研究ノート

ゲール性，DD行列と競争均衡解の一意性

――アロー＝ハーン『一般競争分析』研究（1）

神　保　一　郎

現在の均衡理論では，生産の分野では活動分析に見られるように等量線は必ずしも原点に対して狭義の凸性を持っていない。また消費の理論では選好に狭義の凸性を主張しうる理論的根拠も存在しない。その結果，需要と供給は関数ではなく対応の形を取っている。しかも，関数の形を取る場合に限定したとしても需要量と供給量とが等しくなる均衡価格の一意性は自動的に全く保証し得ないのである。しかし，現実での取引は一意の価格において成立している。この価格が均衡価格集合の中から偶然に選ばれたものとするには余りにも安定した価格で取引が行われている。したがって意味ある均衡が成立する為には解の存在条件と安定条件のみならず一意性をも満足していなければならない。以下において超過供給関数を中心として，どのような条件を満たせば解が一意となるかを見て行く事とする。

1. 経済モデル

各経済主体は互いに独立して決定をなし，互いに交換を行う。財は物的特性，空間における位置，および受渡しの日付によって区別され，その種類が n あるものとする。経済主体は大別して2種類あり，需要の意思決定は家計が，また供給の意思決定は企業が行うものとする。家計 h の選択の結果を示す消費ベクトル $\boldsymbol{x}_h$ はその第 i 成分 x_{hi} が非負である場合は需要を，負である場合は用役などの供給を行うのを示す。総需要（および用役の総供給）は

$$x_i=\sum_h x_{hi},\quad \boldsymbol{x}=\sum_h \boldsymbol{x}_h$$

であらわす。生産主体は企業であり，n 次元生産ベクトル $\boldsymbol{y}$ を決定する。第 f 企業の生

産ベクトルは $\boldsymbol{y}_f$ で示し，その第 i 成分 y_{fi} が非負である場合は産出を，負である場合は投入を示している。また

$$y=\sum_f y_f,\quad \boldsymbol{y}=\sum_f \boldsymbol{y}_f$$

となっている。諸財の価格を示す n 次元ベクトルを価格ベクトルと名づけ，$\boldsymbol{p}$ で示す。$\overline{\boldsymbol{x}}_h \geq \boldsymbol{0}$ を家計 h の初期保有量とする。$\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_h \overline{\boldsymbol{x}}_h$ で示せば

$$s_i=\overline{x}_i+y_i-x_i$$

は第 i 財の超過供給関数である。

仮定 1

任意の $\boldsymbol{p}$ に対して，一意的な数 $s_i(\boldsymbol{p})$ が対応して決まり，s_i を超過供給関数と呼ぶ。s_i を成分とするベクトルは $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ で示され，超過供給ベクトルと呼ぶ。

仮定 2

全ての $\boldsymbol{p}>\boldsymbol{0}$, $k>0$ に対して，$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{s}(k\boldsymbol{p})$ が成立する。

集合 $S_n=\left\{\boldsymbol{p} \mid \sum_i^n p_i=1, \boldsymbol{p}>\boldsymbol{0}\right\}$ を n 次元単位単体と言う。もし $k=\dfrac{1}{\sum_i^n p_i}>0$ とおけば $\boldsymbol{p}$ を n 次元単位単体の要素と考えて議論を進めて行って何ら本質的な変更を加える必要はない。

仮定 3（ワルラス法則）

全ての $\boldsymbol{p}\in S_n$ に対して $\boldsymbol{p}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{0}$ が成立する。

仮定 4

$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ は上に有界である。

定義 1（均衡）

$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ が経済主体の選好行動から導かれたものである場合，$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}^*)\geq\boldsymbol{0}$ であれば，S_n に所属する $\boldsymbol{p}^*$ を均衡価格と呼ぶ。

仮定 5（連続性）

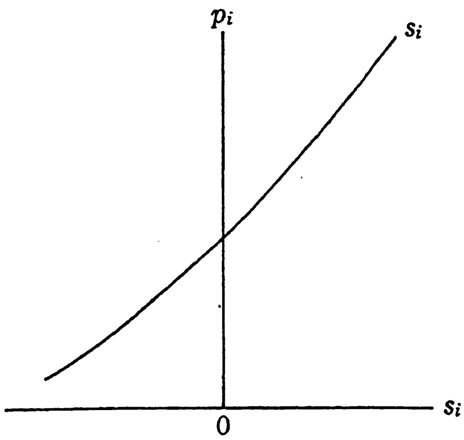

図　1

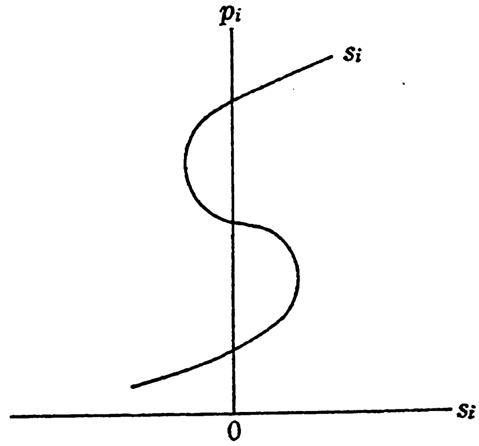

図　2

S_n に所属する全ての $\boldsymbol{p}$ に対して $s_i(\boldsymbol{p})$ は c^2 -関数である。

仮定　6（N）

経済体系の均衡では，第 n 財に指定された財が $p_n=0$ の場合

$$\sum_i s_i(\boldsymbol{p})=-\infty$$

となる財をニューメレールと名付ける。

この仮定はニューメレールの性質を規定したものである。ニューメレールに指定された財はその価格がゼロとなり得ないのであって，もしゼロとなれば，その財あるいは他の財の市場の何処かで均衡が破壊されてしまう。

$\sum_i s_i$ は測定の単位の全く異なる財について合計するのであるから一見無意味な仮定のように思われる。すなわち，幾トンの鉄，幾万バーレルの石油，幾万台の自動車等々が一様に合計されているのである。この事は財のうち少なくとも１つは超過供給がマイナス無限大となり均衡が破壊される事を示している。したがって，単位に関係なく，何処かでマイナス無限大の超過供給が生じているか否かげけ見ればよいのであるから測定の単位は全く無視しうるのである。何故ならば，マイナス無限大にプラス無限大以外の何を加えようと依然としてマイナス無限大だからである。したがってニューメレールになる財は価格がゼロになり得ない財であると言い換えてもよい。

次に均衡解の一意性を見る為には超過供給関係の勾配を見ればよい。１次元(部分均衡)の場合については図１と図２を比較すればその意味は自明である。$\boldsymbol{s}$ は仮定５により微分

可能であるから，第 i 財の超過供給関数 s_i を第 j 財の価格で微分したものを s_{ij} で示すものとする。そうすれば $\boldsymbol{p}\in S_n$ の全域にわたって

$$s_{ii}>0 \tag{1}$$

であれば，第 i 財の超過供給曲線の勾配は常に正であって，図1の場合が成立し p_i 軸と1度しか交わらない。したがって(1)は部分均衡理論が成立する場合での解の一意性を保証する条件である。しかし，部分均衡理論が成立する場合は，ほとんど考えられない。そうすると，一般均衡理論の枠の中で，この問題を考察しなければならない。そのために，一番有効な方法は超過供給関数のヤコビアン $J(\boldsymbol{p})$ であると想像がつくであろう。そこで $\dfrac{\partial s_i}{\partial p_j}=s_{ij}$ で示すとすれば $J(\boldsymbol{p})$ は次のようになる。

$$J(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial s_1}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial s_1}{\partial p_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial s_1}{\partial p_{n-1}} \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial s_2}{\partial p_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial s_2}{\partial p_{n-1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial s_{n-1}}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial s_{n-1}}{\partial p_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial s_{n-1}}{\partial p_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s_{11}, & s_{12}, & \cdots\cdots, & s_{1n-1} \\ s_{21}, & s_{22}, & \cdots\cdots, & s_{2,n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ s_{n-1,1} & s_{n-1,2}, & \cdots, & s_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

以下の分析で主役を演ずるのは，このヤコビアンである。

2.　ゲール性とP-行列

ゲール性とは行列Aについて次の条件を満たす場合を言う。

定義　2

A が正方行列であり，T が同じ次数の対角行列であり，主対角要素が$+1$か-1となっている。$\boldsymbol{v}$ が列ベクトルであるとすれば，$TAT\boldsymbol{v}\leq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}$ が成立するのは解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の場合に限る。

補助定理　1

正方行列 A がゲール性を持っていれば，その全ての主座小行列はゲール性を持つ。

証明

A を分割して

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

とし，A_{11} がゲール性を持たないとしよう。そうすると $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^1 \\ \boldsymbol{o} \end{bmatrix}$ であるから $\boldsymbol{v}^1$ と T_1 を適当に選んで $T_1A_{11}T_1\boldsymbol{v}^1\leq\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{v}^1>\boldsymbol{o}$ とする事が出来る。何故ならば A_{11} がゲール性を持たないと仮定したからである。

$$T=\begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$TAT=\begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1A_{11} & T_1A_{12} \\ T_2A_{21} & T_2A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} T_1A_{11}T_1 & T_1A_{12}T_2 \\ T_2A_{21}T_1 & T_2A_{22}T_2 \end{bmatrix}$$

また $T_2A_{21}T_1\boldsymbol{v}^1<\boldsymbol{o}$ となるような T_2 を見つけるのは容易である。$A_{21}T_1\boldsymbol{v}^1$ それぞれの成分で＋の符号を持つものに対しては－１を，また－を持つものに対しては＋１をその主対角要素を配すればよいからである。ところが A_{11} の場合は両方から T_1 で挾んだので，このような処置は出来なかった。したがって

$$TAT\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} T_1A_{11} & T_1\boldsymbol{v}^1 \\ T_2A_{21} & T_1\boldsymbol{v}^1 \end{bmatrix}\leq\boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{v}>\boldsymbol{0}$ に対して $TAT\boldsymbol{v}\leq\boldsymbol{0}$ となり，A がゲール性を持つ事と矛盾する。したがって，あらゆる主座小行列はゲール性を持つ。

□

補助定理　2

行列 A がゲール性を持っていれば，A は正則行列である。

証明

$\boldsymbol{u}$ が非ゼロベクトルであり，$\boldsymbol{w}=A\boldsymbol{u}$ とおく。T は対角行列であって $u_i\neq0$ であれば，$t_{ii}u_i>0$ であり，$u_i=0$ であれば $t_{ii}w_i\leq0$ となっている。そうすれば $\boldsymbol{v}=T\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{o}$ となる。$TT=T^2=I$ となるから $T=T^{-1}$ である。したがって $\boldsymbol{u}=T\boldsymbol{v}$。$\boldsymbol{w}=A\boldsymbol{u}=AT\boldsymbol{v}$。左から T を掛ければ

$$Tw=TATv$$

ゲール性は $Tw\leq 0$ となりうるのは $v=o$ 即ち $u=o$ の場合に限る事を要請している。A が正則でないとすれば $Au=o$ であって $u\neq o$ となる。したがって $t_{ii}w_i>0$ であれば $v_i>0$ となり，$u_i\neq 0$ である。$u_i>0$ の場合は $t_{ii}>0$ であり，$w_i>0$ となる。$u_i<0$ の場合は $t_{ii}<0$ となり，したがって $w_i<0$ となる。すなわち $u\neq 0$ であって $Au=ATv=o$ であれば $TATv=o$ とならざるを得ない。しかるに $u\neq o$ であれば $Tw\neq o$ となって A のゲール性と矛盾する。したがって A は正則行列である。

□

補助定理　3

A がゲール性を満たしており，$u\neq o$ である場合，$w=Au$ とおく。そうすると $u_i>0$ であり，$w_i>0$，$u_i<0$ であれば $w_i<0$ となる。

証明

T の対角要素 t_{ii} を $u\neq 0$ の場合には $t_{ii}u>0$ となるように $t_{ii}=\pm 1$ を，また $u_i=0$ のときには $t_{ii}w_i\leq 0$ となるようにとる。$u_i>0$ の場合を考えれば，$t_{ii}=\pm 1$ であり $v=Tu$ とおけば，$v_i>0$ である。仮定によって A はゲール性を満たしているから，$TATv\leq o$ が成立するのは $v=o$ の場合に限る。したがって $v_i>0$ を含む v に対しては $TATv\leq o$ が成立しない。T は対角行列で対角線上に＋1か－1が並んでいるから，$TT=T^2=I$ となる。すなわち $T=T^{-1}$ である。したがって $Tv=TTu=Iu=u$。$w=Au=ATv$。左から両辺に T を掛ければ，$TATv=Tw$ となる。$u_i=0$ となっている i に対しては $t_{ii}w_i\leq 0$ となるように t_{ii} を決め，また $u_i\neq 0$ である i に対しては $t_{ii}u_i>0$ となっている。したがって，$u_i>0$ の場合には $v_i>0$ であり $t_{ii}>0$ であって，この場合 A のゲール性によって $t_{ii}w_i\leq 0$ が成立しないから，$t_{ii}w_i>0$ となる。$t_{ii}>0$ であるから $w_i>0$ である。また $u_i<0$ の場合には $t_{ii}<0$ となるから $t_{ii}w_i>0$ であれば $w_i<0$ となる。

□

定義　3

P-行列とは全ての主座小行列式が正となる行列である。

補助定理　4

正方行列 A がゲール性を持つ時，かつそのときに限って行列は P-行列である。

証明

帰納法を利用して証明する。$n=1$ の場合は $v\geq 0$ で $a_{11}v\leq 0$ が成立するのは $v_1=0$ の場

合であり，そのとき $a_{11}>0$ であるのを定理は主張している。A がゲール性を持たないと仮定しよう。そうすると $v_1>0$ に対して $a_{11}v_1\leq 0$ が成立する。$v_1>0$ であるから，$a_{11}<0$ となって A は P-行列ではない。ゆえに A がゲール性を持てば P-行列となる。さて次に

$$A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}(n)$$

が成立するように $\boldsymbol{u}$ を決める。$\boldsymbol{e}(n)$ は第 n 成分が1で他はゼロである単位ベクトルである。$\boldsymbol{e}(n)$ の第 n 成分は正であり，補助定理3から $\boldsymbol{u}$ の第 n 番目の成分 u_n は正となる。補助定理2から A は正則行列であるから $det\ A\neq 0$ となり，クラーマーの公式が適用出来るので，

$$u_n=\frac{det\ A_{nn}}{det\ A}$$

となる。ただし A_{nn} は A から第 n 行と第 n 列を除いた行列である。帰納法の仮定により A_{nn} は P-行列であるから $det\ A_{nn}>0$ となっている。また $u_n>0$ であるから $det\ A>0$ とならねばならない。したがって A の全ての主座小行列式は正である。すなわち A は P-行列である。

□

仮定　8

S_n に所属する全ての $\boldsymbol{p}$ に対して $J(\boldsymbol{p})$ はゲール性を持つ。

次に第 $n-1$ 財と第 n 財との相対価格が固定されている経済を考える。財の数は n であるが，実際には $n-1$ 財の経済と本質的に同じである。この n 経済の変数 $\boldsymbol{p}$ は次のように変換される。ただしニューメレールの価格を $p_n>0$ とする。ここで

$$q_i=p_i,\quad s_i=s_i\ (i<n-1)$$

$$q_{n-1}=p_{n-1}+p_n>0$$

$$s_{n-1}=as_{n-1}+(1-a)s_n\quad ただし\ a=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

とおく。$\boldsymbol{s}$ は s_i を成分とする $(n-1)$ 次元ベクトルであり，$\boldsymbol{q}$ は q_i を成分とする $(n-1)$ 次元ベクトルである。この $\boldsymbol{s}$ および $\boldsymbol{q}$ は次の性質を持っている。

（a）$\boldsymbol{p}$ が S_n に所属していれば，$\boldsymbol{q}$ は S_{n-1} に所属している。ただし S_n は n 次元単位シンプレックスである。

$\boldsymbol{p}\in S_n$ であるから $\sum_{i=1}^{n}p_i=1,\ p_i\geq 0$ である。また $\sum_{i=1}^{n-1}q_i=\sum_{i=1}^{n-2}q_i+q_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-2}p_i+p_{n-1}+p_n$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ q_i \geq 0\ (i=1, \cdots, n-1)。$$

したがって $\boldsymbol{q} \in S_{n-1}$

（b）ワルラス法則が成立する。すなわち

$$0=\boldsymbol{p}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{n-2} p_i s_i(\boldsymbol{p})+p_{n-1}s_{n-1}(\boldsymbol{p})+p_n s_n(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{n-2} q_i s_i(\boldsymbol{q})+(p_{n-1}+p_n)$$

$$\times\left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n} s_{n-1}+\frac{p_n}{p_{n-1}+p_n} s_n\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-2} q_i s_i(\boldsymbol{q})+(p_{n-1}+p_n)(a s_{n-1}+(1-a)s_n)=\sum_{i=1}^{n-2} q_i s_i(\boldsymbol{q})+q_{n-1}s_{n-1}(\boldsymbol{q})$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} q_i s_i(\boldsymbol{q}, a)$$

すなわち $\boldsymbol{q}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}, a)=0 \quad \forall \boldsymbol{q} \in S_{n-1}$

したがって $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}(a), a) \geq 0$ となるような均衡価格 $\boldsymbol{q}^*(a)$ がこの経済に対しても存在する。またニューメレールの価格を含む q_{n-1} は strictly にプラスとなるのが均衡が成立する条件なのであるが，これもここで満たされている 。

定義 4

a が与えられたとき，価格 $\boldsymbol{q}$ をもつ体系 $\boldsymbol{S}$ は縮約経済 $R(a)$ と名付けられる。

ここで2つのベクトル $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ とを次のように定義する。

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{p}}{p_n}, \quad \boldsymbol{Q}=\frac{\boldsymbol{q}}{(1-a)q_n}$$

ここで p_n はニューメレールである。

$$(1-a)q_{n-1}=\left(\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1}=\left(\frac{(p_{n-1}+p_n)-p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1}=\frac{p_n}{q_{n-1}}q_{n-1}=p_n$$

したがって $\boldsymbol{Q}$ は p_n で測られた各財の価格を示している。

$$Q_{n-1}=\frac{q_{n-1}}{(1-a)q_{n-1}}=\frac{1}{(1-a)}=\frac{1}{\dfrac{q_{n-1}-p_{n-1}}{q_{n-1}}}=\frac{1}{\dfrac{(p_{n-1}+p_n)-p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n}}$$

$$=\frac{p_{n-1}+p_n}{p_n}=\left.\frac{q_{n-1}}{p_n}\right|_{p_n=1}=q_{n-1} \geq 1$$

となっている。

超過供給関数は ゼロ 次同次の 関数で あるから， $\boldsymbol{p}^*$ が n 経済の 均衡価格で あれば，

$1/p_n>0$ であるから $\boldsymbol{P}^*$ も均衡価格となる。また $\boldsymbol{q}(a)$ が縮約経済の均衡価格であれば $\boldsymbol{Q}(a)$ も均衡価格となる。なぜなれば $p_n>0$ であるから $p_{n-1}>0$ であり，$(1-a)>0$ であるから

$$\frac{1}{(1-a)\,q_{n-1}}=k>0$$

となる。$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}(a))\geq \boldsymbol{o}$ であれば $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}(a))=\boldsymbol{s}(k\boldsymbol{q}(a))\geq \boldsymbol{o}$ となり，やはり均衡が成立している。

また $\boldsymbol{P}(a)$ を次のように定義する。全ての $i<n-1$ に対して

$$P_i(a)=Q_i(a)$$

$$P_{n-1}(a)=\frac{a}{1-a}$$

$$P_n(a)=1$$

ここで $$P_{n-1}(a)=\frac{a}{1-a}=\frac{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\dfrac{q_{n-1}-p_{n-1}}{q_{n-1}}}=\frac{\dfrac{p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n}}{\dfrac{p_{n-1}+p_n-p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n}}=\left.\frac{p_{n-1}}{p_n}\right|_{p_n=1}=p_{n-1}$$

$$s_i(\boldsymbol{q}(a),a)=s_i(\boldsymbol{Q}(a),a)=s_i(\boldsymbol{P}(a))\geq 0$$

となる。なぜならば $\boldsymbol{q}(a)$ が均衡価格であると仮定したから，$s_i(\boldsymbol{q}(a),a)$ は均衡の定義によって非負となっている。この場合もワルラス法則が成立するから $s_i(\boldsymbol{P}(a))>0$ であれば，$P_i(a)=0$ となっている。

補助定理　5

全ての $0\leq a\leq 1$ に対して縮約経済 $R(a)$ に一意的均衡価格 $\boldsymbol{q}(a)$ が存在するならば，$\boldsymbol{q}(a)$ は a に関して連続である。

証明

点列 $a^r\to a^o$，$0\leq a^r\leq 1$ を考えて見よう。$\boldsymbol{q}^r=\boldsymbol{q}(a^r)$ とおき，$\boldsymbol{q}^r$ は均衡価格であるとしよう。$\boldsymbol{q}\in S_{n-1}$ で S_{n-1} はコンパクトな集合であるから有界である。したがって無限点列の部分列 $\boldsymbol{q}^{r_k}$ は集積点 $\boldsymbol{q}^o$ に必ず収束する。仮定６によって超過供給関数 $s_i(\boldsymbol{q}^r,a^r)$ は連続関数である。したがって $s_i(\boldsymbol{q}^r,a^r)$ には集積点が存在して，

$$\lim_{r\to\infty} s(\boldsymbol{q}^r,a^r)=s(\boldsymbol{q}^o,a^o)$$

となる。$\boldsymbol{q}^r$ は均衡価格であるから，定義により全ての r に対して $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}^r,a^r)\geq \boldsymbol{o}$ であり，その集積点も $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}^o,a^o)\geq \boldsymbol{o}$ となる。この補助定理で均衡価格の一意性を仮定したから，

$q^r=q(a^r)$ はやはり一意であり，$q^o=q(a^o)$ もやはり一意の均衡価格となる。以上の議論は $a^o=1$ の場合にのみ成立する訳ではないので，$a<1$ の場合についても q の a に関する連続性は成立する。この場合 $a<1$ でなければならないのは

$$Q=\frac{q}{(1-a)q_{n-1}}$$

であるので，$(1-a)q_{n-1}\fallingdotseq 0$ とするためである。先に述べたように $(1-a)q_{n-1}=p_n$ であるので $a=1$ であれば $p_n=0$ となり，仮定7によって均衡は成立しない。$a<1$ とする事により

$q^r \to q^o$ のとき $Q^r \to Q^o$

となり，q の時ばかりではなく，Q の時でも $Q(a)$ は a に関して連続となる。

□

さて，ここで定理1を証明する準備が全てととのった。次にこの最も重要な定理の証明に取りかかる事としよう。

定理　1

仮定1～8が満たされるならば，$s_i(p^*)\geq 0$ が全ての i について成立する均衡価格は S_n に所属する価格ベクトルのうち，唯一つのものに限られる。

証明

財の数に関する帰納法によって証明する。（a）ここで問題にしているのは相対価格であるから財の数 $n=2$ の場合について，先づ考察する事とする。定理が真でないとすると少なくとも均衡価格が2つある事になる。それを $P^*\fallingdotseq P^{**}$ とする。この場合 P は第2財（第 n 財）をニューメレールとした価格であるから大小の比較が出来る。$P^{**}>P^*$ と仮定しても何の差し支えがないであろう。しかし，仮定8により $J(P)=s_{11}$（$J(P)$ は $n-1$ 次の行列である）がゲール性を持っているから，補助定理4により $s_{11}(P)>0$ であり，$s_1(P)$ は P_1 に関して strictly な増加関数となっている。$P^{**}>P^*$ であるから $0\leq s_1(P^*)<s_1(P^{**})$ となる。$s_1(P^{**})>0$。しかるに $P^{**}>P^*\geq 0$ となるので $P^{**}>0$。したがって $P_1^{**}s_1(P^{**})>0$ となり，ワルラス法則が成立しない。したがって P^{**} は均衡価格ではない。これは P^{**} が均衡価格であるとしたのと矛盾する。故に均衡価格はただ1つである。

（b）次に帰納法の仮定により（$n-1$）種類の財に対して定理が成立しているとしよう。これが n 種類の財についても成立するのを証明するために背理法を利用しよう。すなわ

ち $n-1$ 種類の財について定理が成立しているが n 種類の財については成立しないと仮定しよう。n 種類の財のある経済を n 経済と呼べば，背理法の仮定によって n 経済には相異なる２つの均衡価格 $\boldsymbol{P}^* \fallingdotseq \boldsymbol{P}^{**}$ が存在する。$R(a^*)$ と $R(a^{**})$ の２つの縮約経済を考え，それぞれに対応する価格を $\boldsymbol{Q}(a^*)$，$\boldsymbol{Q}(a^{**})$ とする。$Q_{n-1}(a^*)=\frac{1}{1-a^*}$，$P_{n-1}(a^*)=\frac{a^*}{1-a^*}$であるから

$$\frac{P_{n-1}(a^*)}{Q_{n-1}(a^*)}=\frac{a^*}{1-a^*}\times\frac{1-a^*}{1}=a^*=\frac{p^*_{n-1}}{q^*_{n-1}}$$

であり $\boldsymbol{P}^*$ が n 経済の均衡価格であならば $\boldsymbol{Q}(a^*)$ は $R(a^*)$ の均衡価格でなければならない。同様に $\boldsymbol{Q}(a^{**})$ は $R(a^{**})$ の均衡価格である。$R(a)$ は背理法の仮定により一意的な解を持っているから，$a^* \fallingdotseq a^{**}$ でなければならない。そうでないと，ある縮約経済 $R(a)$ に $\boldsymbol{Q}(a^*)$ と $\boldsymbol{Q}(a^{**})$ と２つの均衡解が存在する事になるからである。$a^*>a^{**}$ としよう。

（ｃ）次に全ての $i<n-1$ に対して

$$\frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da}\frac{dP_i(a)}{da}\leq 0 \tag{2}$$

となるのを証明しておこう。補助定理５により $\boldsymbol{q}(a)$ は a に関して連続であり，したがって $\boldsymbol{Q}(a)$，$\boldsymbol{P}(a)$ はまた a に関して連続である。また仮定５によって $\boldsymbol{s}$ も連続である。ここで

$$\frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da}>0$$

とおけば a の近傍に所属する a' で $a'>a$ となるものを考えれば，$s_i(\boldsymbol{P}(a'))>0$ であり，ワルラス法則が満たされる為には $P_i(a')=0$ とならねばならない。$P_i(a)$ は a に関しては連続であり，常に非負の値を取る。$P_i(a)\geq 0$ は a の増加によって $P_i(a')=0$ となったのであるから

$$\frac{dP_i(a)}{da}\leq 0$$

でなければならない。次に

$$\frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da}\leq 0$$

と仮定して見よう。a の近傍に所属している a'' を考え $a''<a$ としよう。$s_i(\boldsymbol{P}(a''))>0$ でなければならず，$\boldsymbol{P}(a'')=0$ でなければワルラス法則が成立しない。$\boldsymbol{P}(a)\geq 0$ であったから

$$\frac{dP_i(a)}{da} \geq 0$$

でなければならない。したがって，いづれの場合にも全ての $i<n-1$ に対して

$$\frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \frac{dP_i(a)}{da} \tag{3}$$

が成立していなければならない。

次に T が対角行列で $Tii=+1$ か或いは-1 となっているものを考えよう。そして

$$\frac{dP_i(a)}{da}>0 \text{ のときは } T_{ii}\frac{dP_i(a)}{da}>0$$

すなわち $T_{ii}=+1$，また

$$\frac{dP_i(a)}{da}<0 \text{ のときは } T_{ii}\frac{dP_i(a)}{da}>0$$

すなわち $T_{ii}=-1$ であるとしよう。また

$$\frac{dPi(a)}{da}=0 \text{ のときは } T_{ii}\frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \leq 0$$

となっているとしよう。

$\dfrac{dP_i(a)}{da}>0$ であれば $\dfrac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \leq 0$ となっており $T_{ii}=+1$ であるから $T_{ii}\dfrac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \leq 0$，また $\dfrac{d\boldsymbol{P}_i(a)}{da}<0$ のときは $\dfrac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \geq 0$ であり $T_{ii}=-1$ であるから $T_{ii}\ \dfrac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da} \leq 0$ となる。すなわち $\dfrac{dP_i(a)}{da}$ の符号の向き如何にかかわらず

$$T_{ii}\ \frac{ds_i(\boldsymbol{P}(a))}{da}<0 \tag{4}$$

が成立している。$P_{n-1}(a)=\dfrac{a}{1-a}$，$\dfrac{dP_{n-1}}{da}=\dfrac{1}{(1-a)^2}>0$（ただし $a<1$）であるから，上の符号の条件を適用すれ，$T_{n-1,n-1}=+1$ である。$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{P}(a))$ のうち最初の $(n-1)$ 個の成分から成るベクトルを $\tilde{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{P}(a))$ とすれば，連鎖律により

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{P}(a))}{da}=J(a)\frac{d\boldsymbol{P}(a)}{da}$$

となる。ここで $\dfrac{d\tilde{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{P}(a))}{da}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{P}(a)}{da}$ とが符号の向きが逆になっている点を注意しておこう。両辺に左から T を掛けて $T=T^{-1}$，したがって $TT=TT^{-1}=I$ である事を考慮すれば

$$T\frac{d\tilde{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{P}(a))}{da}=TJ(\boldsymbol{P}(a))TT\frac{d\boldsymbol{P}(a)}{da} \tag{5}$$

である。ここで

$$T\frac{d\tilde{s}(\boldsymbol{P}(a))}{da}=\boldsymbol{u},\quad T\frac{d\boldsymbol{P}(a)}{da}=\boldsymbol{v}$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}=TJ(\boldsymbol{P}(a))T\boldsymbol{v} \tag{6}$$

となる。$\boldsymbol{v}>\boldsymbol{o}$ となるのを思い出せば $\boldsymbol{u}$ の最初から $(n-2)$ 番目までの成分は非正となる。$v_n>0$ であるから，もし $u_{n-1}\leq 0$ となれば，$\boldsymbol{v}>\boldsymbol{o}$ に対して $TJ(\boldsymbol{P}(a))T\boldsymbol{v}\leq 0$ となり，$J(\boldsymbol{P}(a))$ がゲール性を持っていると仮定したのに反する。すなわち $J(\boldsymbol{P}(a))$ がゲール性を持っているから $TJ(\boldsymbol{P}(a))T\boldsymbol{v}\leq 0$ が成立するのは $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ の場合に限られるのである。したがって $u_{n-1}>0$ でなければならない。同じ事になるのであるが，

$$T_{n-1,n-1}\ \frac{ds_{n-1}(\boldsymbol{P}(a)}{da}>0$$

$T_{n-1,\,n-1}=+1$ であったから

$$\frac{ds_{n-1}(\boldsymbol{P}(a))}{da}>0 \tag{7}$$

$\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}(a^*)$ と $\boldsymbol{P}^{**}=\boldsymbol{P}(a^{**})$ との両方が均衡価格であるとすと，均衡の定義から $s_{n-1}(\boldsymbol{P}(a^{**}))\geq 0$ となる。$a^{**}<a^*$ と仮定したのであり(6)を考慮すれば $0\leq s_{n-1}(\boldsymbol{P}(a^{**}))<s_{n-1}(\boldsymbol{P}(a^*))$ となる。ワルラス法則が成立する為には $P^*_{n-1}=0$ でなければならない。$P_{n-1}(a)=\dfrac{a}{1-a}$ であるから $a^*=0$ となり $a^*>a^{**}\geq 0$ と矛盾する。したがって $\boldsymbol{P}^*$ と $\boldsymbol{P}^{**}$ との両方ともが均衡価格とはなり得ず，均衡価格は唯一つとなる。$\boldsymbol{P}$ の各成分に p_n を掛ければ $\boldsymbol{p}$ が得られるから，$\boldsymbol{p}\in S_n$ における均衡価格が一意的に決定される。

□

3.　ＤＤ行列と競争均衡解の一意性

以上の解の一意性の証明にあたって，重要な役割を演じて来たのはヤコビアンのゲール性であった。しかし，ゲール性の経済学的意味は必ずしも明白ではない。そこで価格が変化した場合，その超過供給に最も大きな影響を与えるのは，その財の価格そのものでありそれは他の財の変化の影響を合計したものよりも大きい場合が多い。この見地から一意性の問題を見直してみよう。先づここで使われる行列の定義から始めよう。

定義　4

経済が $p_n>0$ となっている $\boldsymbol{p}$ において正方行列 $J(\boldsymbol{p})$ が本来の意味での優対角行列と

言われるのは

$$s_{ii}(\boldsymbol{p}) > \sum_{n>j\neq i}^{n-1} s_{ij}(\boldsymbol{p}) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

が成立する場合である。

定義　5（ＤＤ行列）

経済が $p_n>0$ となっている $\boldsymbol{p}$ において，拡張した意味における優対角行列（ＤＤ行列）であるのは次の２つの条件が満足されている場合である。

（ａ）全ての i に対して $s_{ii}(\boldsymbol{p})>0$

（ｂ）全ての $i<n$ に対して $h_i(\boldsymbol{p})s_{ii}(\boldsymbol{p}) > \sum_{n>j\neq i} |s_{ij}(\boldsymbol{p})| h_j(\boldsymbol{p})$ となるベクトル $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) \gg \boldsymbol{o}$ が存在する。

（ａ）と（ｂ）を満たす場合，経済はＤＤ性を持つと言う。

s_i＝（第 i 財の供給）－（第 i 財の需要）であるから（ａ）が成立するには第 i 財の価格が上昇した時，所得効果（初期保有量の中に第 i 財が含まれていれば貨幣所得水準に変化が生じ，また利潤の配分についても変化が生じるかも知れないので，ヒックスのように貨幣所得が与えられたものとは必ずしも考えられない）に比べて代替効果が大きい場合に生じる。また第 i 財の供給が価格の上昇に対して必ず供給量を増加する事になるかも知れない。そう言った意味では（ａ）は大した問題はないように思われる（図１を参照）。（ｂ）については第 i 財とは異なる単位で測定された $j(\neq i)$ 財の価格に対する i 財の超過供給の反応である。（ｂ）の両辺を $h_i(\boldsymbol{p})$ で割れば

$$s_{ii}(\boldsymbol{p}) > \sum_{n>j\neq i} \frac{h_j}{h_i} \left| s_{ij}(\boldsymbol{p}) \right|$$

となる。$\dfrac{h_j}{h_i} s_{ij} = \dfrac{h_j}{h_i} \dfrac{\partial s_i}{\partial p_j} = \dfrac{\dfrac{\partial s_i}{h_i}}{\dfrac{\partial p_i}{h_j}}$

と表現できるから，∂p_j の変化を適当な単位で調整し，また，その結果を他の全ての財の価格変化によって起る超過供給の変化 $s_{ij}(j\neq i)$ を（ｂ）の不等式が成立するように共通項によって調整した事になる。したがって s_{ij} は一種の弾力性によって測定した事になるのである。また，ここで n 財を除外して，不等式を考えている。まづ，どの財を第 n 財とするかについては $\boldsymbol{p} \in S_n$ であるから，必ず $p_s>0$ となる正の成分が存在する。これを

ニューメレールとして第 n 財に選ぶ。さて $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ はゼロ次同次関数であるから，オイラーの定理を使って展開すれば

$$\sum_j p_j s_{rj}(\boldsymbol{p})=0$$

仮定によって，$h_i>0$ $(i=1, \cdots, n)$ であるから

$$q_i=\frac{p_i}{hi}, \quad q_r=max\, q_i$$

とする。$p_j=h_i q_j$ であるから

$$\sum_j h_j s_{rj}(\boldsymbol{p})q_j=0$$

s_{rr} 以外の項を右辺に移せば

$$h_r s_{rr}(\boldsymbol{p})q_r=-\sum_{j\neq r} h_j s_{rj}(\boldsymbol{p})q_j$$

任意の数 x と y の絶対値について $|x\pm y|\leq|x|+|y|$ が成立するのを利用すれば

$$|h_r s_{rr}(\boldsymbol{p})q_r|=|\sum_{j\neq r} h_j s_{rj}(\boldsymbol{p})q_j|\leq q_r\sum_{j\neq r} h_j|s_{rj}(\boldsymbol{p})|$$

ただし定義により $q_r\geq q_j$, $h_j>0$ となる。ＤＤであれば $s_{ii}>0$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\gg\boldsymbol{o}$ であって，全ての i に対して

$$h_i(\boldsymbol{p})s_{ii}(\boldsymbol{p})>\sum_{n>j\neq r}|s_{ij}(\boldsymbol{p})|h_j(\boldsymbol{p})$$

また $q_i\geq 0$ であり，$h_i>0$ であり p_i の中には少なくとも１つは $p_i>0$ であるから，$q_r>0$ でなければならない。したがって

$$h_r s_{rr}(\boldsymbol{p})\leq\sum_{j\neq r}|s_{ij}(\boldsymbol{p})|h_j(\boldsymbol{p})$$

となりＤＤは成立しない。第 n 財をも含めば，明らかにＤＤは成立しないのである。したがってＤＤとなるためには第 n 財を除外しなければならないのである。

定理　2

E が均衡価格の集合であるとすれば，全ての $p\in E$ に対して，経済がＤＤ性を持っている場合，仮定７を満たすならば経済の均衡は一意的に決定する。

証明

$p^*\in E$ であり，$P=(1/p_n)p$ である場合に，$J^+(\boldsymbol{P}^*)$ が $h_j(\boldsymbol{P}^*)s_{ij}(\boldsymbol{P}^*)$ を要素とするヤコビアンであるとしよう。$J^+(\boldsymbol{P}^*)$ がゲール性を満たすのを証明出来れば定理１の仮定を全て満足するので，$J^+(\boldsymbol{P}^*)$ がゲール性を持つのを証明すれば完結する。背理法によって証明するため $J^+(\boldsymbol{P}^*)$ がゲール性を満たさないと仮定しよう。そうすると $TJ(\boldsymbol{P}^*)T\boldsymbol{v}\leq\boldsymbol{o}$ が $\boldsymbol{v}>\boldsymbol{o}$ のようなベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して成立する。

$$w_j=\frac{v_j}{h_i(\boldsymbol{P}^*)}>0$$

とおけば

$$TJ(\boldsymbol{P}^*)T\boldsymbol{v}=TJ^+(\boldsymbol{P}^*)T\boldsymbol{w}\leq 0$$

が成立する。

$$w_r=max\ w_j$$

とおけば $TJ^+(\boldsymbol{P}^*)T\boldsymbol{w}\leq 0$ を r 行について展開すれば

$$t^2_{rr}h_r(\boldsymbol{P}^*)s_{rr}(\boldsymbol{P}^*)w_r\leq -\sum_{n>j\neq r} t_{rr}h_j(\boldsymbol{P}^*)s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)t_{jj}w_j$$

$$\leq w_r\sum_{n>j\neq r} h_j(\boldsymbol{P}^*)|s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)| \tag{8}$$

となる。ここで $r\neq j$ の場合 $s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)<0$ となるので $-s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)=|s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)|$ が成立する。DDであるためには

$$h_r(\boldsymbol{P}^*)s_{rr}(\boldsymbol{P}^*)>\sum_{n>j\neq r}|s_{rj}(\boldsymbol{P}^*)|h_j(\boldsymbol{P}^*)$$

が成立していなければならない。$w_r>0$ であるから (8) はDDと矛盾する。したがって $J^+(\boldsymbol{P}^*)$ はゲール性を持ち $J(\boldsymbol{p})$ についても同じ主張が成立する。したがって，この経済は一意的な均衡解を持つ。

□

系

全ての $\boldsymbol{p}\in S_n$ に対して経済がDD性を持ち仮定6が満たされているならば，均衡は一意的である。

定理2では $\boldsymbol{p}$ が均衡価格集合に所属する事が前もって仮定されていた。ここでは $\boldsymbol{p}$ は自由に変化させておき，DD性と仮定6を満たすだけの均衡をえ考て見る。そうすると，その均衡解は一意となっているのを，この系は主張している。

証明

定理1の証明のプロセスから明らかなように，DD性をもてば $J(\boldsymbol{p})$ はゲール性を持つ。そうすると仮定により $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ は連続であり，また仮定6を満たしている。したがって定理1の仮定を全て満たす事になり，均衡解は一意的である。

□

あとがき

現在，熊谷尚夫，清水義夫，三崎一明の三先生を中心として読書会を週に一度持っている。ここでは，われわれの研究での共通の知的資産となるべき書物を順次取り上げ，出来るだけ綿密に読んで来た。最近では〔1〕を中心として会が進められているので，最も新らしく取り上げた均衡解の一意性についての部分のうち，中心となると思われる箇所をまとめて見た。筆者がまとめ役としては最も不適当であると考えられるが，三先生の日頃の御指導と御鞭撻へのお礼の意味をこめて，雑役をかって出たものである。ここでの解釈が三先生の お教えに 忠実であるかどうかは 定かではない。筆者は，最初，一意性の 問題を「うめ込み定理」「はめ込み定理」の立場から再構成する事を考えたが，原著に出来るだけ忠実に follow してゆくのも意味ある事と考えて放棄した。

このノートを書き上げる間にあって，私がハーバード大学で親しくお教えを受けた二人の先生のお言葉が耳から離れなかった。一人はロバート・ドーフマンであって，ある日たまたま〔1〕の書物に話しが及んだ時，「神保君。あの本は 一見やさしそうに 見えるが仲々難解な書物だよ」と言われた。なる程，読み進んで行くうちに，全体の見通しがつかめなくて枝葉末節ばかり追った事もあった。もう一人は，この本の著者の一人であるケネス・アローである。「どうも 僕の書物の 評判が悪くて，学生達は皆 マランボーの Lectures on Microecomic Theory は読むんだが僕のは仲々読んでくれない」あんなにやさしく書いたのに，どうして読もうとしないんだろうかと言わんばかりの様子であった。一つ一つ丹念に読んで行けば大した予備知識も必要でないように書かれているから，アローのこの言も決して的外れではない。筆者はこの一見矛盾する両者の意見のどちらにも賛成でありこれ，および後に続くノートが２つの異なる見解の橋渡しになれば幸いである。

また，熊谷先生はお忙しい時間を割いて終始御指導を戴いた。ここに深く感謝の意を表したい。

REFERENCES

〔1〕Arrow, Kenneth J., and F. H. Hahn (1971)
General Competitive Analysis, San Francisco: Holden-Day.
福岡正夫・川又邦雄訳『一般均衡分析』東京：岩波書店，1976.

〔2〕Gale, D., and H. Nikaido (1965)
"The Jacobian Matrix and the Global Univalence of Mappings,"
Mathematische Annalen, 159, pp. 81–93.

〔3〕McKenzie, Lionel (1960)
"Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory,"
Kenneth J. Arrow, Samuel Karlin, and Patrick Suppes (eds.) *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959*, Stanford: Stanford University Pr., pp. 47-62.

〔4〕Woods. J. E. (1978)
Mathematical Economics—Topics in Multi-sectoral Economics, London: Longman.