相関におくことについては、因子軸を直交として拘束した時代には、それほど批判の対象となることはなかったが、構造方程式モデリングの立場からは批判がある。拘束する斜交の因子間相関を特定することについては、その根拠などさらなる検討が必要かと考えている。

本稿では、清水・山本（2020）が使用した *Mplus* や R などに提供されている Target 回転法には言及しなかった。ベイズ推定の因子分析や Bifactor モデルへの試みも含め、Moore et al. (2015) などのように、この分野の研究は新しい方向へと発展している。構造方程式モデリングでは、たとえば、Marsh, Morin, Parker, & Kaur (2014) などのように、適合度を確実なものとするために探索的な方法が導入されるようになってきた。

ここでは、最後に、二つのことを強調しておきたい。一つは、ここまで議論してきたように、目標を何に置くかということである。因子的不変性の追求に焦点を当てたいろいろな方法は、ここで一部紹介したように新しい道へと歩み始めている。ここでは、回転の目標として、これまでは検討されてこなかった尺度の採点システムに焦点を当てた。この点

から「尺度」についての議論をもっと深める必要があることを指摘しておきたい。

もう一つは、因子間相関の拘束についてである。因子軸を直交とすることの利点は、因子解を単純に解釈できることであり、方法の展開でも「構造とパターン」×「準拠軸と因子軸」を一つの因子行列でまとめることができる点にあり、これが理由かは明確ではないが、心理学の因子分析を適用した研究では、Varimax から得られる直交行列だけで結果を解釈する時代が長く続いてきた（柳井，2000）。本稿では、準拠軸と因子軸との関係を示しながら、斜交の4因子行列の計算方法を紹介した（Appendix も参照）。Mulaik（2010）が指摘しているように、準拠軸体系での Thurstone による2次元座標軸での回転では、多次元因子空間における変数の布置を検討することは今の時代でも重要なことであると考えているからでもある（清水，2014）。

先行する研究の因子の構造を直交として確定し、その下で尺度を構成し、尺度間の相関も直交であれば、直交を拘束条件としたプロクラステス法を新しいデータに適用することができる。斜交を拘束条件とすることは、直交をその中に含むわけであり、この点から、これまでの研究を見直す必要があると考えている。

本稿で紹介した斜交プロクラステス法を実際のデータに適用する場合、仮説的行列は尺度を採点する手順をそのまま適用することになる。因子間相関については、構成された尺度間の相関行列として、当該尺度を構成した研究が報告したものを使用することになる。これが入手できない場合には、新しいデータで尺度を構成し、尺度間の相関行列を計算して、これを使うことになる。拘束に使用する因子間の相関について、ここで紹介してきた拘束しない方法の結果との比較、あるいは、構造方程式モデリングで、布置不変性として因子間相関（分散・共分散）を固定推定した結果などとの比較などを、実際のデータやシミュレーションデータを対象としたさらなる研究の蓄積が必要であると考えている。

本稿では、ここで検討した4つの方法について、R（R Development Core Team, 2020）でスクリプトを作成し、それらを Appendix に掲載した。これらのスクリプトについては、芝（1978）や Hakstian（1975）に掲載されている因子行列で計算結果の確認を行っている。

引用文献

- Beauducel, André & Leue, A. (2013). Unit-weighted scales imply models that should be tested! *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 18(1), 1-7.
- Browne, M. W. (2001). An overview of analytic rotation in exploratory factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 36, 111-150.

- Eckart, C. and Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1, 211-218.
- Gibson, W. A. (1962). On the least-squares orthogonalization of an oblique transformation. *Psychometrika*, 27(2), 193-195.
- Green, B. F. (1952). The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis. *Psychometrika*, 17, 429-440.
- Gruvaeus, G. T. (1970). A general approach to Procrustes pattern rotation. *Psychometrika*, 35, 493-505.
- Hakstian, A. R. (1975). Procedures for ϕ -Constrained Confirmatory Factor Transformation. *Multivariate Behavioral Research*, 10, 245-253.
- Harville, D.A. (1997) *Matrix algebra from a statistician's perspective*. New York, NY: Springer.
- Holzinger, K. J., & Harman, H. H. (1941). *Factor analysis*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press.
- Grice, J. W., & Harris, R. J. (1998). A comparison of regression and loading weights for the computation of factor scores. *Multivariate Behavioral Research*, 33, 221-247.
- Hurley, J. R., & Cattell, R. B. (1962). The Procrustes program: producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, 7, 258-262.
- 市川 雅教 (2010). 因子分析 朝倉書店
- 柏木 繁男 (1989). 平面因子布置分割化原理によるプロクラステス因子回転の理論 心理学モノグラフ No. 19 日本心理学会
- Lorenzo-Seva, U., & Ferrando, P. J. (2020). Unrestricted factor analysis of multidimensional test items based on an objectively refined target matrix. *Behavior Research Methods*, 52, 116-130.
- Marsh, H. W., Morin, A. J., Parker, P. D., & Kaur, G. (2014). Exploratory structural equation modeling: An integration of the best features of exploratory and confirmatory factor analysis. *Annual review of clinical psychology*, 10, 85-110.
- Moore, T. M., Reise, S. P., Depaoli, S., & Haviland, M. G. (2015). Iteration of partially specified target matrices: Applications in exploratory and Bayesian confirmatory factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 50(2), 149-161.
- Mosier, C. I. (1939). Determining a simple structure when loadings for certain tests are known. *Psychometrika*, 4, 149-162.
- Mulaik, S. A. (2010). *Foundations of factor analysis* (2nd ed.). CRC press.
- Nesselroade, J. R., Gerstorf, D., Hardy, S. A., & Ram, N. (2007). Idiographic filters for psychological constructs, *Measurement*, 5(4), 217-235.
- R Development Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- Schönemann, P. H. (1966). A generalized solution of the orthogonal procrustes problem. *Psychometrika*, 31, 1-10.
- 芝 祐順 (1972). 因子分析法 東京大学出版会
- 芝 祐順 (1979). 因子分析法 (第2版) 東京大学出版会
- 清水 和秋 (1981). 因子間相関を固定した斜交因子得点 関西大学社会学部紀要, 12(2), 113-128.
- 清水 和秋 (2003a). 因子分析における探索の意味と方法 関西大学社会学部紀要, 34(2), 1-36.
- 清水 和秋 (2003b). 構造方程式モデリングによる平均構造の解析モデル 関西大学社会学部紀要, 34(2),

83-108.

- 清水 和秋 (2013). 構造方程式モデリング 日本パーソナリティ心理学会 (企画) 二宮 克美・浮谷 秀一・堀毛 一也・安藤 寿康・藤田 圭一・塩谷 真司・渡邊 芳之 (編集) パーソナリティ心理学ハンドブック (pp.669-675) 福村出版
- 清水 和秋 (2014). 共通因子空間における観測変数の布置 関西大学心理学研究, 5, 1-9.
- 清水 和秋・辻岡 美延 (1978). FACTORMAX 法による確認的因子分析法——因子間相関を固定しつつ因子推定値間の積和を最大化する斜交 Procrustes 法—— 日本社会心理学会第19回発表論文集, 64-65.
- 清水 和秋・辻岡 美延 (1979). FACTORMAX 法による確認的因子分析法——Y-G 性格検査について—— 日本教育心理学第21回総会発表論文集, 842-843.
- 清水 和秋・山本 理恵 (2020). YG 性格検査の120項目の target 回転による因子分析 関西大学社会学部紀要, 51(2), 51-70.
- Thurstone, L. L. (1935). *The vectors of mind*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press.
- Tucker, L.R. (1944). A semi-analytical method of factorial rotation to simple structure. *Psychometrika*, 9, 3-68.
- 柳井 晴夫 (2000). 因子分析法の利用をめぐる問題点を中心にして 教育心理学年報, 39, 96-108.

—2020.8.23受稿—

Appendix 1 : 準拠軸での古典的プロクラステス回転 (準拠構造行列)

```
## 古典的 procrustes 回転 : 準拠構造    2020.03.15
## Mosier (1939)、Hurley and Cattell (1962)
##      T = (V'V)-1V'G
##
##
## input H : hypothesized matrix      hypothesized_matrix.xlsx
##      V : unrotated factor matrix    unrotated_factor.csv
##      nv : number of variables
##      nf : number of factors
##
library (openxlsx)

V <- read.xlsx ("unrotated_factor.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
H <- read.xlsx ("hypothesized_matrix.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Nv <- nrow (V)
Nf <- ncol (V)
V <- as.matrix (V, nrow=nv, ncol=nf)
H <- as.matrix (H, nrow=nv, ncol=nf)

tVV <- t (V) %*% V
```

3種類のプロクラステス回転法の関係について (清水)

```
inv_tVV <- solve (tVV)

VH <- t (V) %*% H

T <- inv_tVV %*% VH

## 規準化
T <- as.matrix (T, nrow=nf, ncol=nf)

TT <- 1/sqrt (diag (t (T) %*% T))
D <- diag (TT,Nf,Nf)

Tr <- T %*% D

Vrs <- V %*% Tr
Vrp <- V %*% solve (t (Tr))

### 準拠軸間相関行列

Cr <- t (Tr) %*% Tr

Kcr <- solve (Cr)
KK <- 1/sqrt (diag (Kcr))
K <- diag (KK,Nf,Nf)

Cf <- K %*% solve (Cr) %*% K

### 因子軸の変換行列
Tf <- solve (t (Tr)) %*% K

### 因子間相関行列
### 因子構造行列
### 因子パターン行列

Cf <- t (Tf) %*% Tf
Vfs <- V %*% Tf
Vfp <- Vfs %*% solve (Cf)
```

```
##### 因子軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vrs, file="Vrs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Vrp, file="Vrp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Cr, file="Cr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tr, file="Tr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)

##### 準拠軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vfp, file="Vfp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Vfs, file="Vfs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Cf, file="Cf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tf, file="Tf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)

## end
```

Appendix 2 : 因子軸での古典的プロクラステス回転 (因子パターン行列)

```
## 古典的 procrustest 回転 : 因子パターン行列での回転
##
## 芝 (1979) の因子パターンの方法 (pp.170-171)
## 準拠構造の古典的な方法と Vfp、Cf などの値は同じとなる。
## 2020.03.05
## input H : hypothesized matrix      hypothesized_matrix.xlsx
## V : unrotated factor matrix        unrotated_factor.csv
## nv : number of variables
## nf : number of factors
##
library (openxlsx)

V <- read.xlsx ("unrotated_factor.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
H <- read.xlsx ("hypothesized_matrix.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Nv <- nrow (V)
Nf <- ncol (V)

V <- as.matrix (V, nrow=nv, ncol=nf)
H <- as.matrix (H, nrow=nv, ncol=nf)

Tp <- solve (t (V) %*% V) %*% t (V) %*% H
```

3種類のプロクラステス回転法の関係について (清水)

```
## 規準化
pTTp <- solve (t (Tp) %*% Tp)

TT <- sqrt (diag (pTTp))
Df <- diag (TT,Nf,Nf)

tTfinv <- Tp %*% Df
Tf <- solve (t (tTfinv))
Cf <- t (Tf) %*% Tf
#####
Vfs <- V %*% Tf
Vfp <- Vfs %*% solve (Cf)

## 準拠軸 =====

Kcf <- solve (Cf)
KK <- 1/sqrt (diag (Kcf))
K <- diag (KK,Nf,Nf)
Cr <- K %*% solve (Cf) %*% K

Tr <- solve (t (Tf) %*% K)

Vrs <- V %*% Tr
Vrp <- Vrs %*% solve (Cr)

##### 因子軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vfp, file="Vfp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Vfs, file="Vfs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Cf, file="Cf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tf, file="Tf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)

##### 準拠軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vrs, file="Vrs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Vrp, file="Vrp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Cr, file="Cr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tr, file="Tr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
```

end

Appendix 3：斜交因子間相関を拘束したプロクラステス法

```
## 因子間相関を拘束した procrustes 回転 2020.02.13 清水和秋
## Hakustian (1975) を下に、芝 (1979) の直交プロクラステス法と
## 清水 (1981) の斜交因子得点の最小二乗法 (偏微分の展開) を応用
##
## 準備：
##  $V_{fp} = V (Tf)' (-1)$ 
##  $Cf = Tf'Tf = Q \Delta 2Q'$ 
## Hakustian に従って  $Tf = T \Delta Q'$  とおく。ここで、 $T'T = TT' = I$ 。
## 以上から  $(Tf)' (-1) = T \Delta (-1) Q' = TU$  とする。
##  $U = \Delta (-1) Q'$  そして、 $V_{fp} = V_o TU$  である。
## 既知の行列
## H：仮説行列 (先行研究から構成)
## Cf：因子間相関行列 (先行研究において既知)
##  $U = \Delta (-1) Q'$ 
## 直交因子の場合には  $Cf = I$  (単位行列) とする。
## (芝 (1979) の直交プロクラステス解 (p.165) に一致する。)
## V：回転前の直交因子行列 (回転の対象)
## 最小二乗推定：
##  $E = V_o TU - H$  この差を最小二乗法的に最小化する。
##  $f(T) = \text{tr}(E'E)$  この関数を T で偏微分する。L をラグランジェの未定行列
## とすると  $L = (UH'V_oV_o'HU')$  (1/2) となり、これにより
##  $T = V'HU' (UH'VV'HU') (-1/2)$  として直交変換行列を得ることができる。
## そして、 $Tf = TU$  により斜交の因子軸変換行列を得ることができる。
##
## input H : hypothesized matrix hypothesized_matrix.xlsx
## Cf: factor correlation matrix factor_correlation.xlsx
## V: unrotated factor matrix unrotated_factor.xlsx
## nv : number of variables
## nf : number of factors
## 確認済み：
## 直交因子：芝 (1979) の直交プロクラステス解 (p.165) に計算結果が一致。
## 斜交因子：Hakustian (1975) の Table 1 (p.252) に計算結果が一致。
##
library (openxlsx)
## 行列の読み込み (Excel)
```

3種類のプロクラステス回転法の関係について (清水)

```
V <- read.xlsx ("unrotated_factor.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
H <- read.xlsx ("hypothesized_matrix.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Cf <- read.xlsx ("factor_correlation.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Nv <- nrow (V)
Nf <- ncol (V)
V <- as.matrix (V, nrow=nv, ncol=nf)
H <- as.matrix (H, nrow=nv, ncol=nf)
Cf <- as.matrix (Cf, nrow=nv, ncol=nf)

## 因子間相関行列の分解 Q と Δ2を計算
egv_Cf <- eigen (Cf)
Cf_v <- egv_Cf$values
Cf_Q <- egv_Cf$vectors
Cf_sqrt <- diag (sqrt (Cf_v))

## U の計算 U = Δ -1 Q'
U <- solve (Cf_sqrt) %*% t (Cf_Q)

## L の計算 L = (UH'VV'HU) (1/2)
L2 <- U %*% t (H) %*% V %*% t (V) %*% H %*% t (U)
egv_L2 <- eigen (L2)
L2_v <- egv_L2$values
L2_Q <- egv_L2$vectors
L2_sqrt_v_inv <- diag (1/sqrt (L2_v))

L <- L2_Q %*% L2_sqrt_v_inv %*% t (L2_Q)

## T の計算 T = V'HU' (UH'VV'HU) (-1/2)
T <- t (V) %*% H %*% t (U) %*% L

## Tf の計算 Tf = TU
Tf_t_inv <- T %*% U

## 因子間相関行列の計算 : 入力した値との確認
Tf_t <- solve (Tf_t_inv)
Tf <- t (Tf_t)
Cf <- t (Tf) %*% Tf
```

```

## 因子軸と準拠軸との相関からなる対角行列 K
Kcf <- solve (Cf)
KK <- 1/sqrt (diag (Kcf))
K <- diag (KK,Nf,Nf)

## 準拠軸間の相関行列と変換行列の計算
Cr <- K %*% solve (Cf) %*% K
Tr <- solve (t (Tf)) %*% K

## 斜交 4 因子行列の計算
Vfp <- V %*% Tf_t_inv
Vrs <- V %*% Tr
Vfs <- Vfp %*% Cf
Vrp <- Vrs %*% solve (Cr)

##### 因子軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vfp,file="Vfp.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)
write.xlsx (Vfs,file="Vfs.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append=FALSE)
write.xlsx (Tf,file="Tf.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)
write.xlsx (Cf,file="Cf.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)

##### 因子軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vrs,file="Vrs.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append=FALSE)
write.xlsx (Vrp,file="Vrp.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)
write.xlsx (Cr,file="Cr.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)
write.xlsx (Tr,file="Tr.xlsx",colNames=TRUE,rowNames=TRUE,append = FALSE)

### end

```

Appendix 4 : Hakstian (1975) による斜交因子間相関を拘束したプロクラステス法

```

## 因子間相関を拘束した procrustest 回転
## Hakustian (1975) をベースに展開
##  $T = V'HCr1/2 (Cr1/2H'VV'HCr1/2) -1/2$ 
##
##
## input : hypothesized matrix          hypothesized_matrix.csv
##        : factor correlation matrix   factor_correlation.csv
##        : unrotated factor matrix     unrotated_factor.csv

```

3種類のプロクラステス回転法の関係について (清水)

```
##          nv : number of variables
##          nf : number of factors
##

library (openxlsx)

V <- read.xlsx ("unrotated_factor.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
H <- read.xlsx ("hypothesized_matrix.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Cf <- read.xlsx ("factor_correlation.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE)
Nv <- nrow (V)
Nf <- ncol (V)
V <- as.matrix (V, nrow=nv, ncol=nf)
H <- as.matrix (H, nrow=nv, ncol=nf)
Cf <- as.matrix (Cf, nrow=nv, ncol=nf)

#####p.250 (1) [2] [3] 因子間相関行列の分解
egv_Cf <- eigen (Cf)
Cf_v <- egv_Cf$values
Cf_Q <- egv_Cf$vectors
Cf_sqrt <- diag (sqrt (Cf_v))
Cf_half <- Cf_Q %*% Cf_sqrt
U <- solve (Cf_sqrt) %*% t (Cf_Q)

#####p.251 (2)  $S=A'BU' \leq S=V'HCf (1/2)$ 

S <- t (V) %*% H %*% t (U)

tSS <- t (S) %*% S
StS <- S %*% t (S)

##### (3) Y:tSS_Q X:StS_Q
egv_tSS <- eigen (tSS)
tSS_v <- egv_tSS$values
tSS_Q <- egv_tSS$vectors
Y <- tSS_Q

egv_StS <- eigen (StS)
StS_v <- egv_StS$values
StS_Q <- egv_StS$vectors
```

```

X <- StS_Q

#### (4) X'SY : t (tSS_Q) S StS_Q
##SSS <- t (tSS_Q) %*%S %*% StS_Q

SSS <- t (X) %*%S %*% Y

##### SSSで負の要素がないか確認
##### 負があれば、対応する X の列を逆転させる
#> SSS
#           [, 1]      [, 2]      [, 3]
# [1,] -2.761322e+00  1.776357e-15  1.360023e-15
# [2,] -1.998401e-15 -2.594239e+00 -5.273559e-16
# [3,] 1.026956e-15 -1.360023e-15  2.176351e+00

#> X
#           [, 1]      [, 2]      [, 3]
# [1,] 0.6507014 -0.6032435 -0.46117769
# [2,] -0.2736959  0.3801927 -0.88348404
# [3,] 0.7082924  0.7011068  0.08228665

I <- diag (1:3)
diag (I) <- 1
I [1,1] <- -1
I [2,2] <- -1

Xd <- X %*% I
Xd
#           [, 1]      [, 2]      [, 3]
# [1,] -0.6507014  0.6032435 -0.46117769
# [2,] 0.2736959 -0.3801927 -0.88348404
# [3,] -0.7082924 -0.7011068  0.08228665

#####

#### (5) T=XY'
```

3種類のプロクラステス回転法の関係について (清水)

```
T <- Xd %*% t (Y)

### (6) P= ATU

Vfp <- V %*% T %*% U

#####

Cf_new <- solve (t (T %*% U) %*% (T %*% U))
Vfs <- Vfp %*% Cf_new

Kcf <- solve (Cf_new)
KK <- 1/sqrt (diag (Kcf))
K <- diag (KK,Nf,Nf)

Tr <- T %*% U %*% K
Tf <- solve (t (Tr)) %*% K

Cr <- t (Tr) %*% Tr

Vrs <- Vfp %*% K
Vrp <- Vrs %*% solve (Cr)

##### 因子軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vrs, file="Vrs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Vrp, file="Vrp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append=FALSE)
write.xlsx (Cr, file="Cr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tr, file="Tr.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)

##### 準拠軸関係行列の出力 ###
write.xlsx (Vfp, file="Vfp.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Vfs, file="Vfs.xlsx", colNames=TRUE, rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Cf, file="Cf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)
write.xlsx (Tf, file="Tf.xlsx", colNames=TRUE,rowNames=TRUE, append = FALSE)

## end
```