書　評

光　道隆著

『トポロジー——経済・経営のための基礎数学，5』

東京：培風館

神　保　一　郎

これは，経済・経営のための基礎数学の名の下に出版された８巻のシリーズものの第５巻である。とは言え，経済学の立場から見れば一番基本的であり，理解が困難であり，一番役に立つのは，第５巻であろう。他の巻については，いやしくも近代経済学を学ぶものは，少なくとも，何らかの意味において解析学と線形数学の洗礼を受けているから，取りつき易い。それに反して，ここに展開されたものは，現代経済学の１つの中心をなすものであり，解説された数学的方法は，ここ30年来の経済学の発達を理解するのに不可欠のものである。

経済学を使用された数学から分類すれば，古典学派（1776—1836年）では算術が，限界革命以後の近代経済学（1837—1947年）では微積分が，また von Neumann 革命以後の現代経済学（1948—1960年）ではトポロジーと線形数学が利用されている。最近の経済学（1961年——）では微分トポロジーと測度論が主として使われている。理論は益々精緻になり，今まで漠然と考えられて来た論理的構造が整然と示され，その基礎が晴天白日の下にさらされ明らかになった。時には数学技術の乱用と思われ，重箱の隅を針でつつくような議論も無いではないが，大局としては，一歩一歩と進歩の跡が見てとれるのが現状である。

経済学は文化系の学問であるから，これを学ぼうとした時，数学が大きな障壁となり，多くの人達が近づくのを厳しく拒んでいるのが最近の姿である。数学の理解なくしては，外国語の文献は勿論の事，日本語のものさえもが理解できないであろう。

この書物は近代経済学の第２期とも言うべき von Neumann 革命以後の経済学に使用されている数学の解説を試みたものである。第１章　実数の性質は１次元の空間の範囲で議論できるものが集められている。先づデデキントの切断を出発点として連続の概念が，たたき込まれる。この議論から，第２章　距離空間では，２次元の空間へ拡張され，点 a，b 間の距離の定義

（D 1）$d(a, b) \geqq 0$

（D 2）$d(a,b)=0 \Longleftrightarrow a=b$

（D 3）$d(a, b)=d(b, a)$

（D 4）$d(a, b)+d(b, c) \geqq d(a, c)$

を満たすものとして次の3つが紹介される。

離散距離　$d_0(a, b)=\begin{cases} 1(a \fallingdotseq b) \\ 0(a=b) \end{cases}$

ユークリッド距離

$$d_1(a, b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

ミンコフスキー距離

$$d_2(a, b)=max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|, \cdots, |a_n-b_n|\}$$

$$d^{(p)}(a, b)=(|a_1-b_1|^p+|a_2-b_2|^p+\cdots+|a_n-b_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

距離が導入された空間は距離空間となり，$a \in X$, $\varepsilon>0$ とすれば点 a の ε 近傍

$$U(a, \varepsilon)=\{x \in X | d(x, a)<\varepsilon\}$$

が定義できるようになる。a の全ての ε 近傍の集合が a の ε 近傍系 $\mathfrak{u}(a)$ であり，$O \subset X$ である時，$\mathfrak{u}(a)$ の元で O に含まれるものが必ず存在する時は開集合である。これから，開集合，境界，境界点，内点，外点，開核，触点が導かれる。

第3章は「n 次元ユークリッド空間」であって，第2章で2次元空間をイメージして書かれた定理等を n 次元に一般化するのに主として当てられている。2次元の特色はグラフに書ける点であり，説明が困難な場合は図にたよって，大体の方向づけが出来る。ただし，2次元は，ひずみを持った特殊な空間であるから，そのまま一般化は出来ないのである。一方，n 次元空間とは全く抽象の世界であり，頭の中だけで組立てられた論理の世界である。有限開被覆が存在する集合がコンパクトであると定義した後，有界で且つ閉な集合が結局コンパクトとなるのが証明される。経済学で使用される色々な集合が殆んどコンパクトであるのを考えると，ここでの議論は重要である。

次は凸集合であり，$A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ を凸集合とした場合 $\bigcap_{\lambda \ni \Lambda} A_\lambda$ も，$\sum_i \lambda_i A_i$ も凸集合ではあるが，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は凸集合ではないとしている。ミクロ経済学では個々の主体の行動分析をした後，総計して経済全体の法則を導いている。したがって生産可能集合，消費可能集合などが凸であるから，その直和も凸であり，それ故に個々の主体で議論した結論が，総計した市場の場合にも成立するのである。

第4章の位相空間では距離空間が，開集合系の性質，閉集合系の性質を使って位相空間

に拡大される。$\mathcal{O}_1$ が位相空間 X の開集合系であり，$\mathcal{O}_2$ が位相空間 Y の開集合系とすれば

$$O\in\mathcal{O}_2\longrightarrow f^{-1}(O)\in\mathcal{O}_1$$

となる 写像 f は連続写像と呼ばれている。この連続写像によって遺伝する性質として，コンパクト性と連結性があげられ，前者については定理4.4 (p. 121) に次のように示されている。

「f を位相空間 X から Y への連続写像，A を X のコンパクトな部分集合とすると，A による像 $f(A)$ はコンパクトである。」

また X の任意の開集合 $\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$ が連結であるとは

$$X=\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2,\ \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\phi\longrightarrow\mathcal{O}_1=\phi \text{ または } \mathcal{O}_2=\phi$$

となる事である。X が連結集合であるとすると，その連続写像 f による像 $f(X)$ も連続となるのである。一方，連続写像で遺伝しないものに完備性がある。

第5章不動点定理では，定理そのものが多項式の解存在，微分方程式の解存在，経済学での均衡解存在などの証明に応用されるものとして重要である。ここでは均衡解の存在によく利用されるブラウエルの不動点定理と 角谷の それを中心として 議論が 展開されている。先づ一番簡単な不動点定理として 縮小写像の不動点定理が 紹介される。縮小写像とは

$$x,\ y\in X\longrightarrow d(f(x),\ f(y)\leq\rho d(x,\ y)\ 0<\rho<1$$

となるような f である。これは写像を繰返えしてゆけば，2点間の距離が段々と小さくなって行くのであるから，極限では1点に収束するのは当然であろう。ブラウエルの不動点定理は130ページの定理5.2として示めされている。

「A をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな凸部分集合とする。このとき，f を A から A への連続写像とすると A には f の不動点が存在する。」

ここで不動点とは $x\in A$ とすれば $f(x)=x$ となる点である。この定理の証明は，やや厄介ではあるが，多くの経済学の書物に見られるように，重心細分とスペルナーの補助定理を使って行われている。そして最後に写像 f を連続関数から優半連続対応に一般化する事により，この書物の目的であろうと思われる「角谷の不動点定理」が証明される。これは定理5.14として149ページに次のように要約されている。

「X をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな凸部分集合とし，多意写像 $F: X\to X$ は優半連続で，Xの任意の点 x に対して $F(x)$ はコンパクトな凸集合であったと仮定する。このとき，F は不動点を持つ。」

この書物は経済学，経営学を勉強しょうとしている者，あるいは，それらを一層深く学びたいと考えている人達を対象としているように思われる。それにも拘らず，本文の説明や例には，一切，経済学や経営学に関係あるものが出て来ない。完全な数学書である。これでは，このシリーズの意味が無いであろうし，文系の学問を専攻したものには判りにくい。また数学書であれば W. G. Chinn and N. E. Steenrod の First Concepts of Topology に見られるような不動点定理のユニークな説明方法もある。また Brouwer は経済学ではブラーワーと読む。これに対して数学ではブラウエルであるが，ここでは数学式の読み方となっている。もし文系の人達を対象としているとすると，これも不親切である。連続写像で遺伝する言々といった表現も経済学ではなじみにくいものである。また131ページの「位相写像 φ は X から Y へ」は「Y から X への写像」でなければ意味が通じない。

参考文献にあげている Claude Berge の *Topological Space,* Oliver & Boyd, or Macmillan, は目下絶版で手に入らない。英訳よりも，簡単に入手できるもとのフランス語で書かれた *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques,* Paris: Dunod, 1966 をあげておいた方が親切であろう。