関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
Vol.18 (2011)

解　説

ディリクレの算術級数定理について

村 林 直 樹*

Dirichlet's theorem on arithmetic progressions

Naoki MURABAYASHI

1．はじめに

素数とは2以上の整数で正の約数が1と自分自身だけとなる数であり、小さいものから順に並べると

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

と続く。定義自体は非常に簡明な素数であるが、まだ解決されていない予想が数多く存在する。例えば双子素数予想、ゴールドバッハ予想、リーマン予想などが挙げられる。pと$p+2$が両方とも素数になるものを双子素数とよび、この双子素数が無限個存在するであろうというのが双子素数予想である。ゴールドバッハ予想とは4以上の全ての偶数は二つの素数の和として表すことが出来るであろうという予想である。

これら二つの予想は簡単に理解できるが、三番目のリーマン予想を理解するには複素解析学の知識が必要である。$f=f(s)$を複素数全体のなす集合$\mathbb{C}$内のある開集合D上で定義された複素数値関数とする。Dの任意の元sに対し、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(s+t)-f(s)}{t}$$

が存在するとき、fはDで正則であるという。ここで$t\to 0$とは$t=u+iv$（iは虚数単位を表し、u, vは実数である）としたとき、$|t|=\sqrt{u^2+v^2}$が限りなく0に近づくようにtを動かすということである。sを複素変数とし、次の級数を考える：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

sの実部$\mathrm{Re}(s)$が1より大きければ、この級数は絶対収束し、$D_0=\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>1\}$上の正則関数となることが知られている。これを$\zeta(s)$と表し、リーマンのゼータ関数とよぶ。$\zeta(s)$は全$s$平面に有理的に解析接続されることが知られている。すなわち、$\{s\in\mathbb{C}\mid s\neq 1\}$で正則で、かつ$s=1$で1位の極をもつ関数$F(s)$で、$D_0$上で$\zeta(s)$と一致するものが一意的に定まる。この$F(s)$も$\zeta(s)$と表すことにする。この全平面に拡張された$\zeta(s)$は次の関数等式をもつことが知られている：

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

ここで、$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$はガンマ関数である。更に$\zeta(s)$は$D_0$上でオイラー積表示とよばれる次の等式をもつことも知られている：

$$\zeta(s)=\prod_{p\in P}(1-p^{-s})^{-1}$$

ここで、Pは素数全体のなす集合を表す。関数等式の証明は難しいので、オイラー積表示についてのみ簡単に説明する。複素数zで$|z|<1$となるものに対し、

$$(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}(1-2^{-s})^{-1}&(1-3^{-s})^{-1}\\ &=(1+2^{-s}+2^{-2s}+\cdots+2^{-ks}+\cdots)\\ &\quad\times(1+3^{-s}+3^{-2s}+\cdots+3^{-ls}+\cdots)\\ &=\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{1}{(2^k3^l)^s}\end{aligned}$$

原稿受付　平成23年9月17日
*システム理工学部 数学科 教授

となり、最後の式には（２べき）×（３べき）の形の素因数分解をもつnに対するn^{-s}がただ一回だけ現れる。自然数の素因数分解の一意性から、全ての素数について掛け合わせることにより

$$\prod_{p\in P}(1-p^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

が成立するのである（級数が絶対収束する場合は和の順番を変えてもよいということも使っている）。

オイラー積表示から$\zeta(s)$はD_0で零点をもたないことが分かる。また、関数等式とガンマ関数の性質から$\zeta(s)$は$\mathrm{Re}(s)<0$なる範囲では$s=-2,\ -4,\ -6,\ \cdots$で１位の零点をもち、それ以外に零点をもたないことも分かる。然るに$\zeta(s)$の$0\leqq \mathrm{Re}(s)\leqq 1$なる範囲における零点は容易には分からない。この範囲にある零点のことを非自明な零点とよぶ。

リーマン予想　$\zeta(s)$の非自明な零点ρは$\mathrm{Re}(\rho)=\dfrac{1}{2}$を満たすであろう。

素数を研究するのに解析学が有効であることを見抜いたのはガウスやオイラーであるが、リーマンはこの考えを推し進め、当時確立されたばかりの複素解析学をゼータ関数に適用し、$\zeta(s)$の非自明な零点の分布と自然数における素数の分布とが密接に関連していることを突き止めた。リーマン予想が正しければ、素数の分布に関する非常によい近似が得られることが知られている。

本稿では素数の分布に関して著しい大定理の一つであるディリクレの算術級数の定理の証明を解説する。

算術級数の定理（ディリクレ）　初項$a\,(>0)$と公差$m\,(>0)$が共に自然数でかつaとmの最大公約数$\gcd(a,\ m)$が１であるような算術級数（等差数列）の項の中には無限に素数が存在する。

本稿で紹介する証明は［5］の第６章をまとめたものである。もし、この拙稿を読んで少しでも素数に興味をもたれたなら、［5］や参考文献に挙げた本を読まれることをお勧めする。

２．ディリクレ指標

mを２以上の自然数とする。各整数αに対し、$\overline{\alpha}$なるものを形式的に対応させ、αとβのmで割ったときの余りが等しくなるときにのみ、$\overline{\alpha}=\overline{\beta}$と定める。$m$で割ったときの余りは$0,\ 1,\ 2,\cdots,\ m-1$のいずれかであるから、この操作から$\overline{0},\ \overline{1},\ \cdots,\ \overline{m-1}$という$m$個のものが定まるが、これら$m$個のもののなす集合を$\mathbb{Z}/(m)$と表す。例えば、

$$\overline{0}=\overline{m}=\overline{2m}=\overline{3m}=\cdots=\overline{-m}=\overline{-2m}=\cdots$$

といったように、各元は何通りもの表示を持つことに注意してほしい。$\mathbb{Z}/(m)$の任意の二つの元$\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$に対し、

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta},\qquad \overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}$$

（ここで$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$は整数における加法と乗法を表す）とおくことにより、$\mathbb{Z}/(m)$には加法と乗法が自然に定義される。$\mathbb{Z}/(m)$の元$\overline{\alpha}$に対し、ある$\overline{\beta}$という元で$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\overline{1}$を満たすものが存在するとき、$\overline{\alpha}$を可逆元とよぶ。可逆元全体のなす部分集合を$G(m)$と表す。$G(m)$は乗法に関して$\overline{1}$を単位元とするアーベル群になる。$\overline{\alpha}$が$G(m)$に属するための必要十分条件は$\gcd(\alpha,\ m)=1$であることが知られている。$G(m)$の元の個数を$\varphi(m)$と表す。また$\mathbb{C}^{\times}=\{s\in\mathbb{C}\mid s\neq 0\}$とおくと、$\mathbb{C}^{\times}$も乗法に関して１を単位元とするアーベル群になる。

定義　写像

$$\chi: G(m)\longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

が$G(m)$の任意の元$\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$に対し、

$$\chi(\overline{\alpha}\,\overline{\beta})=\chi(\overline{\alpha})\chi(\overline{\beta})$$

を満たすとき、χをmを法とするディリクレ指標とよぶ。

mを法とするディリクレ指標全体のなす集合を$\widehat{G(m)}$と表す。$\widehat{G(m)}$の任意の二つの元$\chi_1,\ \chi_2$に対し、

$$\chi_1\chi_2: G(m)\longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

を$(\chi_1\chi_2)(\overline{\alpha})=\chi_1(\overline{\alpha})\chi_2(\overline{\alpha})$で定める。この積に関して$\widehat{G(m)}$は$\varepsilon$（任意の$\overline{\alpha}$に対し、$\varepsilon(\overline{\alpha})=1$となる指標で、単位指標とよばれる）を単位元とするアーベル群になる。$\widehat{G(m)}$を$G(m)$の指標群とよぶ。

命題１（指標の直交性）　$\widehat{G(m)}$の任意の元χに対し、

$$\sum_{\overline{\alpha}\in G(m)}\chi(\overline{\alpha})=\begin{cases}\varphi(m) & \text{if } \chi=\varepsilon\\ 0 & \text{if } \chi\neq\varepsilon\end{cases}$$

が成立する。

証明　$\chi\neq\varepsilon$ならば$\chi(\overline{\beta})\neq 1$を満たすある元$\overline{\beta}$が存在する。このとき

$$\chi(\overline{\beta}) \sum_{\overline{\alpha} \in G(m)} \chi(\overline{\alpha}) = \sum_{\overline{\alpha} \in G(m)} \chi(\overline{\beta}\,\overline{\alpha}) = \sum_{\overline{\alpha} \in G(m)} \chi(\overline{\alpha})$$

であるから、$(\chi(\overline{\beta})-1)\sum \chi(\overline{\alpha}) = 0$ となる。ここで $\chi(\overline{\beta})-1 \neq 0$ だから、$\sum \chi(\overline{\alpha}) = 0$ である。 □

$G(m)$ と $\widehat{G(m)}$ の役割を入れ替えた命題も成立する:

命題 2　$G(m)$ の任意の元 $\overline{\alpha}$ に対し、

$$\sum_{\chi \in \widehat{G(m)}} \chi(\overline{\alpha}) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{if } \overline{\alpha} = \overline{1} \\ 0 & \text{if } \overline{\alpha} \neq \overline{1} \end{cases}$$

が成立する。

3．ゼータ関数

各自然数 n に対し、$\xi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ と定義すると、$\xi_n(s)$ は全 s 平面で正則となる。

補題 3　$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(s)$ は $D_1 = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ で広義一様絶対収束する。したがって、$\xi(s)$ は D_1 で正則となる。

証明　$\sigma = \mathrm{Re}(s)$ とおく。明らかに

$$|\xi_n(s)| \leqq \sup_{n \leqq t \leqq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right|$$

が成立する。更に

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right| &= |e^{-s\log n} - e^{-s\log t}| \\ &= \left| s \int_{\log n}^{\log t} e^{-sx} dx \right| \leqq |s| \int_{\log n}^{\log t} |e^{-sx}| dx \\ &= |s| \int_{\log n}^{\log t} e^{-\sigma x} dx \\ &= \begin{cases} \dfrac{|s|}{\sigma} \left(\dfrac{1}{n^\sigma} - \dfrac{1}{t^\sigma} \right) & \text{if } \sigma \neq 0 \\ |s|(\log t - \log n) & \text{if } \sigma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成立する。いま $\sigma \neq 0$ とし、$h(t) = \frac{|s|}{\sigma} \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{t^\sigma} \right)$ とおく。$h'(t) = |s| t^{-(\sigma+1)}, h''(t) = -|s|(\sigma+1)t^{-(\sigma+2)}$ だから、$\sigma+1 \geqq 0$ ならば $y = h(t)$ は $n \leqq t \leqq n+1$ で単調増加でかつ上に凸となる。$y = h(t)$ の $t = n$ における接線の方程式を $y = l(t)$ とおくと、$l(t) = \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}(t-n)$ である。したがって、

$$\sup_{n \leqq t \leqq n+1} h(t) = h(n+1) \leqq l(n+1) = \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

が成立する。まとめると、$\sigma \neq 0$ かつ $\sigma + 1 \geqq 0$ ならば

$$|\xi_n(s)| \leqq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

が示せた。$\log(1+x) \leqq x$ となることから、$\sigma = 0$ のときもこの不等式は成立する。実数 δ に対し、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta}$ は $\delta > 1$ のときにのみ収束するということから、主張が成立する。 □

定理 4　$\mathrm{Re}(s) > 1$ において

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \xi(s)$$

が成立する。すなわち、右辺は $\zeta(s)$ の $s = 1$ でのみ 1 位の極をもつ D_1 への解析接続を与えている（§1で述べたように $\zeta(s)$ は全 s 平面に $s = 1$ でのみ極をもつように解析接続されるのであるが、算術級数の定理の証明にはこれで十分である)。

証明　$\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt$$

が成立する。ゆえに

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \zeta(s) + 0 \\ &= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \right) \\ &= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \\ &= \frac{1}{s-1} + \xi(s) \end{aligned}$$

となる。 □

s を実数に制限し、$f(s), g(s)$ を s の関数とする。実定数 a に対し、

$$\lim_{s \to a} \frac{f(s)}{g(s)} = 1$$

が成立するとき、$f(s) \sim g(s)\ (s \to a)$ と表す。

定理 5　s を実数に制限する。このとき、次が成立する:

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1} \quad (s \to 1+0)$$

証明　$s > 1$ に対し、

$$\log\zeta(s) = \log\left(\prod_{p\in P}\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum_{p\in P}\log\frac{1}{1-p^{-s}}$$

が成立する。$-1 < x < 1$ に対し、

$$\log\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

であるから、

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in P,\ k\geqq 1}\frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{p\in P}\frac{1}{p^s} + \sum_{p\in P,\ k\geqq 2}\frac{1}{kp^{ks}}$$

が成立する。いま

$$\psi(s) = \sum_{p\in P,\ k\geqq 2}\frac{1}{kp^{ks}}$$

とおく。$s \geqq 1$ に対し、

$$\psi(s) \leqq \sum_{p\in P}\left(\sum_{k\geqq 2}\frac{1}{(p^s)^k}\right) = \sum_{p\in P}\frac{1}{p^s(p^s-1)}$$
$$\leqq \sum_{p\in P}\frac{1}{p(p-1)} \leqq \sum_{n\geqq 2}\frac{1}{n(n-1)} = 1$$

が成立する。よって、$\psi(s)$は $s \geqq 1$ で有界となる。このことと、$\lim_{s\to 1+0}\zeta(s) = \infty$ で、$\log\zeta(s) = \sum_{p\in P}\frac{1}{p^s} + \psi(s)$ であるから、

$$\lim_{s\to 1+0}\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s} = \infty$$

となる。また、ロピタルの定理と定理 4 により、

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{\log\zeta(s)}{\log\frac{1}{s-1}} = \lim_{s\to 1+0}\frac{\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}}{(s-1)\{-(s-1)^{-2}\}}$$
$$= \lim_{s\to 1+0}\frac{1-(s-1)^2\xi'(s)}{1+(s-1)\xi(s)} = 1$$

となる。よって、

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s}}{\log\frac{1}{s-1}} = \lim_{s\to 1+0}\frac{\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s}}{\log\zeta(s)}\cdot\frac{\log\zeta(s)}{\log\frac{1}{s-1}}$$

で

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s}}{\log\zeta(s)} = \lim_{s\to 1+0}\frac{1}{1+\frac{\psi(s)}{\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s}}} = 1$$

となるから、主張が成立する。 □

4．L関数

複素数列 $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,\cdots}$ に対し、ディリクレ級数とよばれる

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

が考えられる。ディリクレ級数に関して次の定理は基本的である。

定理 6　$f(s)$ が $s = s_0$ において収束すれば、$f(s)$ は $E = \{s \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\}$ で広義一様収束する。したがって、$f(s)$ は E で正則となる。

証明　変数を s から $s - s_0$に取り換えて、新しい変数を改めて s とおくことにより、$s_0 = 0$ の場合に示せば十分であることが分かる。$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$となる任意の実数 α に対し、

$$C_\alpha = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C}\,|\,r \geqq 0,\ \ |\theta| \leqq \alpha\}$$

とおく。$f(s)$ が C_α で一様収束することを示せばよい。$\cos\alpha = \frac{1}{u}$ $(u \geqq 1)$ で u を定める。$s = re^{i\theta}\,(\neq 0)$ のとき $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(s)}{|s|}$ だから、

$$C_\alpha = \{s \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(s) > 0,\ \ \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)} \leqq u\} \cup \{0\}$$

となる。$k \leqq l$ を満たす任意の自然数 k, l に対し、

$$A_{k,\,l} = \sum_{n=k}^{l} a_n, \qquad S_{k,\,l}(s) = \sum_{n=k}^{l}\frac{a_n}{n^s}$$

とおく。

いま任意に正の実数 ϵ をとる。仮定より $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するから、ある自然数 N で次の条件を満たすものが存在する：

任意の自然数 k, l に対し、

$$l \geqq k \geqq N \Longrightarrow |A_{k,\,l}| \leqq \frac{\epsilon}{1+u}$$

他方、$a_n = A_{k,\,n} - A_{k,\,n-1}$ $(n > k)$, $a_k = A_{k,\,k}$ だから、

$$S_{k,\,l}(s) = \sum_{n=k}^{l}\frac{a_n}{n^s}$$
$$= A_{k,\,k}\frac{1}{k^s} + (A_{k,\,k+1} - A_{k,\,k})\frac{1}{(k+1)^s} +$$
$$\cdots + (A_{k,\,l} - A_{k,\,l-1})\frac{1}{l^s}$$

$$= A_{k,\,k}\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{(k+1)^s}\right)+$$

$$\cdots + A_{k,\,l-1}\left(\frac{1}{(l-1)^s}-\frac{1}{l^s}\right)+A_{k,\,l}\frac{1}{l^s}$$

$$=\sum_{n=k}^{l-1} A_{k,\,n}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)+A_{k,\,l}\frac{1}{l^s}$$

となる。また、補題3の証明と同じ議論により、$s \neq 0$ かつ $s \in C_\alpha$ ならば

$$\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right| \leqq \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\left(\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}-\frac{1}{(n+1)^{\mathrm{Re}(s)}}\right)$$

$$\leqq u\left(\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}-\frac{1}{(n+1)^{\mathrm{Re}(s)}}\right)$$

が成立する。よって、C_α の任意の元 s に対し、$l \geqq k \geqq N$ ならば

$$|S_{k,\,l}(s)| \leqq \frac{\epsilon}{1+u}\left\{u\left(\frac{1}{k^{\mathrm{Re}(s)}}-\frac{1}{l^{\mathrm{Re}(s)}}\right)+\frac{1}{l^{\mathrm{Re}(s)}}\right\}$$

$$\leqq \frac{\epsilon}{1+u}(1+u)=\epsilon$$

となる。したがって、$f(s)$ は C_α で一様収束する。 □

命題7 もしもある正の実定数 M があり、$k \leqq l$ を満たす任意の自然数 k, l に対し、$|\sum_{n=k}^{l} a_n| < M$ が成立するならば $\mathrm{Re}(s) > 0$ の範囲で $f(s)$ は収束し、$f(s)$ はここで正則となる。

証明 定理6により、任意の正の実数 s に対し $f(s)$ が収束することを示せばよい。$S_k(s)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{n^s}$ とおき、$\{S_k(s)\}_{k=1,\,2,\,\ldots}$ がコーシー列になることを示す。定理6の証明で定義した $A_{k,\,l}$ と $S_{k,\,l}(s)$ を用いる。このとき、

$$|S_{k,\,l}(s)|$$

$$\leqq \sum_{n=k}^{l-1}|A_{k,\,n}|\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right|+|A_{k,\,l}|\left|\frac{1}{l^s}\right|$$

$$\leqq M\left(\sum_{n=k}^{l-1}\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right|+\left|\frac{1}{l^s}\right|\right)$$

が成立する。$s>0$ だから

$$\left|\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right|=\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}$$

となる。したがって、

$$|S_{k,\,l}(s)| \leqq M\frac{1}{k^s}$$

となり、$k \leqq l$ で $k,\ l \to \infty$ とすれば $S_{k,\,l}(s) \to 0$ となる。よって、$\{S_k(s)\}_{k=1,\,2,\,\ldots}$ はコーシー列となる。 □

$\chi \in \widehat{G(m)}$ に対し、

$$L(s,\ \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(\overline{n})}{n^s}$$

とおき、$L(s, \chi)$ を χ に対するディィリクレの L 関数とよぶ。ここで $\overline{n} \notin G(m)$ のときは $\chi(\overline{n})=0$ とする。命題1から、もし $\chi \neq \varepsilon$ なら、$\{\chi(\overline{n})\}_{n=1,\,2,\,\ldots}$ は命題7の条件を満たす。したがって、$\chi \neq \varepsilon$ に対し、$L(s, \chi)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で正則となる。また、χ の準同型性から $\mathrm{Re}(s)>1$ において、$L(s, \chi)$ は

$$\prod_{p\in P}(1-\chi(\overline{p})p^{-s})^{-1}=\prod_{p\in P,\ p\nmid m}(1-\chi(\overline{p})p^{-s})^{-1}$$

というオイラー積表示をもつ。また、

$$L(s,\ \varepsilon)=\left(\prod_{p\in P,\ p|m}(1-p^{-s})\right)\zeta(s)$$

だから、$L(s, \varepsilon)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ へ $s=1$ でのみ1位の極をもつように解析接続される。

定理8 $\chi \neq \varepsilon$ のとき、$L(1,\ \chi) \neq 0$ である。

証明 $\zeta_m(s)=\prod_{\chi\in\widehat{G(m)}}L(s,\ \chi)$ とおく。$\chi \neq \varepsilon$ かつ $L(1, \chi)=0$ となる χ が存在したとして矛盾を導く。この仮定から $L(s, \varepsilon)$ の $s=1$ における1位の極が打ち消されるので、$\zeta_m(s)$ は $s=1$ において正則となる。したがって、$\zeta_m(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ において正則となる。$\mathrm{Re}(s)>1$ において次が成立する：

$$\zeta_m(s)=\prod_{\chi\in\widehat{G(m)}}\ \prod_{p\in P,\ p\nmid m}(1-\chi(\overline{p})p^{-s})^{-1}$$

$$=\prod_{p\in P,\ p\nmid m}\left(\prod_{\chi\in\widehat{G(m)}}(1-\chi(\overline{p})p^{-s})^{-1}\right)$$

$$=\prod_{p\in P,\ p\nmid m}(1-p^{-f(\overline{p})s})^{-g(\overline{p})}$$

$$=\prod_{p\in P,\ p\nmid m}(1+p^{-f(\overline{p})s}+p^{-2f(\overline{p})s}+\cdots)^{g(\overline{p})}$$

ここで、$f(\overline{p})$ は $\overline{p}\,(\in G(m))$ の位数を表し、$g(\overline{p})=\varphi(m)/f(\overline{p})$ とおく（三番目の等式の説明：W を $\mathbb{C}$ における1の $f(\overline{p})$ 乗根全体のなす集合とする。$\prod_{w\in W}(1-wT)=1-T^{f(\overline{p})}$ が成立する。$\chi(\overline{p})\in W$ で、W の任意の元 w に対し、$\chi(\overline{p})=w$ となる χ が $g(\overline{p})$ 個あるから等式が成立する）。最後の無限積を展開して、ディィリクレ級数の形に整理したものを $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ とお

く。明らかに、a_n は整数で$a_n \geqq 0$ である。このとき、

$$(1+p^{-f(\overline{p})s}+p^{-2f(\overline{p})s}+\cdots)^{g(\overline{p})}$$

を展開すると、$1,\ p^{-\varphi(m)s},\ p^{-2\varphi(m)s},\ \cdots$がそれぞれ一回以上現れるので、ある自然数で m との最大公約数が 1 となるものの $\varphi(m)$ 乗になっている n に対し、$a_n \geqq 1$ が成立する。このことから発散する場合も込めて、任意の実数 t に対し、次の不等式が成立する：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^t} \geqq \sum_{n\,\geqq\,1,\ \gcd(n,\ m)=1}\frac{1}{n^{\varphi(m)t}} = \left(\prod_{p\in P,\ p|m}(1-p^{-\varphi(m)t})\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\varphi(m)t}}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\ (=\zeta_m(s))$ は Re$(s)>1$ で収束し、Re$(s)>0$ へ正則に解析接続されることから、Re$(s)>0$ で収束することが示される（[5] の第 6 章、命題 7 が必要となる）。上の不等式で $t=1/\varphi(m)$ とすると、第一式は有限の値になるが、第三式は∞となるので矛盾が導かれた。 □

5. 密　度

この節では s を実数に制限する。素数全体のなす集合 P の任意の空でない部分集合 A に対し、

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{\displaystyle\sum_{p\in A}\frac{1}{p^s}}{\log\dfrac{1}{s-1}}$$

は存在し、それを k とおくと、定理 5 から $0 \leqq k \leqq 1$ を満たすことが分かる。このとき、A の密度は k であるという。P の密度は 1 である。また、$\displaystyle\lim_{s\to 1+0}\log\frac{1}{s-1} = \infty$だから、$A$ が有限集合ならば、A の密度は 0 である。

$\chi\in\widehat{G(m)}$ に対し、

$$f_\chi(s)=\sum_{p\in P}\frac{\chi(\overline{p})}{p^s}$$

とおく。$s>1$ のとき$f_\chi(s)$は絶対収束する。

命題 9　$\chi=\varepsilon$ ならば、

$$f_\chi(s)\sim\log\frac{1}{s-1}\quad(s\to 1+0)$$

が成立する。

証明　$f_\varepsilon(s)$ と $\displaystyle\sum_{p\in P}p^{-s}$ は有限個の項しか違わないので、定理 5 により、主張が成立する。 □

命題10　$\chi\neq\varepsilon$ ならば、$s\to 1+0$ のとき $f_\chi(s)$ は有界となる。

証明　$|\alpha|<1$となる複素数 α に対し、$\log\dfrac{1}{1-\alpha}$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}$ で定義する。定理 5 の証明と同様の議論により

$$\log L(s,\ \chi)=f_\chi(s)+\psi_\chi(s),\quad \psi_\chi(s)=\sum_{p\in P,\ k\,\geqq\,2}\frac{\chi(\overline{p})}{kp^{ks}}$$

が成立する。$|\chi(\overline{p})|\leqq 1$だから、$\psi(s)$と同様に $\psi_\chi(s)$ も $s\geqq 1$ で有界となる。また、定理 8 の $L(1,\ \chi)\neq 0$ により、$s\to 1+0$ のとき $\log L(s,\ \chi)$ も有界となる。ゆえに主張が成立する。 □

$\gcd(a,\ m)=1$ となる自然数 a に対し、

$$P_a=\{\,p\in P\,|\,p-a\text{ は }m\text{ の倍数}\,\}$$

とし、

$$g_a(s)=\sum_{p\in P_a}\frac{1}{p^s}$$

とおく。

命題11　次の等式が成立する：

$$g_a(s)=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi\in\widehat{G(m)}}\chi(\overline{a})^{-1}f_\chi(s)$$

証明　まず次の等式が成立する：

$$\sum_{\chi}\chi(\overline{a})^{-1}f_\chi(s)=\sum_{p\in P}\frac{\displaystyle\sum_{\chi}\chi(\overline{a})^{-1}\chi(\overline{p})}{p^s} = \sum_{p\in P}\frac{\displaystyle\sum_{\chi}\chi(\overline{a}^{-1}\overline{p})}{p^s}$$

命題 2 により

$$\sum_{\chi}\chi(\overline{a}^{-1}\overline{p})=\begin{cases}\varphi(m) & \text{if } \overline{a}=\overline{p}\Leftrightarrow p\in P_a\\ 0 & \text{if } \overline{a}\neq\overline{p}\Leftrightarrow p\notin P_a\end{cases}$$

が成立する。これらを組み合わせて主張を得る。 □

定理12　P_a の密度は$\dfrac{1}{\varphi(m)}$ である。

証明　命題11より

$$\frac{g_a(s)}{\log\dfrac{1}{s-1}} = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi}\chi(\overline{a})^{-1}\frac{f_\chi(s)}{\log\dfrac{1}{s-1}}$$

が成立する。命題 9, 10により

$$\lim_{s\to 1+0}\frac{f_\chi(s)}{\log\dfrac{1}{s-1}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi = \varepsilon \\ 0 & \text{if } \chi \neq \varepsilon \end{cases}$$

が成立する。これらを組み合わせて主張を得る。 □

密度が正なので、P_a は無限集合となる。P_a の元 p で $p \geqq a$ となるものが算術級数に現れるから、算術級数の定理が示せたことになる。

参考文献

[1] 藤崎源二郎、森田康夫、山本芳彦、「数論への出発」、日本評論社、1980

[2] 笠原乾吉、「複素解析－1 変数解析関数」、実教出版、1978

[3] 松本耕二、「リーマンのゼータ関数」、朝倉書店、2005

[4] W. ナルキェヴィッチ（中島眞澄 訳)、「素数定理の進展 上」、シュプリンガー・ジャパン、2008

[5] J.-P. セール（彌永健一 訳)、「数論講義」、岩波書店、1979