論　文

KANNAI 位相と選好の近似定理[1)]

長　久　領　壱

要約：ある種の制約を満たす選好の集合を考え，それを距離空間化する手続きは Kannai(1970) によって経済学に導入された。この Kannai 位相のもとで，与えられた選好を，形の良い他の選好によって近似する試みを行ったのは Kannai (1974) 及び Mas-Colell (1974) である。本稿の目的は Kannai 位相とそのもとでの選好の近似定理を，私なりに再構成し解説することにある。特に近似定理に関しては Kannai らの結果を改良すべく別証を与えたい。

1　序　論

選好が連続的に変化するときに，均衡配分集合が同じく連続的に変化するかどうかという，いわゆるワルラス反応の連続性は1960年以降の一般均衡分析における一つの中心的な問題であった。この質問に答えるためには，当然のことながら「選好の連続的変化」に関する明確な定義が必要である。数学的には，これは選好の集合に適切な位相を与え，位相空間化することに他ならない。

Kannai(1970) は有限次元ユークリッド空間の非負象限上で定義された連

1) 本稿は平成 8 年度関西大学経済学部共同研究（戒田郁夫，長久領壱，橋本恭之）での成果の一つである。財政援助くださった同学部に対し，この場を借りて厚くお礼申し上げる次第である。

続かつ単調な選好全ての集合を考え，これに位相を課す方法を編み出した。以下述べるように，このKannai位相は四つの大変便利な性質を持っている。

第1にKannai位相は距離空間になる。このことによって，我々は選好の類似性を距離関数によって表現することが可能になる。

第2にKannai位相で与えられる選好の類似度は，我々の経済学的直感をよく反映している。これがKannai位相を支持する最も強力な理由である。重要な点なのでやや詳しく解説しよう。例えば飲み物に関する嗜好を考える。桃子はブラックコーヒー1杯よりそれに砂糖20グラムを入れた方が好きであったと想定しよう。一方で，桃子に大変近い選好を持つ人が全て，砂糖1グラム入れたコーヒー1杯の方を19グラム入れたの1杯より好きとしたら，これは変である。その理由はこうだ。飲み物として，砂糖20グラム入れたコーヒーと19グラム入れたのは大変似ている。同様にブラックコーヒーとそれに砂糖1グラム入れたコーヒーも似ている。量も同じ1杯であるから，ほぼ同じ消費と見てよい。すると最初の想定に従う限り，桃子は19グラム入れたコーヒーを1グラム入れたのより好んでいるといわざるを得ない。であるのに桃子と非常に似た選好を持つ人が全て，桃子と逆の選好を持つのは論理的に考えておかしいからである。

従って桃子がブラックコーヒー1杯よりそれに砂糖20グラムを入れた方が好きである以上，桃子に大変近い選好を持つ人で，砂糖1グラム入れたコーヒーより砂糖19グラム入れた方が好きな者が少なくとも1人存在しなければならない。そしてKannai位相はこのことを保証するのだ。「コーヒーに関しては，あの人は桃子と非常によく似た好みを持っている」と我々が口にするときには，上に述べたことを漫然とではあるが想定しているのである。Kannai位相が定める選好の類似度はこの我々の「類似している」という感覚に矛盾しない。

第3に，Kannai位相のもとでは，与えられた選好を形の良い他の選好によって近似することが可能となる(Kannai (1974)，Mas-Colell (1974))。任意

の連続かつ凸な選好にKannai位相の意味で収束していく選好の列で，その各々の選好が厳密に凸で，かつ無限回連続微分可能な効用関数によって代表されるものが存在する。

第4に，Kannai位相よりも大きな選好集合を台として定義された位相に閉収束位相(Hildenbarnd(1974))があるが，連続かつ凸な選好全ての集合上で閉収束位相はKannai位相と一致する。

本稿の目的はKannai位相に関する上記4点のうち第1から第3までを，厳密な証明を付して解説することにある[2)]。従って本稿はpath-breakingな論文ではなく，期待されるべき役割はせいぜいサーヴェイのそれである。しかし選好の近似定理に関しては別証を与えておいた。あとで述べるが，この別証により，Kannai (1974)やMas-Colell (1974)の近似定理を改良することができる。この改良された近似定理は，もとはといえば，ワルラス対応の連続性の研究のために用意されたものである(Nagahisa (1997))。

定理の証明は懇切丁寧を第一に心がけた。数理経済学的な素養をお持ちの読者であれば，おそらく鉛筆をとる必要もなく読み進めるであろう。本稿が読者諸氏の研究資料として活用されることを願う次第である。

数学記号上の約束：頻繁に登場する数学概念とその記号法を以下一覧しておく。集合Xを所与とする。X上の二項関係を$\succsim$とし，$(x, y)\in\succsim$を$x\succsim y$と書く。その対称成分と非対称成分をそれぞれ$\sim$，$\succ$で記号する。$x\sim y\leftrightarrow(x, y)\in\succsim\&(y, x)\in\succsim$，$x\succ y\leftrightarrow(x, y)\in\succsim\&(y, x)\not\in\succsim$である。便宜上$x\prec y$も定義しておく。これは$(x, y)\not\in\succsim\&(y, x)\in\succsim$のことである。任意の$x, y, z\in X$に関して，$x\succsim y$かつ$y\succsim z$ならば$x\succsim z$となるとき，$\succsim$は推移的であるという。$\succsim$が完全であるとは，任意の$x, y\in X$に関して，$x\succsim y$または$y\succsim x$が成り立つときをいう。$\succsim$が推移的かつ完全であるならば$\succsim$は順序

2) 第1点は定理2，第2点は定理1，第3点は定理3がそれに該当する。閉収束位相に関しては山崎(1987)及びHildenbrand(1974)に解説がある。

であるという。

X は位相空間とする。X の部分集合 A の閉包と内部を clA, intA と記号する。近傍はすべて開近傍であるとする。$\succsim(x):=\{y\in X: y\succsim x\}$, $\precsim(x):=\{y\in x: y\precsim x\}$, $\sim(x):=\{y\in X: y\sim x\}$, $\succ(x):=\{y\in X: y\succ x\}$, $\prec(x):=\{y\in X: y\prec x\}$ であるとする。二項関係$\succsim$が連続であるとは任意の $x\in X$ に対して集合$\succsim(x)$と$\precsim(x)$が閉集合であるときをいう。

X が n 次元の線形空間であるとする。任意の x, $y\in X$ に関して $x\geq y$ はすべての $i=1, 2, .., n$ に関して $x_i\geq y_i$, $x>y$ は $x\geq y \& x\neq y$, そして $x>>y$ はすべての $i=1, 2, ..., n$ に関して $x_i>y_i$を表すとする。二項関係$\succsim$が単調であるとは，任意の x, $y\in X$ に関して，$x>y$ ならば $x\succ y$ となるときをいう。X が更に凸集合でもあるとする。二項関係$\succsim$が凸であるとは任意の $t\in(0, 1)$ と任意の x, $y\in X$ に関して，$x\succ y$ ならば $tx+(1-t)y\succ y$ となるときをいう。$\succsim$が強く凸であるとは任意の $t\in(0, 1)$ と任意の x, $y\in X$ に関して，$x\succsim y$ ならば $tx+(1-t)y\succ y$ となることである。

2　KANNAI 位相

$m(\geq 1)$個の私的財が存在し，消費集合をm次元ユークリッド空間の非負象限 R^m_+ としよう。以下 $\Omega=R^m_+$ とおく。$\Omega\times\Omega$ 上での二項関係$\succsim$を選好と呼び，連続な順序であるとする。P を連続な順序から構成されるある非空な集合[3]とする。Ω 上で中心が有理点で半径が有理数である閉球を有理球と呼ぶ[4]。便宜上空集合も有理球であると約束する。有理球全体からなる集合は可算だから，これを一列に並べて列 $\{S_i\}$ を作ることができる。いま P の部分集合 P_{ij} を $P_{ij}=\{\succsim\in P: x\succ y \text{ for all } x\in S_i \text{ and all } y\in S_j\}$ と定義する。明らかに $P_{ij}\neq\emptyset\rightarrow S_i\cap S_i=\emptyset$である。

P_{ij}を全て集めてできる集合を $\{P_{ij}\}$ とする。すると位相空間論での周知の

3) 必ずしも P を連続な順序全てからなる集合とする必要はない。

4) 正確にはR^mでの有理球のΩ（ただし中心はR^m_+上）への制限がここで定義された有理球である。

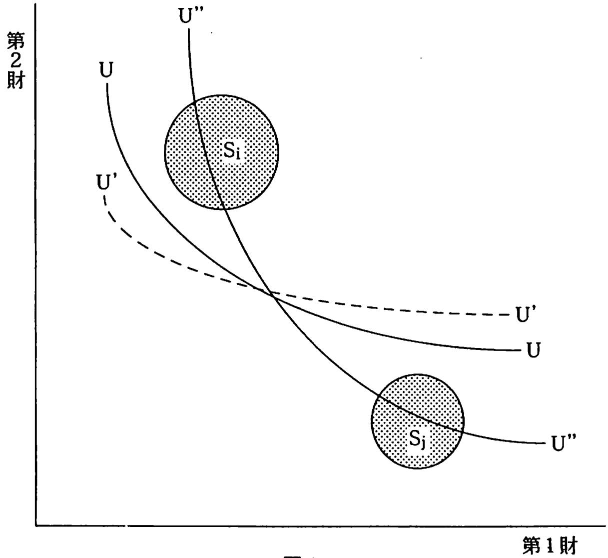

図1

事実から，$\{P_{ij}\}$を部分基底(subbase)とする位相が構成できる（森田 p47-48を参照）。この位相がKannai位相である。

図1はm＝2のケースでKannai位相を例解している。S_iとS_jはS_{ij}を定義する閉球である。Kannai位相の定義より，P_{ij}自身一つの開集合である。選好$\succsim$の一つの無差別曲線をとり，図のUUとすると，$\succsim \in P_{ij}$であり，P_{ij}は$\succsim$の一つの近傍である。同じく選好$\succsim'$の一つの無差別曲線をとり，図のU'U'とすると，$\succsim' \in P_{ij}$であるから，P_{ij}は$\succsim'$の近傍でもある。しかし選好$\succsim''$の無差別曲線U"U"はS_iとS_jに交差しており，$\succsim'' \notin P_{ij}$である。つまりP_{ij}は$\succsim''$の近傍とはなり得ない。

Kannai位相は二つの選好が大域的にどれだけ類似しているのかを表す尺度になる。図1では選好$\succsim'$の方が$\succsim''$よりも$\succsim$に似ていることになる。なぜなら$\succsim'$は$\succsim$の近傍P_{ij}内にあるのに$\succsim''$はそこから外れているからである。しかし図1ではまだ視覚的には「選好$\succsim'$の方が$\succsim''$よりも$\succsim$に似ている」とは捉えにくい。これは近傍P_{ij}が大きすぎるためである。Kannai位相の定義に従え

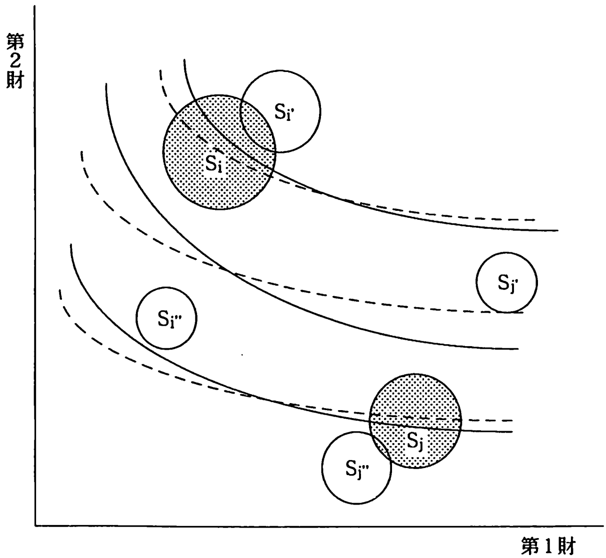

図2：実線が$\succsim$の無差別曲線群，破線が$\succsim'$の無差別曲線群である。有理球 S_i と S_j が定義する部分基底の元を P_{ij}，同じく $P_{i'j'}$，$P_{i''j''}$ は，各々有理球 $S_{i'}$ と $S_{j'}$，及び有理球 $S_{j'}$ と $S_{j'}$ が定義する部分基底の元である。明らかに$\succsim' \in P_{ij} \cap P_{i'j'} \cap P_{i''j''}$である。

ば$\succsim \in P_{ij}$となる有限個の P_{ij} を考えるとその共通部分$\cap P_{ij}$も$\succsim$の近傍となる。このような P_{ij} の個数は無限に増やしていくことができるから，$\succsim$の近傍$\cap P_{ij}$も次第に小さくなっていく。この近傍が小さければ小さいほどそれに属す選好（例えば図2での$\succsim'$）は$\succsim$にますます類似しているということになる。これなら視覚的にも首肯できるだろう。

さて Kannai 位相の持つ第1の性質として：

定理1 Kannai 位相は集合 $A = \{(x, y, \succsim) \in \Omega \times \Omega \times P : x > y\}$ を積位相 $\Omega \times \Omega \times P$ において開にする P 上での最小の(coarst)位相である。

証明：まず P に Kannai 位相を課すとき，集合 A が積位相 $\Omega \times \Omega \times P$ において開集合になることを示そう。$(x, y, \succsim) \in A$ とする。積位相の定義により，x，y，$\succsim$の近傍 $G(x)$，$G(y)$，$G(\succsim)$で，$G(x) \times G(y) \times G(\succsim) \subset A$ となるも

のが存在することをいえばよい。

$x \succ y$ だから，$\succsim$ の連続性により，明らかに x を含む有理球 S_i と y を含む有理球 S_j で $x \succ y$ for all $x \in S_i$ and all $y \in S_j$ となるものが存在する。つまり $\succsim \in P_{ij}$ である。P_{ij} 自身 $\succsim$ の近傍の一つだから，$G(x) = \mathrm{int}S_i$，$G(y) = \mathrm{int}S_j$，$G(\succsim) = P_{ij}$ とおけば所望の結果を得る。

次に位相の最小性を示す。T は A を積位相 $\Omega \times \Omega \times P$ において開集合にする P 上の位相であるとする。$P_{ij} \in T$ を示せば十分である。$\succsim^0 \in P_{ij}$ をとる。$\succsim^0 \in V \subset P_{ij}$ となる $V \in T$ がとれることをいえばよい。S_i と S_j は P_{ij} を定義する有理球であるとしよう。A の定義より，$S_i \times S_j \times \{\succsim^0\} \subset A$ である。また S_i, S_j, $\{\succsim^0\}$ は各々 Ω, Ω, P でのコンパクト集合[5)]である。そこで Wallace の定理（森田 p173）を適用して，開集合 U_i，U_j，$V \in T$ s. t. $S_i \subset U_i$，$S_j \subset U_j$，$\succsim^0 \in V$，$U_i \times U_j \times V \subset A$ が存在する。A の定義に従えば，これは任意の $\succsim \in V$ について，$x \succ y$ for all $x \in U_i$ and all $y \in U_j$ を意味する。つまり，$x \succ y$ for all $x \in S_i$ and all $y \in S_j$ をうる。これは $\succsim \in P_{ij}$ に他ならず，$V \subset P_{ij}$ となって，所望の結果を得る。□

定理 1 が Kannai 位相の性質で最も重要である。この定理により，前節で説明したように，Kannai 位相が選好の類似度に関する我々の感覚をよく表現していることがわかる。なぜなら定理 1 での最初の主張（集合 A を積位相 $\Omega \times \Omega \times P$ において開にする）は，$x \succ y$ ならば，x, y, 及び $\succsim$ に十分近い x', y', $\succsim$'に関しても，x'$\succ$'y'となることを保証しているからである。

しかし単に集合 A を積位相 $\Omega \times \Omega \times P$ において開にするというだけなら，様々な位相が P 上で構成可能である。例えば離散位相がその例である[6)]。ただし離散位相ではあらゆる集合が開集合になり，理論の体系として無意味なも

5) 一点からなる集合は，コンパクトの定義より，いかなる位相空間のもとでもコンパクトになる。故に $\{\succsim\}$ は位相 T のもとでコンパクトである。

6) 離散位相はあらゆる位相の中で最大(finest)である。

のになってしまうが。ここで，定理1の第2番目の主張「Kannai位相は集合Aを積位相$\Omega\times\Omega\times P$において開にするP上での位相として最小のもの(coarst)である」がにわかに重要になってくる。なぜなら与えられた位相のもとで命題「Aは開集合である」を証明するには，その位相よりの小さい位相で「Aは開集合である」ことが示されれば十分だからである。その意味で，選好集合上にKannai位相を課しておきさえすれば，他の（定理1の性質を持つという意味で）有意味な位相に関しても同時に考察したことになり，便利である。

$\{P_{ij}\}$は可算であるから，定理1で定義された位相は可算個の基底を持つ，つまり第2可算公理を満足することになる。

これから以下はPは連続かつ単調な順序全ての集合とする。各$\succsim\in P$に対して，次のような効用関数表現が存在する。各$x\in\Omega$に対し，Ωの中心対角線上の点$t(x)\in\Omega$ s. t. $t(x)\sim x$が一意に存在する。このとき$t(x)$のノルム$\|t(x)\|$をとり，求める効用関数を$u(x)=\|t(x)\|$と定義する。$x_1\succsim x_2\leftrightarrow u(x_1)\geq u(x_2)$は定義から明らかである。x自身が中心対角線上にあれば，$u(x)=\|x\|$である。uの連続性は次のようにしていえる：Ω内の点列x^vで，$x^v\to x$となるものをとる。$u(x^v)\to u(x)$をいえばよい。任意の自然数nに対し，ある番号$v(n)$が存在して，

$$(1)\quad \|x^v-x\|\leq\frac{1}{n}\text{ for all }\nu\geq\nu(n)$$

となる。閉球$B(x,\ \frac{1}{n}):=\{z\in\Omega:\|z-x\|\leq\frac{1}{n}\}$上でのuの値の上限と下限を各々$\sup\Omega(n)$，$\inf\Omega(n)$とおく。すると(1)を満たす$x^\nu$に関して，$u(x^\nu)\in[\inf\Omega(n),\ \sup\Omega(n)]$であり，かつ$u(x)\in[\inf\Omega(n),\ \sup\Omega(n)]$である。区間列$\{[\inf\Omega(n),\ \sup\Omega(n)]\}$ $(n=1,2,..,)$は狭義単調減少列[7]であり，区間縮小法により，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[\inf\Omega(n),\ \sup\Omega(n)]=u(x)$となる。これから$u(x^\nu)\to u(x)$[8]であり，所望の結果を得る。以上でuが$\succsim$の効用関数表現であることがわかった。

更に，この効用関数の持つ著しい性質として：

補題1 ある正数Cがあって，$0 \leq u(x) \leq C||x||$ for all $x \in \Omega$.

証明：yは中心対角線上にあり，所与とする。$u(x)=||y||$ なるxの中で $||x||$ が最も小さくなるのはどういう場合かを考える。仮に，$||x||<\frac{1}{m}||y||$ であれば，yが中心対角線上にあるから，(i) $x<<y$[9]であり，これは矛盾する。故に $||x|| \geq \frac{1}{m}||y||$ である。$m \leq C$ と正数Cをとると，$C||x|| \geq m||x|| \geq ||y||=u(x)$ を得る。これが任意の $x \in \Omega$ に関して成り立つから，所望の結果を得る。□

C^* をかような方法で得られる効用関数表現全ての集合とする。

補題2 次の ρ はP上で距離関数になる。

(1)　$\rho(\precsim_1, \precsim_2):=\max\left\{\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{1+||x||^2}: x \in \Omega\right\}$

ここで u_1，u_2 は各々 $\precsim_1$，$\precsim_2$ の C^* に属する効用関数表現である。

証明：まず，(1)の右辺がwell definedであることを確認しなければならない。$\precsim_1=\precsim_2$ の場合は自明である。そこで，$\precsim_1 \neq \precsim_2$ としよう。するとある x^0

7) 詳しく証明する。選好の単調性がここでは効いている。$B(x, \frac{1}{n+1}) \underset{+}{\subset} B(x, \frac{1}{n})$ であり，仮に $\sup\Omega(n)=\sup\Omega(n+1)$ であれば，$\sup\Omega(n+1)$ を与える点をyとしたとき，$y<<y^*$ s. t. $y^* \in B(x, \frac{1}{n})$ が存在し，$u(y^*)>\sup\Omega(n)$ となって矛盾する。以上で，$\sup\Omega(n)>\sup\Omega(n+1)$ がいえた。同様にして，$\inf\Omega(n)<\inf\Omega(n+1)$ もいえる。

8) 少し補足しよう。まず $u(x^{\nu})$ は有界列より，その収束部分列 $u(x^{\mu})$ が存在する。このような部分列が全て $u(x)$ に収束することをいえばよい。これは $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\inf\Omega(n), \sup\Omega(n)]=u(x)$ から明らかである。

9) 補足すれば，以下の通り：yは中心対角線上にあるから，yの各成分 $y_i(i=1,...,m)$ について，$y_i=y^*$ として，$\|y\|:=\sqrt{\Sigma_{i\in M}(y_i)^2}=\sqrt{m(y^*)^2}=y^*\sqrt{m}$。そこで，$\|x\|<\frac{1}{m}\|y\|$ であれば，$\|x\|:=\sqrt{\Sigma_{i\in M}(x_i)^2}<\frac{1}{m}y^*\sqrt{m}$，つまり(ii) $\Sigma_{i\in M}(x_i)^2<(y^*)^2$ を得る。一方(i)が成り立たないとすると，$x_i \geq y_i$ $\exists_i \in M$ であり，$(x_i)^2 \geq (y^*)^2$，故に $\Sigma_{i\in M}(x_i)^2 \geq \frac{1}{m}(y^*)^2$ ($\because m \geq 1$) となって(ii)に矛盾する。

$\in \Omega$ に関して，

(2) $\dfrac{|u_1(x^0)-u_2(x^0)|}{1+||x^0||^2}>0$

である。(2)の値を K としよう。

補題1により，$0\leq u(x)\leq C||x||$ for all $x\in\Omega$ であったから，各 $x\in\Omega$ に関して，

(3) $\dfrac{|u_1(x)-u_2(x)|}{1+||x||^2}\leq\dfrac{|u_1(x)|}{1+||x||^2}\leq\dfrac{C||x||}{1+||x||^2}\leq\dfrac{C}{1/||x||+||x||}$

(3)の一番右の項は $||x||\to\infty$ につれて，ゼロに収束していく。従って，ある実数 k があって，$\Omega_k=\{x\in\Omega:||x||>k\}$ とし，全ての $x\in\Omega_k$ に関して，

(4) $\dfrac{|u_1(x)-u_2(x)|}{1+||x||^2}<K$

とできる。そこで Ω_k を切り捨て，コンパクト集合 $\{x\in\Omega:||x||\leq k\}$ 上で $\dfrac{|u_1(x)-u_2(x)|}{1+||x||^2}$ の最大値を求めれば，この値が(1)を定義することになる。

ρ が距離の3公式を満たすことは明らかである。□

以下，補題2での ρ が定める距離空間が実は Kannai 位相であることを示したい。そのために幾つかの補題を用意する。

補題3 $\succsim^*\in P$，$\tau>0$ を所与とする。ある実数 T があって，

$$\{\succsim\in P:\rho(\succsim,\succsim^*)<\tau\}=\{\succsim\in P:\max_{|x|\leq T}\frac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2}<\tau\}$$

（u，u^* は各々 $\succsim$，$\succsim^*$ の C^* 内での効用関数表現である。）

証明：$\subset$ は自明より，$\supset$ のみを示せばよい。

明らかに，補題1より，

(1)　$\dfrac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2} \leq \dfrac{|u(x)|+|u^*(x)|}{1+||x||^2} \leq \dfrac{2C||x||}{1+||x||^2}$

これから

(2)　ある実数Tで，全ての$u \in C^*$, $||x|| \geq T$に関して，$\dfrac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2} < \tau$

がいえることを示そう。仮に(2)が成り立たないとしよう。つまり，いかなる実数Tをとっても，ある$||x|| \geq T$とある$u \in C^*$に関して，$\dfrac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2}$

$\geq \tau$が成り立つ。すると(1)より，$\tau \leq \dfrac{2C||x||}{1+||x||^2} = \dfrac{2C}{\dfrac{1}{||x||}+||x||}$となるが，この不等式の右辺の分母は$||x|| \to \infty$のとき，無限大に発散するので，これは矛盾である。故に(2)が成り立つ。⊃は(2)より直ちに従う。□

補題4 任意のコンパクト集合$K \subset \Omega$，任意の実数α，βに関して，集合$\{\succsim \in P : {}^\forall x \in K,\ \alpha < u(x) < \beta\}$はKannai位相での開集合である。（uは$\succsim$の$C^*$での効用関数表現である。）

証明：記号の簡単化のため，$A := \{\succsim \in P : {}^\forall x \in K,\ \alpha < u(x) < \beta\}$とおく。以下の(1)，(2)をまず予備的補題として証明する。

定理1より集合$A_y = \{(x, \succsim) : x \succ y\}$，$A_z = \{(x, \succsim) : z \succ x\}$は各々$\Omega \times P$の開集合である。（ここで$\Omega \times P$の位相は$\Omega$の位相とPのKannai位相の積位相である。）それ故，

(1)　$A_{y,z} = A_y \cap A_z = \{(x, \succsim) : y \prec x \prec z\}$もまた$\Omega \times P$の開集合である；がいえる。

次に，中心対角線上のy，zで，$||y|| = \alpha$，$||z|| = \beta$となるものをとる。すると全ての$u \in C^*$に関して$u(y) = \alpha$，$u(z) = \beta$である。これより

(2)　$A = \{\succsim \in P : {}^\forall x \in K,\ y \prec x \prec z\}$

である。

$\precsim \in A$ をとる。以下の三つを示せば補題3の証明を完了し得たことになる。

(3) Kannai 位相での開集合 U で；

(4) $\precsim \in U$；かつ

(5) $U \subset A$

A の定義と(2)により，$Kx\{\precsim\} \subset A_{y,z}$であり，(1)と Wallace の定理により，$\precsim$を含む(Kannai 位相での）開集合 U をとって，(6) $K \times U \subset A_{y,z}$とできる。以上で，U に関し，(3)と(4)が同時に示し得たことになる。

任意の$\precsim^* \in U$をとる。任意の $x \in K$ に関して，(6)より，$(x, \precsim^*) \in A_{y,z}$，つまり，$y <^* x <^* z$ for all $x \in K$ を得る。これと(2)により，$\precsim^* \in A$ となり，$U \subset A$ を得る。これで(5)も示せた。□

以上の補題から Kannai 位相が距離空間であることがいえる。

定理2 Kannai 位相は補題2の ρ によって定まる距離空間と一致する。

証明：まず P_{ij}がこの距離空間で開集合になることを示す。これがいえれば，Kannai 位相での任意の開集合が距離空間での開集合となる。$\precsim_0 \in P_{ij}$をとる。u_0を C^*内での$\precsim_0$の効用関数表現としよう。$u_0(x) > u_0(y)$ for all $x \in S_i$ and all $y \in S_j$となっているから，

(1)ある正数 δ s. t. $u_0(x) - u_0(y) \geq \delta$ for all $x \in S_i$ and all $y \in S_j$が存在する。

次に正数 R を，$R := \max\{1+||x||^2 : x \in S_i \cup S_j\}$ と定義する。次の関係を示す。

(2) 任意の $u \in C^*$に関して，

$$\max\{\frac{|u(x)-u_0(x)|}{1+||x||^2}: x\in\Omega\}<\frac{\delta}{2R}\rightarrow\max\{|u(x)-u_0(x)|: x\in S_i\cup S_j\}<\frac{\delta}{2}$$

(2)の証明：

$\max\ \{\frac{|u(x)-u_0(x)|}{1+||x||^2}: x\in\Omega\}<\frac{\delta}{2R}$としよう。$x\in S_i\cup S_j$に対して，これより，

$$R\frac{|u(x)-u_0(x)|}{1+||x||^2}<\frac{\delta}{2}$$

Rの定義により，$|u(x)-u_0(x)|<\frac{\delta}{2}$を得る。これが任意の$x\in S_i\cup S_j$に関して成り立つから，(2)を得る。□

$\succsim_0\in\{\succsim:\rho(\succsim, \succsim_0)<\frac{\delta}{2R}\}\subset P_{ij}$をいえば，所望の結果を得る。
任意の$\succsim\in P$ with $\rho(\succsim, \succsim_0)<\frac{\delta}{2R}$をとる。$u\in C^*$を$\succsim$の効用関数表現とし，$u(x)>u(y)$ for all $x\in S_i$ and $y\in S_j$をいえば十分である。任意の$x\in S_i$, $y\in S_j$をとる。まず(2)より，

(3)　$u_0(x)-\frac{\delta}{2}<u(x)<u_0(x)+\frac{\delta}{2}$

(4)　$u_0(y)-\frac{\delta}{2}<u(y)<u_0(y)+\frac{\delta}{2}$

よって，$u(x)>u_0(x)-\frac{\delta}{2}$ ($\because$(3))，$u_0(x)-\frac{\delta}{2}\geq u_0(y)+\frac{\delta}{2}$ ($\because$(1))，$u_0(y)+\frac{\delta}{2}>u(y)$ ($\because$(4)) を得る。この三つから$u(x)>u(y)$となって，所望の結果を得る。

$\succsim^0\in P$，$\epsilon>0$としよう。距離空間内の開球$\{\succsim\in P:\rho(\succsim, \succsim^0)<\epsilon\}$がKannai位相（つまり定理1での最小位相）での開集合であることを示そう。

$\succsim^*\in P$ s. t. $\rho(\succsim, \succsim^0)<\epsilon$を任意にとる。$\tau>0$を

(5)　$\{\succsim\in P:\rho(\succsim, \succsim^*)<\tau\}\subset\{\succsim\in P:\rho(\succsim, \succsim^0)<\epsilon\}$

となるようにとる。補題3より，ある実数Tがあって，

(6)　$\{\gtrsim \in P:\rho(\gtrsim, \gtrsim^*) < \tau\} = \{\gtrsim \in P : \max_{|x| \leq T} \frac{|u(x) - u^*(x)|}{1 + ||x||^2} < \tau\}$

である。以下では次のことを示す。

(7)　Kannai 位相での有限個の開集合 P_i $(i=1, \ldots, N)$ が存在して，$\gtrsim^* \in \cap_{i=1}^{N}$

$P_i \subset \{\gtrsim \in P : \max_{|x| \leq T} \frac{|u(x) - u^*(x)|}{1 + ||x||^2} < \tau\}$

これがいえれば，(5)と(6)より所望の結果を得る。

コンパクト集合 $\{x \in \Omega : ||x|| \leq T\}$ 上の各点 x に対し，x を中心とし半径 δ_x の開球 $G(x, \delta_x)$ が存在して，$x' \in G(x, \delta_x) \rightarrow |u^*(x) - u^*(x')| < \frac{\tau}{4}$ となる。つまり，各 $x', x'' \in G(x, \delta_x)$ に関して $|u^*(x') - u^*(x'')| < \frac{\tau}{2}$ となる。故に，各点 $x \in \Omega : ||x|| \leq T$ に対して，x を含む有理球 $S_x \subset G(x, \delta_x)$ についてもこの関係は成り立つので，かような有理球の有限個の集まり S_i $(i=1, \ldots, N)$ で，$\{x \in \Omega : ||x|| \leq T\}$ を被覆することができる。これは $\{intS_i\}$ がコンパクト集合 $\{x \in \Omega : ||x|| \leq T\}$ の開被覆となっているためである。以上から，

(8)　$\{x \in \Omega : ||x|| \leq T\}$ を被覆する有限個の有理球 S_i $(i=1, \ldots, N)$ があって，

$\max\ \{u^*(y) : y \in S_i\} - \min\ \{u^*(y) : y \in S_i\} < \frac{\tau}{2}$

がいえたことになる。

さて，補題4より

(9)　集合 P_i

$\gtrsim \in P_i \leftrightarrow \forall\ x \in S_i,\ \min\ \{u^*(y) : y \in S_i\} - \frac{\tau}{2} < u(x) < \max\ \{u^*(y) : y \in S_i\} + \frac{\tau}{2}$

は，Kannai 位相での開集合である。この P_i $(i=1, \ldots, N)$ が(7)で求めるべき集合族になることを示そう。$\cap_{i=1}^{N} P_i$ も開集合であり，(8)より，$\gtrsim * \in \cap_{i=1}^{N} P_i$ であることも自明。残るは(7)の最後の関係式 $\cap_{i=1}^{N} P_i \subset \{\gtrsim \in P : \max_{||x|| \leq T} \frac{|u(x) - u^*(x)|}{1 + ||x||^2} < \tau\}$ である。$\gtrsim \in \cap_{i=1}^{N} P_i$ を任意にとる。u を C^* 内での効用

関数表現とする。以下 P_iを所与とする。

y が max $\{u^*(y) : y \in S_i\}$ をとるとしよう。各 $x \in S_i$に関して，簡単な式の展開により，

$u^*(y)+\frac{\tau}{2}>u(x)$（∵ $\succsim \in P_i$と(9)）

$u^*(y)-u^*(x)+u^*(x)+\frac{\tau}{2}>u(x)$

$\frac{\tau}{2}+u^*(x)+\frac{\tau}{2}>u(x)$　（∵(8)）

つまり $\tau>u(x)-u^*(x)$を得る。

y'が min $\{u^*(y) : y \in S_i\}$ をとるとしよう。各 $x \in S_i$に関して，簡単な式の展開により，

$u(x)>u^*(y')-\frac{\tau}{2}$　（∵ $\succsim \in P_i$と(9)）

$u(x)+u^*(x)-u^*(y')-u^*(x)>-\frac{\tau}{2}$

$u(x)+\frac{\tau}{2}-u^*(x)>-\frac{\tau}{2}$　（∵(12)）

つまり $\tau>u^*(x)-u(x)$を得る。この二つをあわせて $\tau>|u^*(x)-u(x)|$，つまり，

$\max_{x \in S_i}\frac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2}<\tau$ を得る。これが各 S_iに関して成り立つので

$\max_{|x|\leq T}\frac{|u(x)-u^*(x)|}{1+||x||^2}<\tau$，以上で証明が完了した。□

以下の議論には関係ないが，定理 2 に関連した命題を証明しよう。選好を C^*に属する効用関数で表現した際には，距離関数の性質から次のことがいえる。

命題 1 u^n，$u \in C^*$は各々$\succsim^n$，$\succsim$の効用関数表現とする。いま$\succsim^n \to \succsim$であるとき，

$u^n(x^n) \to u(x)$ as $x^n \to x$ である。

証明：$\rho(\succsim^n, \succsim):=\max\left\{\frac{|u^n(x)-u(x)|}{1+\|x\|^2}: x\in\Omega\right\}\geq\frac{|u^n(x^n)-u(x^n)|}{1+\|x^n\|^2}$

この式と $\rho(\succsim^n, \succsim)\to 0$ as $x^n\to x$ より，

(1)　$|u^n(x^n)-u(x^n)|\to 0$

一方，$|u^n(x^n)-u(x)|\leq|u^n(x^n)-u(x^n)+u(x^n)-u(x)|\leq|u^n(x^n)-u(x^n)|+|u(x^n)-u(x)|$

であり，$|u(x^n)-u(x)|\to 0$ as $x^n\to x$ と(1)より，所望の結果を得る。$\boxdot$

命題1の系として：

命題2 u^n, u, $\tilde{u}^n$, $\tilde{u}\in C^*$は各々$\succsim^n$, $\succsim$, $\tilde{\succsim}^n$, $\tilde{\succsim}$の効用関数表現とする。いま$\succsim^n\to\succsim$かつ$\succsim^n\to\tilde{\succsim}$であるとき，

$\alpha^n u^n(x^n)+\beta^n\tilde{u}^n(y^n)\to\alpha u(x)+\beta\tilde{u}(y)$ as $\alpha^n\to\alpha, \beta^n\to\beta, x^n\to x$, and $y^n\to y$

選好$\succsim\in P$がC^∞級であるとは，$\mathrm{int}\Omega$上では$\succsim$がC^∞級の効用関数で表現できるときをいう。P^∞はPの部分集合で，C^∞級の選好全てから構成される集合としよう。同じく$P^{s.conv.}$はPの部分集合で，強く凸な選好全てから構成される集合とする。

任意の選好$\succsim\in P$に関して，それに収束する点列$\succsim^n\in P^\infty$をとることができる。これは$\succsim\in P$をP^∞内の選好にて近似できることを意味する。この結果は更には，$P^\infty\cap P^{s.conv.}$内の選好による近似にまで改良できる。

我々はこの近似定理をKannai(1974)及びMas-Colell(1974)とは違った方法で証明するが，そのアイディアは極めて単純である。m＝2のケースで例解しよう。選好$\succsim\in P$の代表的な無差別曲線を一つ引き，図3におけるUUとしよう。UUは点x^*にて屈折しているから，$\succsim\in P$は微分可能な効用関数にて代表されることはない。そこで，これに近似する$\succsim^n\in P^\infty$を構成するのである。無差別曲線UU上の各点x^*を中心とする半径$\frac{1}{n}$の閉球の表面を考

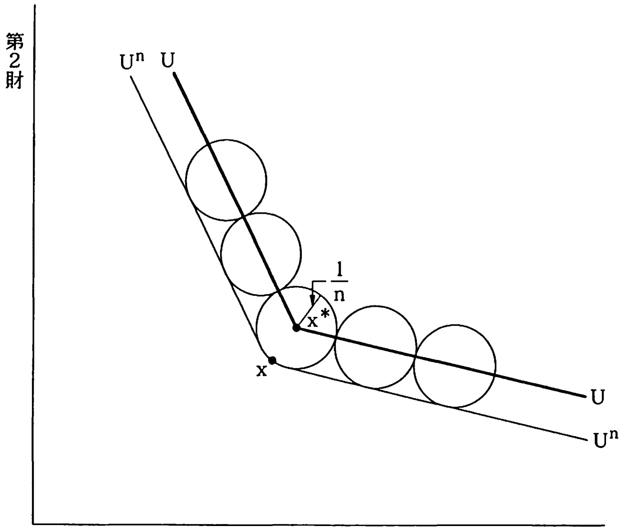

図3

え，その包絡線をU^nU^nとする。ただしU^nU^nはUUの下側を通る方の包絡線である。U^nU^nは滑らかであり，これを新しい選好$\succsim^n$の無差別曲線とするのである。$\succsim$の各無差別曲線から同じ要領で新しい滑らかな無差別曲線を構成する。この無差別曲線群を生み出す選好が$\succsim^n$である。構成から明らかにU^nU^nはUUの下方領域に属する点の中でUUまでの距離が$\frac{1}{n}$である点全ての軌跡である。このことに着目すれば，$\succsim^n$が連続かつ凸であることが直ちに首肯できるだろう。

$\succsim^n$を別の方向から眺めてみよう。今度はU^nU^n上の各点xを中心とする半径$\frac{1}{n}$の閉球の表面が形成する包絡線をとってみよう（図4）。この包絡線のうち，U^nU^nの上側を通るのがオリジナルな選好$\succsim$の無差別曲線UUである。xを中心とする半径$\frac{1}{n}$の閉球はUUと一意の接点を持つ[10]。その接点が他

10) 二つ以上の接点を持つことはあり得ない。なぜならもし他の接点yがあるとすれば，選好の凸性により，xからの距離が$\frac{1}{n}$未満で，無差別曲線UUに到達できることになり，これはU^nU^nの構成法に矛盾するからである。

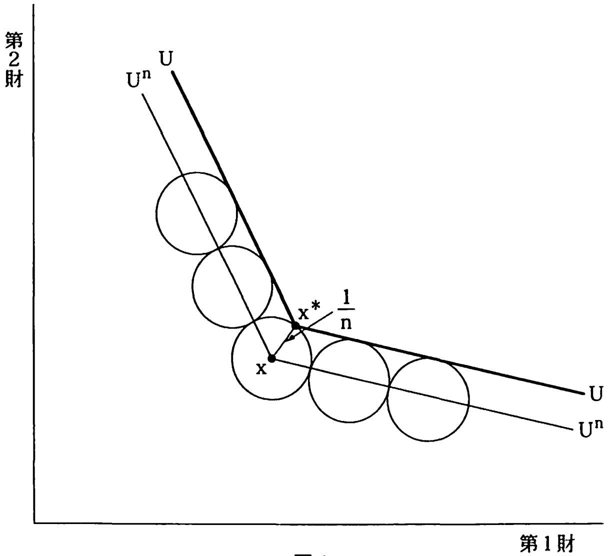

図4

ならぬ先にとった x^* なのだ。また x^* は，x を中心とする半径 $\frac{1}{n}$ の閉球上での選好順序≿に関する最大元(best element)にもなっている。以上から我々は $\succsim^n$ を天下り的に定義できる：

自然数 n を所与とする。任意の $x \in \Omega$ に対し，x^* を

(1)　x^* は，x を中心とする半径 $\frac{1}{n}$ の閉球 $B(x, \frac{1}{n}) := \{y \in \Omega : ||x-y|| \leq \frac{1}{n}\}$ 上での選好順序≿に関する最大元(best element)：

と定義する。このとき選好順序 $\succsim^n$ を，

(2)　$x \succsim^n y \leftrightarrow x^* \succsim y^*$

と定義すればよい。n を大きくするに従って，閉球 $B(x, \frac{1}{n})$ は次第に小さくなるから，$\succsim^n$ が≿に収束することは明らかであろう。$\succsim^n \in P$ であることも視覚的に首肯できる（$\succsim^n$ の連続性・凸性がなぜ成り立つかは既に説明した。単調性の証明はやや難しい)。$\succsim^n \in P$ であることは，各点 x での凸集合 $\succsim^n(x)$ が閉球 $B(x^*, \frac{1}{n})$ を含んでいることから $\succsim^n(x)$ の点 x での支持超平面が一意の法線ベクトルを持つことに着目すればよい（図5)。

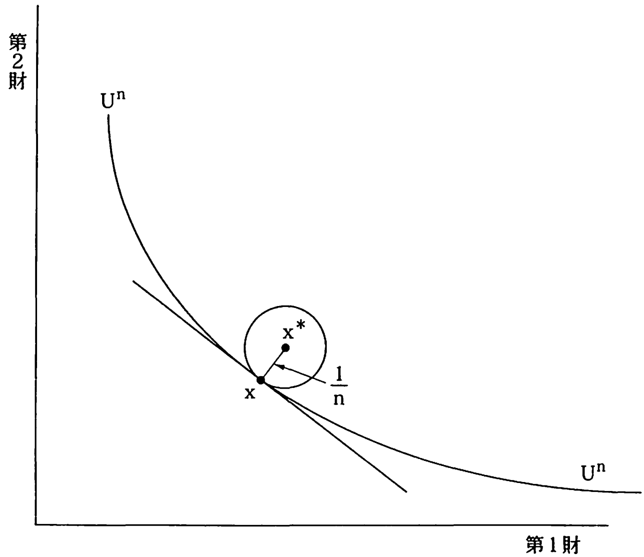

図5

定理3

(a) P^{∞} は P の稠密部分集合である。

(b) $P^{\infty} \cap P^{s.conv.}$ は P の稠密部分集合である。

証明：(b)は(a)から簡単に導き出される。$\succsim \in P$ に収束していく点列 $\succsim^{\nu} \in P^{\infty} \cap P^{s.conv.}$ を構成すればよい。任意の番号 ν に関して，(1)より，$\rho(\succsim, \succsim') < \frac{1}{2v}$ となる $\succsim' \in P^{\infty}$ がとれる。$\succsim^* \in P^{\infty} \cap P^{s.conv.}$ を任意にとる。u'と u^* は各々 $\succsim'$ と $\succsim^*$ の C^{∞} 級の効用関数表現であるとしよう。$u' + \epsilon u^*(\epsilon > 0)$ から導かれる選好を $\succsim^{\epsilon} \in P^{\infty} \cap P^{s.conv.}$ とする。ϵ を十分小さくとることによって $\rho(\succsim', \succsim^{\epsilon}) < \frac{1}{2\nu}$ とできる：仮にそうでないとする。すると，Kannai 位相を定義する部分基底の元 P_{ij} があって，$\succsim' \epsilon P_{ij}$ かつ全ての ϵ に関して，$\succsim^{\epsilon} \not\in P_{ij}$ としてよい。P_{ij} を定義する二つの有理球を S_i，S_j としよう。すると点列 $x^{\epsilon} \in S_i$ と $y^{\epsilon} \in S_j$ で，$y^{\epsilon} \succsim^{\epsilon} x^{\epsilon}$ となる。S_i，S_j がコンパクトより，$x^{\epsilon} \to x \in S_i$ かつ $y^{\epsilon} \to y \in S_j$ としてよい。$\succsim^{\epsilon}$ の定義より，$u'(y^{\epsilon}) + \epsilon u^*(y^*) \geq u'(x^{\epsilon}) + \epsilon u^*(x^{\epsilon})$ である。これより，$u'(y) \geq u'(x)$ となって，$\succsim' \epsilon P_{ij}$ に反する。

以上から $\rho(\succsim, \succsim^{\epsilon}) \leq \rho(\succsim, \succsim') + \rho(\succsim', \succsim^{\epsilon}) < \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{\nu}$ となって，これが任意の ν に関して成り立つ。以上で(b)が証明できた。

そこで(a)を証明しよう。

自然数 n を所与とする。任意の $x \in \Omega$ に対し，x^*を

(1)　x^*は，x を中心とする半径 $\frac{1}{n}$ の閉球 $B(x, \frac{1}{n}) := \{y \in \Omega : ||x-y|| \leq \frac{1}{n}\}$ 上での選好順序$\succsim$に関する最大元(best element)：

と定義する。選好の凸性より，x^*は一意に決まる。(1)を用いて，選好順序$\succsim^n$を，

(2)　$x \succsim^n y \leftrightarrow x^* \succsim y^*$

定義する。$\succsim^n$が順序であることは明らかである。$\succsim^n$が連続・凸・単調・滑らかであることを順に確認しよう。証明は幾つかのステップに分かれる。

次の集合を定義する。

(3)　$\delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n}) := \{y \in \Omega : \inf_{z \in \succsim(x^*)} ||y-z|| \leq \frac{1}{n}\}$

以下のステップ1から5までで$\succsim^n$が連続であることがいえる。

ステップ1：$\delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$は閉かつ凸。

証明：

閉：点列 $y^m \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$，$y^m \to y\ (m=1,2,\ldots,)$をとる。定義より，点列 $z^m \in \succsim(x^*)\ (m=1,2,\ldots,)$で，

$||y^m - z^m|| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

となるものが存在する。$y^m \to y$ より，点列 $\{z^m\}$ は有界列であり，収束部分列が存在する。その収束点を z とすると，$z \in \succsim(x^*)$かつ$||y-z|| \leq \frac{1}{n}$，つまり $\inf_{z \in \succsim(x^*)} ||y-z|| \leq \frac{1}{n}$となり，$y \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$を得て，証明は完了する。

凸：$y, z \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$をとる。各自然数 m に関して

y^m，$z^m \in \succsim(x^*)$，$||y-y^m|| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$，$||z-z^m|| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$

となる y^m，z^mが存在する。

y，z の凸結合 $w(t)=ty+(1-t)z$，$t \in [0, 1]$ に関し，同じ t に関して，$w^m(t)=ty^m+(1-t)z^m$ $(m=1,2,\ldots,)$ をとる。$w^m(t) \in \succsim(x^*)$ ($\because \succsim(x^*)$ は凸) であり，かつ

$||w(t)-w^m(t)||=||ty+(1-t)z-ty^m-(1-t)z^m|| \leq t||y-y^m||+(1-t)||z-z^m|| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$

これが任意の m に関して成り立つから，$\inf_{z \in \succsim(x^*)}||w(t)-z|| \leq \frac{1}{n}$，つまり $w(t) \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$。これより証明は完了する。□

ステップ2：$\succsim^n(x)=\delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$

証明：

⊂：$y \in \succsim^n(x)$ をとる。定義により $y^* \succsim x^*$，つまり(i) $y^* \in \succsim(x^*)$。また y^* は閉球 $B(y, \frac{1}{n})$ 上での $\succsim$ に関する最大元であるから，(ii) $\frac{1}{n}=||y-y^*||$ を得る。

(i), (ii)から $\inf_{z \in \succsim(x^*)}||y-z|| \leq \frac{1}{n}$，つまり $y \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$ となり，所望の結果を得る。

⊃：$y \in \delta(\succsim(x^*), \frac{1}{n})$ をとる。定義により，$\inf_{z \in \succsim(x^*)}||y-z|| \leq \frac{1}{n}$，つまり，各自然数 m に関して，$||y-z^m|| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ となる $z^m \in \succsim(x^*)$ が存在する。$\{z^m\}$ は有界列より，その収束部分列が存在し，収束点を z とおくと，(i) $z \in \succsim(x^*)$ かつ(ii) $||y-z|| \leq \frac{1}{n}$。一方，y^* の定義と(ii)により，$y^* \succsim z$，故に(i)より $y^* \succsim x^*$。これより，$y \succsim^n(x)$ となる。□

ステップ3：$\sim^n(x)=\{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \sim(x^*)}||y-z||=\frac{1}{n}\}$

証明：

⊂：$y \in \sim^n(x)$ をとる。

(i)　$y \in \prec(x^*)$：及び

(ii)　$\inf_{z \in \sim(x^*)} \|y-z\| = \frac{1}{n}$

をいえばよい。

$y \in \sim^n(x)$ より，$x^* \sim y^*$。これと $y^* > y$ より，(i)は明らかである。y^*の定義により，$\|y-y^*\| = \frac{1}{n}$。$z \in \sim(x^*) = \sim(y^*)$ で，$\|y-z\| < \frac{1}{n}$ なる z が存在すれば，y^*の定義に反する。以上で(ii)がいえた。

⊃ : y はステップ3の右辺の集合に属すとしよう。各自然数 m に対して，$\|y-z^m\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ となる $z^m \in \sim(x^*)$ が存在する。$z^m \to z \in \sim(x^*)$ とおいてよい。すると $\|y-z\| = \frac{1}{n}$。以上より，(iii) $z \in \sim(x^*)$ かつ $z \in B(y, \frac{1}{n})$ を得たことになる。

いま y を中心とし，半径 $\frac{1}{n}$ の閉球 $B(y, \frac{1}{n})$ をとり，$\sim(x^*)$ とこの球が z で接していなければ，$\|y-z'\| < \frac{1}{n}$, $z' \in \sim(x^*)$ となる z' が存在することになり，これは $\inf_{z \in \sim(x^*)} \|y-z\| = \frac{1}{n}$ に矛盾する。故に，$\sim(x^*)$ と閉球 $B(y, \frac{1}{n})$ は z で接している。その接し方は二つあり，z が閉球 $B(y, \frac{1}{n})$ 上での $\succsim$ に関する最小元になるか最大元になるかのいずれかである。$y \in \prec(x^*)$ と(iii)を考えれば前者はおこり得ない。後者の場合 $z = y^*$ を得る。なぜなら $\sim(y^*)$ も，その定義より $B(y, \frac{1}{n})$ と接しているからである。これと(iii)を考慮して，$y^* \sim x^*$ となり，証明は完了する。□

ステップ4：$\succ^n(x) = \{y \in \Omega : \inf_{z \in \succsim(x^*)} \|y-z\| < \frac{1}{n}\}$

証明：まず

$$\begin{aligned}
\succ^n(x) &= \succsim^n(x) - \sim^n(x) \\
&= \{y \in \Omega : \inf_{z \in \succsim(x^*)} \|y-z\| \leq \frac{1}{n}\} - \{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \sim(x^*)} \|y-z\| = \frac{1}{n}\} \quad (\because \text{ステップ2，3}) \\
&= \{y \in \Omega : \inf_{z \in \succsim(x^*)} \|y-z\| < \frac{1}{n}\} + \{y \in \Omega : \inf_{z \in \succsim(x^*)} \|y-z\| = \frac{1}{n}\} - \{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \succsim(x^*)} \|y-z\| = \frac{1}{n}\} \qquad \text{(i)}
\end{aligned}$$

を得る。

ここで，

$\{y \in \Omega : \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\} = \{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \succsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\} + \{y \in \succsim(x^*) : \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\}$

上式右辺の第二項は空集合より，

(ii)　$\{y \in \Omega : \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\} = \{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \succsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\}$

一方，明らかに

(iii)　$\{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\} = \{y \in \prec(x^*) : \inf_{z \in \succsim(x^*)} ||y-z|| = \frac{1}{n}\}$

である。

(ii)，(iii)を(i)に代入して，所望の結果を得る。□

ステップ5：$\succ^n(x)$は開集合である。

証明：仮にそうでないとする。するとステップ4より$y \in \succ^n(x)$へ収束する点列$y^m (m=1,2,\ldots,)$で，$\inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y^m - z|| \geq \frac{1}{n}$となるものが存在する。これより$||y^m - z|| \geq \frac{1}{n}$ for all $z \in \sim(x^*)$が各mについて成り立つ。故に$||y-z|| \geq \frac{1}{n}$ for all $z \in \sim(x^*)$となり，これはステップ4に矛盾する。□

ステップ6：$\succsim^n$は凸である。

証明：$y \succ^n x$をとる。xとyとの凸結合上の点$w(t) = tx + (1-t)y$，$t \in (0, 1)$をとる。

簡単な計算により，$\inf_{z \in \precsim(x^*)} ||w(t) - z|| = \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||tx + (1-t)y - z|| = \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||t(x-z) + (1-t)(y-z)|| \leq t \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||x-z|| + (1-t) \inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z||$

一方，$x \in \succsim^n(x)$とステップ2により，$\inf_{z \in \precsim(x^*)} ||x-z|| \leq \frac{1}{n}$であり，ステップ4と$y \succ^n x$より，$\inf_{z \in \precsim(x^*)} ||y-z|| < \frac{1}{n}$

以上から $\inf_{z\in\succsim(x^*)}\|w(t)-z\|<\frac{1}{n}$ となり，ステップ4より，$w(t)\in\succ^n(x)$ となって所望の結果を得る。□

ステップ7：各点 $x\in \mathrm{int}\Omega$ に関して，$\succsim^n(x)$ の x での支持超平面は一意に決まる。
証明：x^*を中心とする半径 $\frac{1}{n}$ の閉球 $B(x^*, \frac{1}{n})$ をとる。いま仮に，この閉球の内部に $\precsim^n(x)$ の点が含まれるとしよう。これが矛盾であることを示す：想定により，$y\in \mathrm{int}B(x^*, \frac{1}{n})\ \&\ y\in\precsim^n(x)$ となる y が存在する。つまり $x\succsim^n y$ である。一方，$x^*\succ^n x$ より，y と x^*を結ぶ凸結合上の点 y'で，$y'\sim^n x$ となるものが存在する。$y'\in\sim^n(x)$ とステップ3に従えば，$\inf_{z\in\sim(x^*)}\|y'-z\|=\frac{1}{n}$ でなければならない。しかし $\|y'-x^*\|<\frac{1}{n}$ なので，これは矛盾である。以上で，閉球 $B(x^*, \frac{1}{n})$ の内部に $\precsim^n(x)$ の点が含まれることはない。故に $\mathrm{int}B(x^*, \frac{1}{n})\subset\succ^n(x)$，つまり $B(x^*, \frac{1}{n})\subset\succsim^n(x)$ である。$\succsim^n(x)$ の x での支持超平面は同時に $B(x^*, \frac{1}{n})$ の点 x での支持超平面でなければならず，ステップ7が成立する。□

ステップ8：閉球 $B(y, \frac{1}{n})$ 上での $\succsim$ に関する最大元 y^* は $\mathrm{int}\Omega$ 内にある。
証明：$B^0:=B(y, \frac{1}{n})\cap\{x\in\Omega : x\geq y\}$ としよう。B^0上での $\succsim$ に関する最大元を y^0とする。まず $y^0\gg y$ であることを示す。ミンコフスキーの分離定理により，y^0で $B(y, \frac{1}{n})$ と $\succsim(y^0)$ を分離する超平面が存在し，その法線ベクトル $p\neq0$に関して，

(i)　$px\geq py^0$ for all $x\in\succsim(y^0)$ かつ $py^0\geq px$ for all $x\in B(y, \frac{1}{n})$

が成り立つ。

$p_h=0$となる財 h が存在したとしよう。正数 $\epsilon>0$をとって，消費ベクトル $y\in\Omega$ s. t. $y_h=y^0{}_h+\epsilon$，$y_{-h}=y^0{}_{-h}$とおく。$py=py^0$かつ $y>y^0$である。y と原点を結ぶ線分上の点 x で $x\sim y^0$となるものがあるが，一方で $px<py^0$である。

これは(i)の前半部に反する。

次に $p_h<0$ となる財hが存在したとしよう。正数 $\epsilon>0$ をとって，消費ベクトル $x\in\Omega$ s. t. $x_h=y^0{}_h+\epsilon$，$x_{-h}=y^0{}_{-h}$ とおく。$px<py^0$ かつ $x>y^0$ で，これは(ii)の前半部に反する。

以上で $p>>0$ であることがわかった。これと(i)の後半部から $y^0>>y$ になることがいえる。この y^0 が $B(y,\ \frac{1}{n})$ 上での $\gtrsim$ に関する最大元 y^* と一致することを示せば，ステップ8の証明は終わる。仮にそうでなかったとしよう。$x\in B(y,\ \frac{1}{n})$ で $x>y^0$ となるものが存在したとする。$\gtrsim$ の凸性により，x と y^0 を結ぶ線分 $[x,\ y^0]$ 上のあらゆる点 z について，$z>y^0$ となる。一方，$y^0>>y$ であったから，y^0 を中心とする半径 δ の閉球 $C(y^0,\ \delta)$ で，

(ii)　$C(y^0,\ \delta)\cap B(y,\ \frac{1}{n})\subset\{x\in\Omega: x>>y\}\cap B(y,\ \frac{1}{n})$

とできる。先の $[x,\ y^0]$ 上の点 z で，$z\in C(y^0,\ \delta)\cap B(y,\ \frac{1}{n})$ となるものがあり，これが $z>y^0$ を意味したから，(ii)を考えれば y^0 の定義に矛盾する。

ステップ9：$\gtrsim^n$ は単調である。

証明：x，$y\in R^l{}_+$ with $y>x$ をとる。仮に $x\gtrsim^n y$，つまりステップ2より

$\inf_{z\in\precsim(y^*)}||x-z||\geq\frac{1}{n}$

として矛盾を導こう。$y^*\in\gtrsim(y^*)$ と y^* の定義より，

(i)　$\inf_{z\in\precsim(y^*)}||y-z||=\frac{1}{n}$

ステップ7，8より，y^* での $\gtrsim^n(y^*)$ の一意の超平面が存在する。その法線ベクトルを p とおくと，

(ii)　$pz\geq py^*$ for all $z\in\gtrsim^n(y^*)$；及び

(iii)　$py^*\geq pz$ for all $z\in B(y,\ \frac{1}{n})$

である。$y>x$ より，$py>px$，また(iii)より $py^*>py$，故に $py^*>px$ を得る。故に線分 $(y^*,\ x]$ は $B(y,\ \frac{1}{n})$ の内部と交わる。その点を一つ取り，z とおくと，

(iv)　$||y-z||<\frac{1}{n}$；

また $y^* >^n y$ & $x \gtrsim^n y$ と $\gtrsim^n$ の凸性より，$z \gtrsim^n y$，故に

(v) $z \in \gtrsim(y^*)$

(iv)と(v)は(i)に矛盾する。□

ステップ10：写像 $x \to x^*$ は連続である。

証明：$\gtrsim$ の効用関数表現を u とおく。$x^* = \mathrm{Argmax}_{y \in C(x, 1/n)} u(y)$ であるから，Berge の最大値定理を適用して，$x \to x^*$ は連続となる。□

ステップ11：$x \in \mathrm{int}\Omega$ に対して，$\gtrsim^n(x)$ の点 x での支持超平面の法線ベクトルを p_x としよう。このとき写像 $x \to p_x$ が定義でき，連続である。

証明：写像 $x \to p_x$ が定義できるのは，ステップ7より明らかである。ステップ7の証明でわかったように，p_x は $C(x^*, \frac{1}{n})$ の点 x での一意の支持超平面の法線ベクトルである。従って x^* は x を始点とした半直線 $x + tp_x$ 上にある。故に，$p_x = \frac{x^* - x}{t}$ を得る。ここで $\|p_x\| = 1$ を考えれば $t = \frac{1}{n}$，つまり t は定数となる。これとステップ10より，写像 $x \to p_x$ は連続である。□

$I := \{(x, y) \in \mathrm{int}\Omega \times \mathrm{int}\Omega : x \sim^n y\}$ とおこう。

ステップ12：I は C^∞ 級多様体[11]である。

証明：写像 $\Psi : I \to R^{4l-2}$ を，

$\Psi(x, y) = (p_x, p_x x, x_{-m}, p_y, p_y y, y_{-m})$

と定義する。改めて，$\Psi : I \to \Psi(I)$ とおくと，Ψ は1対1かつ上への写像であり，ステップ11より，連続写像でもある。I の各点 (x, y) に関して，コンパクト近傍 U をとれるから，U 上で Ψ は同相写像となる。以上から I の各点 (x, y) に関して，座標近傍 (U, Ψ_u)（ただし Ψ_u は Ψ の U への制限である）

11） 多様体に関しては松本(1988)を参照せよ。

がとれ，座標近傍系が定義できる。座標変換は恒等写像になるから，当然C^∞級となり，所望の結果を得る。□

ステップ12とMas-Colell(1985)Proposition2-3-9（選好$\succsim \in P$がC^∞級であるにはIがC^∞級多様体であるのが必要かつ十分である）より，$\succsim^n$はC^∞級の効用関数によって表現可能である[12)]。

最後にP^∞はPの稠密部分集合であることをいう。

ステップ13：任意の$\epsilon>0$に対して，十分大きなnが存在して，$\rho(\succsim, \succsim^n)<\epsilon$

仮にそうでないとしよう。そのとき，Kannai位相の部分基底に属する元P_{ij}で，全てのnに関して$\succsim^n \notin P_{ij}$となるものが存在する。S_iとS_jはP_{ij}を定義する有理球であるとする。任意のnに関して，

(i)　$x^n > y^n$；

(ii)　$y^n \succsim^n x^n$：及び

(iii)　$x^n \in S_i$，$y^n \in S_j$，$x^n \to x \in S_i$，and $y^n \to y \in S_j$

を得る。

　$\succsim^n$の定義に従えば，任意のnに対して，

(iv)　$y^{n*} \succsim x^{n*}$

12) 連続微分可能な効用関数によって表現される選好に関して，無差別曲線上の点が(位相的な)内点であれば，その点での無差別曲線に接する一意の接平面が存在する。これはよく知られた事実であり，中級クラスのミクロ経済学のテキストには必ず書いてある。しかしこの逆の成立は必ずしも明らかではない。任意の(位相的な)内点に関して，その点での無差別曲線に接する一意の接平面が存在すれば，その選好は連続微分可能な効用関数によって表現されるのであろうか。ステップ11はその解答である。ここでの証明は，$\succsim^n$に固有な性質は使われておらず，ただ写像$x \to p_x$の連続性のみに依拠していることに気づく。つまり，一般に，与えられた選好が連続微分可能な効用関数によって表現されるには任意の(位相的な)内点に関して，その点での無差別曲線に接する一意の接平面が存在し，かつ接平面の法線ベクトルが連続的に動くことが必要かつ十分なのである。

を得る。ここで x^{n*} と y^{n*} は各々 $B(x^n, \frac{1}{n})$ と $B(y^n, \frac{1}{n})$ 上での $\succsim$ に関する最大元である。

明らかに $x^{n*} \to x$ かつ $y^{n*} \to y$ であり，これと(iii), (iv)より $y \succsim x$ を得る。これはしかし $\succsim \in P_{ij}$ に矛盾する。□

Kannai(1974)とMas-Colell(1974)は選好 $\succsim \in P$ に近似する選好列として，単に C^∞ 級の効用関数によって代表されるだけでなく，解析関数によって代表されるものをとることができることを示している。また更にこれらが強く凸な(strictly concave)効用関数にて表現されることをも示している。我々の別証ではここまでは，いまのところ確認できない。前者に関しては，我々の別証のステップ１２の後で援用したMas-Colell(1986)のProposition2-3-9，―本質的にこれは選好が C^∞ 級であるか否かの判定条件にすぎない―，を解析関数のクラスに関する定理にまで拡張できれば，解決可能である。後者に関しては，目下のところ，解決の手だては持っていない。

しかし一方で，定理3の(a)に関しては利点もある。我々の近似の取り方を調べればわかるように，$\succsim \in P$ が点 x の周りで，ある線形の効用関数で代表されているならば，選好列 $\succsim^n \to \succsim$ についても各 $\succsim^n$ は x の周りで同じ線形の効用関数で代表できる。つまり局所的に線形になる選好は，その性質を保持した C^∞ 級の選好にて近似できるのである。KannaiやMas-Colellの近似の方法ではこの性質が成り立つかどうか，確認するのは容易ではない。

定理3は元々，社会的選択ルールの連続性の研究のための分析用具として開発されたものである(Nagahisa(1997)。この論文はNagahisa(1991)及びNagahisa and Suh(1995)の延長線上にあり，これらの論文で中心的役割を果たした選好の微分可能性と境界条件をはずして，交換経済上で定義されたワルラスルールの公理化を与えている。劣半連続性を弱劣半連続性へ弱め，これとパレート効率性，個人合理性，局所独立性，及び優半連続性を満足する唯一の社会的選択ルールがワルラスルールなのである。ここでは改良された

近似定理の持つ利点が効果的に使われている。

3 結 論

Kannai位相は均衡分析だけでなく，筆者の専門領域である社会的選択理論においても，有効に活用されている。例えばRedekop(1991, 1993a, 1993b)は社会的選択ルールの定義域に対しKannai位相の積位相を課し，非独裁的なアロウ型社会的選択ルールがその上で作用するためには，定義域がnowheredense（定義域の閉包の内部が空である）でなければならないことを示した。つまり定義域は痩せた構造を持たねばならないのである。これはアロウの不可能性定理の一つの一般化になっている。Nagahisa(1996)は同じ試みをギバード・サタースウェイト定理に関して行い，Redekopと同じ結論に達している。これらの研究ではKannai位相は社会的選択ルールの定義域の構造を調べる際の重要な分析用具になっている。

参考文献

HILDENBRAND, W. 1974 *Core and Equilibria in a Large Economy* Princeton : Princeton University Press.

KANNAI, Y. Continuity properties of the core of a market *Econometrica* **38** (1970) 791-815

KANNAI, Y. Approximation of convex preferences *J. Math. Econ.* **1** (1974) 101-106

MAS-COLELL, A. continuous and smooth consumers : Approximation theorems *J. Econ. Theory* **8** (1974) 305-336

MAS-COLELL, A. 1985 *The Theory of General Economic Equilibrium; A differentiable approach,* Cambridge University Press.

NAGAHISA, R. A local independence condition for characterization of Walrasian allocations rule, *J. Econ. Theory* **54** (1991) 106-123.

NAGAHISA, R. AND SC. SUH, A characterization of the Walras rule, *Soc. Choice Welfare* **12** (1995) 335-352.

NAGAHISA, R 1996 Nowheredenseness of domains admitting nondictatorial, efficient, and strategy-proof rules to operate in exchange economies Mimeo.

NAGAHISA, R. 1997 Continuity axioms for a characterization of the Walras rule Mimeo.

森田紀一　1981　　「位相空間論」　岩波

松本幸夫　1988　　「多様体の基礎」　東大出版

REDEKOP, J. Social welfare functions on restricted domains, *J. Econ. Theory* **53** (1991) 396-427

REDEKOP, J. Arrow inconsistent economic domains, *Soc. Choice Welfare* **10** (1993a) 107-126

REDEKOP, J. Social welfare functions on parametric domains, *Soc. Choice Welfare* **10** (1993b) 127-148

山崎昭　「数理経済学の基礎」創文社　1987